Capítulo 5

Sistemas continuos

5.1. Principio variacional de Hamilton

La acción de un sistema mecánico se define por:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt \,, \tag{5.1}$$

es decir una integral sobre un posible camino $q_i(t)$ que permita al sistema pasar entre los instantes de tiempo t_1 y t_2 en forma compatible con los vínculos, y con las condiciones en t_1 y t_2 . La acción, como veremos, tiene un doble e importante rol:

- Primero, su variación a extremos fijos, supuesta nula conduce a las ecuaciones de movimiento, ya sea en su forma lagrangiana o forma hamiltoniana. Esto es los caminos físicos son caminos extremales.

- Segundo, su variación en los extremos, suponiendo satisfechas las ecuaciones de movimiento, conduce a las integrales de las ecuaciones de movimiento.

De lo primero trata el principio variacional de Hamilton. De lo segundo, que se verá con más detalle más adelante, trata el método de Hamilton Jacobi.

5.1.1. Principio variacional de Hamilton

La acción puede considerarse una funcional de los posibles caminos $q_i(t)$ compatible con los vínculos y las condiciones en t_1 y t_2 . El principio variacional de Hamilton establece que la acción es un extremo si y solo si el camino es la trayectoria física, solución de las ecuaciones de movimiento del sistema (conservativo).

Demostración:

En lo que sigue, llamaremos caminos físicos a los caminos extremales entre los puntos extremos fijos y caminos variados a otros caminos, próximos a los caminos extremales, entre los mismos puntos extremos. Se requieren elementos de cálculo variacional que no estudiaremos aquí, pero de los cuales haremos uso (ver [**?**]). Para que la acción sea un extremo se requiere que su variación δS sea cero, para variaciones $\delta q_i(t)$ infinitesimal, compatibles con los vínculos y nulas en los extremos y salvo por eso, arbitrarias entre ellos. Como se sabe, usando la "notación δ", se tiene que

$$\delta S = \int_{t_1}^{t} \sum \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt \,,$$

como

$$\delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q, \quad y \qquad \delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0 \,,$$

la primera variación de la acción puede escribirse

$$\delta S = \int_{t_1}^{t} \sum \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt \,. \tag{5.2}$$

- Si se cumplen las ecuaciones de movimiento, ecuaciones de Lagrange en su forma original, es decir

  $$\sum \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i = 0,$$

  y si además se trata de un sistema conservativo, donde por definición $Q_i^{NC} = 0, \forall i$, entonces $\delta S = 0$, lo que significa que S es un extremo.

- Si la acción S es un extremo, o sea $\delta S = 0$, tenemos

$$\int_{t_1}^{t} \sum \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt = 0\,,$$

o bien

$$\sum_i \int_{t_1}^{t} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) dt \delta q_i = 0\,.$$

Si las variaciones δq_i son arbitrarias en el intervalo, serán cero los integrandos.

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0\,,$$

que son las ecuaciones correctas de Lagrange para sistemas conservativos. .

5.1.2. Variación en los extremos

Si variamos las trayectorias haciendo $q_i \to q_i + \delta q_i$

$$\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt}\delta q_i, \quad y \qquad \delta q_i(t_1) \neq 0, \delta q_i(t) \neq 0,\ \delta t_1 \neq 0, \delta t \neq 0$$

la variación de la acción será

$$\begin{aligned}
\delta S &= \delta \int_{t_1}^{t} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt \\
&= L(q(t), \dot{q}(t), t)\delta t - L(q(t_1), \dot{q}(t_1), t_1)\delta t_1 + \\
&\quad + \int_{t_1}^{t} \sum \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}\delta q_i \right) dt \\
&= L(q(t), \dot{q}(t), t)\delta t - L(q(t_1), \dot{q}(t_1), t_1)\delta t_1 + \sum \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i \right)_t - \sum \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i \right)_{t_1} \\
&\quad + \int_{t_1}^{t} \sum \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt\,.
\end{aligned}$$

Si las coordenadas generalizadas satisfacen las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

entonces

$$\delta S = L(q(t), \dot{q}(t), t)\delta t - L(q(t_1), \dot{q}(t_1), t_1)\delta t_1 + \sum \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i \right)_t - \sum \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i \right)_{t_1}. \tag{5.3}$$

