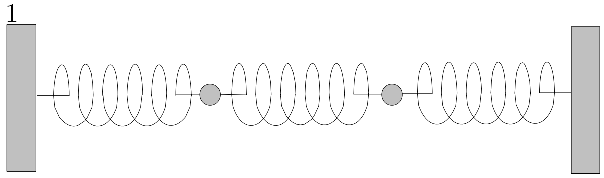
Pauta Control 3, 2008

Debe agregar un punto base y más o menos los que se indican
Problema 1



Si x_1 y x_2 indican las desviaciones de las partículas respecto a sus posiciones de equilibrio, la energía cinética es

$$K = \frac{1}{2}(m\dot{x}_1^2 + m\dot{x}_2^2),$$

y la energía potencial es

$$V = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k_1(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}kx_2^2.$$

De allí las matrices **K** y **V** son

$$\begin{aligned}
\mathbf{K} &= m\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{V} &= \begin{pmatrix} k + k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k + k_1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

por lo cual los valores propios satisfacen

$$\det\left(\omega^2 m\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k + k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k + k_1 \end{pmatrix}\right) = 0,$$

o bien

$$\omega^4 m^2 - 2\omega^2 mk - 2\omega^2 mk_1 + k^2 + 2kk_1 = 0,$$

de donde resultan

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2k_1}{m}}. \qquad \text{(a) 2 p)}$$

El sistema de ecuaciones lineales es

$$\omega^2 m\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k + k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k + k_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

de donde se obtiene

$$\begin{aligned}
(\omega^2 - \frac{(k + k_1)}{m})a_1 &= -\frac{k_1}{m}a_2, \\
a_1 &= -\frac{\frac{k_1}{m}}{(\omega^2 - \frac{(k+k_1)}{m})}a_2,
\end{aligned}$$

y para las dos frecuencias propias resulta

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -\frac{\frac{k_1}{m}}{\left(\frac{k}{m} - \frac{(k+k_1)}{m}\right)} a_{21} = a_{21}, \\
a_{12} &= -\frac{\frac{k_1}{m}}{\left(\frac{k+2k_1}{m} - \frac{(k+k_1)}{m}\right)} a_{22} = -a_{22}.
\end{aligned}$$

Normalización requiere que $\mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A} = \mathbf{I}$, por lo cual

$$m \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} \\ -a_{22} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{22} \\ a_{11} & a_{22} \end{pmatrix} = I,$$

entonces $2ma_{11}^2 = 1$ y $2ma_{22}^2 = 1$, obteniendo

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

También indicaremos los modos normales $\boldsymbol{\varsigma} = \mathbf{A}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\eta}$ que resultan ser

$$\begin{aligned}
\varsigma_1 &= \sqrt{\frac{m}{2}} \left(x_1 + x_2\right), \qquad \text{(b) 2p)} \\
\varsigma_2 &= \sqrt{\frac{m}{2}} \left(-x_1 + x_2\right).
\end{aligned}$$

El factor $\sqrt{\frac{m}{2}}$ es irrelevante.....Para las condiciones iniciales, el camino facil, obviamente $\varsigma_2 = 0$ porque $\varsigma_2(0) = 0$ y $\dot{\varsigma}_2(0) = 0$

de manera que (por cualquier camino)

$$x_1(t) = x_2(t) = a \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \qquad \text{(c) 2p)}$$

Problema 2.

Suponga que una partícula se mueve sometida a un potencial que repele a la partícula sobre el eje x

$$\begin{aligned}
V &= -\frac{1}{2} k x^2 \\
F &= kx
\end{aligned}$$

y vinculada a un alambre liso de forma $y = y(x)$ partiendo del origen con velocidad nula. Determine la curva $y(x)$ para alcanzar el punto x_2, y_2 en un tiempo mínimo. Tenemos

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} k x^2 = 0,$$

o sea

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}} x = \frac{ds}{dt}, \qquad \text{(1 p)}$$

y entonces el tiempo de viaje es

$$t = \int_{x_1}^{x_2} dt = \int_{x_1}^{x_2} \frac{ds}{v} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{ds}{\sqrt{\frac{k}{m}x}} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+(y'(x))^2}dx}{\sqrt{\frac{k}{m}x}}. \qquad (1\text{ p})$$

Como el "lagrangiano" no depende de $y(x)$ es constante

$$p = \frac{d}{dy'}\frac{\sqrt{1+(y'(x))^2}}{\sqrt{\frac{k}{m}x}} = c, \qquad (1\text{ p})$$

Para integrar despeje $y'(x)$ y despues integre

$$\begin{aligned} \frac{y'(x)}{\sqrt{1+(y'(x))^2}} &= c\sqrt{\frac{k}{m}}x \\ y &= \int_0^x \frac{c\sqrt{\frac{k}{m}}x}{\sqrt{1-(c\sqrt{\frac{k}{m}}x)^2}}dx \qquad (1\text{ p}) \end{aligned}$$

La integral es trivial, integre y reordene, se obtiene la ecuación de una circunferencia

$$(y - \frac{\sqrt{m}}{c\sqrt{k}})^2 + x^2 = \left(\frac{\sqrt{m}}{c\sqrt{k}}\right)^2 \qquad (1\text{ p})$$

Una circunferencia de radio $R = \frac{\sqrt{m}}{c\sqrt{k}}$ y centro C en el punto $x_C = 0$, $y_C = R$. Pero debe pasar por el punto x_2, y_2 luego

$$\begin{aligned} (y_2 - R)^2 + x_2^2 &= R^2 \\ R &= \frac{1}{2}\frac{y_2^2 + x_2^2}{y_2} \qquad (1\text{ p}) \end{aligned}$$

Problema 3

Tenemos condiciones iniciales

$$y(x,0) = 0; \qquad \left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0} = 5\sin\frac{3\pi x}{L} + 10\sin\frac{7\pi x}{L}$$

Como la condición inicial es de antemano antisimétrica y de periodo $2L$, podemos usar directamente D'Alembert

$$\begin{aligned} y(x,t) &= \frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt}(5\sin\frac{3\pi u}{L} + 10\sin\frac{7\pi u}{L})du \\ &= \frac{L}{2\pi v}\left(-\frac{5}{3}(\cos\frac{3\pi(x+vt)}{L} - \cos\frac{3\pi(x-vt)}{L}) - \frac{10}{7}(\cos\frac{7\pi(x+vt)}{L} - \cos\frac{7\pi(x-vt)}{L})\right) \\ &= \frac{L}{2\pi v}\left(\frac{10}{3}\sin\frac{3\pi}{L}x\sin\frac{3\pi}{L}vt + \frac{20}{7}\sin\frac{7\pi}{L}x\sin\frac{7\pi}{L}vt\right) \qquad (3\text{ p}) \end{aligned}$$

O series de Fourier

$$
\begin{aligned}
y(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi v t}{L}\sin\frac{n\pi x}{L} \\
\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi v}{L} B_n \sin\frac{n\pi x}{L} \\
&= 5\sin\frac{3\pi x}{L} + 10\sin\frac{7\pi x}{L}
\end{aligned}
$$

resultan distintos de cero B_3 y B_7

$$\frac{3\pi v}{L}B_3 = 5, \quad \frac{7\pi v}{L}\,B_7 = 10$$

luego

$$y(x,t) = \frac{5L}{3\pi v}\sin\frac{3\pi v t}{L}\sin\frac{3\pi x}{L} + \frac{10L}{7\pi v}\sin\frac{7\pi v t}{L}\sin\frac{7\pi x}{L} \qquad \text{(3 p)}$$