Si la acción se conociera como función de $q_i(t)$, $q_i(t_1)$, t y t_1 entonces

$$S = S(q_i(t), q_i(t_1), t, t_1),$$

la ecuación anterior implica

$$\frac{\partial S(q_i(t), q_i(t_1), t, t_1)}{\partial q_i(t)} = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)_t = p_i(t), \tag{5.4}$$

$$\frac{\partial S(q_i(t), q_i(t_1), t, t_1)}{\partial q_i(t_1)} = -\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)_{t_1} = -p_i(t_1), \tag{5.5}$$

$$\frac{dS(q_i(t), q_i(t_1), t, t_1)}{dt} = L(q(t), \dot{q}(t), t), \tag{5.6}$$

$$\frac{dS(q_i(t), q_i(t_1), t, t_1)}{dt_1} = -L(q(t_1), \dot{q}(t_1), t_1). \tag{5.7}$$

Por último considere que

$$\frac{dS}{dt} = L = \frac{dS(q_i(t), q_i(t_1), t, t_1)}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i \right),$$

o bien

$$L - \sum \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i \right) = \frac{\partial S}{\partial t} = H(q_i(t), \frac{\partial S(q_i(t), q_i(t_1), t, t_1)}{\partial q_i(t_2)}, t)$$

la famosa ecuación de Hamilton Jacobi para la acción S

$$\frac{\partial S(q_i(t), q_i(t_1), t, t_1)}{\partial t} = H(q_i(t), \frac{\partial S(q_i(t), q_i(t_1), t, t_1)}{\partial q_i(t_2)}, t).$$

5.1.3. Ejemplos simples

Partícula libre

$$S = \int_{t_1}^{t} \frac{1}{2} m \frac{(q-q_1)^2}{(t-t_1)^2} dt = \frac{1}{2} m \frac{(q-q_1)^2}{(t-t_1)}.$$

La ecuación (5.5)

$$\frac{\partial S(q(t), q(t_1), t, t_1)}{\partial q(t_1)} = -p(t_1)$$

se convierte en

$$-m \frac{(q-q_1)}{(t-t_1)} = -m v_1,$$

que efectivamente resuelve el problema pues resulta

$$q = q_1 + v_1 (t - t_1).$$

Fuerza constante

Una fuerza constante puede ser representada por un potencial

$$V = -Fq,$$

de manera que la acción será

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_1}^{t} \left(\frac{1}{2}\frac{p^2}{m} + Fq\right) dt, \\ p &= p_1 + F(t-t_1), \\ q &= q_1 + \frac{p_1}{m}(t-t_1) + \frac{F}{2m}(t-t_1)^2. \end{aligned} \tag{5.8}$$

$$S = \int_{t_1}^{t} \left(\frac{1}{2}\frac{(p_1 + F(t-t_1))^2}{m} + F\left(q_1 + \frac{p_1}{m}(t-t_1) + \frac{F}{2m}(t-t_1)^2\right)\right) dt$$

el integrando se simplifica a

$$\frac{1}{2m} p_1^2 + 2 p_1 \frac{F}{m}(t-t_1) + F q_1 + \frac{F^2}{m}(t-t_1)^2,$$

luego

$$S = \frac{1}{2m} p_1^2 (t - t_1) + p_1 \frac{F}{m} (t - t_1)^2 + F q_1 (t - t_1) + \frac{F^2}{3m} (t - t_1)^3,$$

eliminamos p_1 sacándolo de 5.8

$$p_1 = m \frac{q - q_1}{t - t_1} - \frac{F}{2} (t - t_1),$$

obteniendo

$$S = \frac{1}{2m} (m \frac{q - q_1}{t - t_1} - \frac{F}{2} (t - t_1))^2 (t - t_1) + (m \frac{q - q_1}{t - t_1} - \frac{F}{2} (t - t_1)) \frac{F}{m} (t - t_1)^2 + F q_1 (t - t_1) + \frac{F^2}{3m} (t - t_1)^3$$

que se reduce a

$$S = \frac{1}{2} m \frac{(q - q_1)^2}{t - t_1} + \frac{1}{2} F (t - t_1)(q + q_1) - \frac{F^2}{24m} (t - t_1)^3.$$

La ecuación (5.5)

$$\frac{\partial S(q(t), q(t_1), t, t_1)}{\partial q(t_1)} = -p(t_1),$$

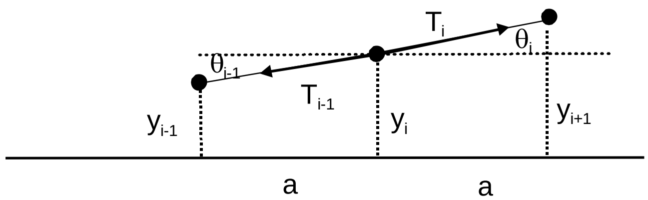
se reduce a

$$\begin{aligned} -m \frac{(q - q_1)}{(t - t_1)} + \frac{1}{2} F (t - t_1) &= -m \dot{q}_1, \\ q &= q_1 + \dot{q}_1 (t - t_1) + \frac{1}{2} \frac{F}{m} (t - t_1)^2, \end{aligned}$$

que es la solución del problema.

5.2. Oscilaciones transversales

Revisaremos de nuevo al sistema de N partículas de igual masa m unidas por resortes sin masa de la misma longitud natural y constante elástica k de modo que en la situación de equilibrio ellas están en línea recta, y los resortes sometidos a una tensión igual τ. Si las partículas se desplazan poco lateralmente, estarán sometidos a fuerzas de modo que la segunda ley de Newton conduce a



$$
\begin{aligned}
m\ddot{y}_i &= T_i \sin\theta_i - T_{i-1}\sin\theta_{i-1}, \\
m\ddot{x}_i &= T_i \cos\theta_i - T_{i-1}\cos\theta_{i-1},
\end{aligned}
$$

si no hay desplazamientos longitudinales en x y los transversales en y son pequeños, podemos aproximar, para ángulos pequeños

$$
\begin{aligned}
m\ddot{y}_i &= T_i \sin\theta_i - T_{i-1}\sin\theta_{i-1}, \\
0 &= T_i - T_{i-1}
\end{aligned}
$$

de modo que

$$
\begin{aligned}
T_i &= \tau, \\
m\ddot{y}_i &\approx \tau(\tan\theta_i - \tan\theta_{i-1}), \\
&\approx \tau\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{a} - \frac{y_i - y_{i-1}}{a}\right),
\end{aligned}
$$

de modo que tenemos como ecuación de movimiento aproximada

$$\ddot{y}_i = \frac{\tau}{ma}(y_{i+1} + y_{i-1} - 2y_i).$$

Es fácil ver que estas ecuaciones se derivan de un Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m\dot{y}_i^2 - \frac{1}{2}\tau a \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{a}\right)^2,$$

que en una próxima sección se considerará de nuevo.

5.3. Límite continuo

Deseamos estudiar lo que sucede si hacemos $N \to \infty$, $a \to 0$, y las masas tender a cero de modo que

$$\frac{m}{a} \to \sigma,$$

siendo σ una constante llamada la densidad lineal de masa. La ecuación de movimiento

$$\ddot{y}_i = \frac{\tau}{ma}(y_{i+1} + y_{i-1} - 2y_i),$$

pasará a ser dependiente de una variable continua en la posición

$$y_i \to y(x,t),$$

siendo

$$\begin{aligned} y_{i+1} &\to& y(x+a,t) = y(x,t) + \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}a + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}a^2, \\ y_{i-1} &\to& y(x-a,t) = y(x,t) - \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}a + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}a^2, \end{aligned}$$

de modo que obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2}y(x,t) &=& \frac{\tau}{ma}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}a^2 \\ &=& \frac{a\tau}{m}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}, \end{aligned}$$

y finalmente, la llamada ecuación de onda para la cuerda elástica con masa uniforme:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\tau}{\sigma}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = 0.$$

5.3.1. Lagrangiano para la cuerda continua

Para el caso de las N partículas, antes de pasar al límite continuo, el Lagrangiano del sistema es

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m\dot{y}_i^2 - \frac{1}{2}\tau a \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{a}\right)^2,$$

pues el da correctamente las ecuaciones de movimiento. En efecto

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} &=& m\dot{y}_i, \\ \frac{\partial L}{\partial y_i} &=& +\frac{\tau}{a}\left(y_{i+1} - y_i\right) - \frac{\tau}{a}\left(y_i - y_{i-1}\right), \end{aligned}$$

luego

$$\ddot{y}_i = \frac{\tau}{ma}(y_{i+1} + y_{i-1} - 2y_i).$$

Para pasar al límite continuo debemos hacer m, a infinitésimos pero con la razón $\sigma = \frac{m}{a} \to \frac{dm}{dx}$ la densidad lineal de masa

$$\begin{aligned}
a &\to dx, \\
m &\to dm \\
y_i(t) &\to y(x,t), \\
\frac{dm}{dx} &\to \sigma, \\
\frac{y_{i+1} - y_i}{a} &\to \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \\
\dot{y}_i &\to \frac{\partial y(x,t)}{\partial t},
\end{aligned}$$

luego el lagrangiano será:

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \frac{m}{a}\dot{y}_i^2 a - \frac{1}{2}\tau \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{a}\right)^2 a, \\
&= \frac{\sigma}{2}\int \left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right)^2 dx - \frac{\tau}{2}\int \left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right)^2 dx.
\end{aligned}$$

5.3.2. Densidad Lagrangiana

Para el caso analizado anteriormente, definimos la densidad lagrangiana (por unidad de longitud) mediante

$$L = \frac{\sigma}{2}\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right)^2 - \frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right)^2,$$

5.3.3. Principio de Hamilton para sistemas continuos

Admitiendo densidades Lagrangianas del tipo analizado en la sección anterior

$$L = L(y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial t}),$$

la acción será

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int L dx,$$

y el principio de Hamilton establece que la variación, a extremos fijos es nula, es decir

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int L dx,$$

y haciendo uso del formalismo de las variaciones δ, esto puede escribirse

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int \delta L dx = \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \int \left(\frac{\partial L}{\partial y}\delta y + \frac{\partial L}{\partial(\partial y/\partial x)}\delta(\partial y/\partial x) + \frac{\partial L}{\partial(\partial y/\partial t)}\delta(\partial y/\partial t) \right) dx,
\end{aligned}$$

pero

$$\delta(\partial y/\partial x) = \frac{\partial}{\partial x}\delta y, \quad \delta(\partial y/\partial t) = \frac{\partial}{\partial t}\delta y.$$

Entonces

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int \left(\frac{\partial L}{\partial y}\delta y + \frac{\partial L}{\partial(\partial y/\partial x)}\frac{\partial}{\partial x}\delta y + \frac{\partial L}{\partial(\partial y/\partial t)}\frac{\partial}{\partial t}\delta y \right) dx.$$

La segunda integral puede ser integrada parcialmente respecto a x, la tercera parcialmente respecto a t, la parte integrada se anula por la condición de extremos fijos

$$\delta y = 0 \text{ en } t = t_1 \text{ y } \ t = t_2,$$

resultando

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial(\partial y/\partial x)} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial(\partial y/\partial t)} \right) \delta y dx = 0,$$

de donde, como δy es arbitrario en el intervalo

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial(\partial y/\partial x)} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial(\partial y/\partial t)} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0,$$

son las ecuaciones de Lagrange para un sistema continuo con Lagrangiano $L(y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial t})$.

Otro tipo de Funcional

Considere
$$S = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y(x), y'(x))dx.$$
Su variación con variaciones nulas en los extremos será
$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial}{\partial y} F(x, y(x), y'(x))\delta y + \frac{\partial}{\partial y'} F(x, y(x), y'(x))\delta y' \right) dx \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial}{\partial y} F(x, y(x), y'(x))\delta y + \frac{\partial}{\partial y'} F(x, y(x), y'(x)) \frac{d}{dx}\delta y \right) dx \\
&= \left. \frac{\partial}{\partial y'} F(x, y(x), y'(x))\delta y \right|_{x_1}^{x_2} + \\
& \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial}{\partial y} F(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y'} F(x, y(x), y'(x)) \right) \delta y dx.
\end{aligned}$$
Como $\left.\delta y\right|_{x_1} = \left.\delta y\right|_{x_2} = 0$, $\delta S = 0$ implica
$$\frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y'} F(x, y(x), y'(x)) - \frac{\partial}{\partial y} F(x, y(x), y'(x)) = 0.$$
▶ Teorema 5.1
Teorema de conservación: Si $\frac{\partial}{\partial x} F(x, y(x), y'(x)) = 0$ *entonces*
$$H = y' \frac{\partial}{\partial y'} F - F \text{ es constante}$$
Demostracion 1
Considere
$$\begin{aligned}
dH &= dy' \frac{\partial}{\partial y'} F + y' d\frac{\partial}{\partial y'} F - dF \\
&= dy' \frac{\partial F}{\partial y'} + y' d\frac{\partial}{\partial y'} F - \frac{\partial F}{\partial y'} dy' - \frac{\partial F}{\partial y} dy \\
&= y' d\frac{\partial}{\partial y'} F - \frac{\partial F}{\partial y} dy \\
&= y' d\frac{\partial F}{\partial y'} - (\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}) dy,
\end{aligned}$$
luego
$$\frac{dH}{dx} = y' (\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}) - (\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}) \frac{dy}{dx} = 0.$$

Problema de la Braquistócrona

Si una partícula baja deslizando sin roce sobre una curva $y = y(x)$, el eje y hacia abajo, la rapidez dependerá de la energía de acuerdo a

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - mgy$$

de manera que el tiempo de bajada desde x_1 hasta x_2 será

$$t = \int_{x_1}^{x_2} \frac{ds}{v} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E+mgy)}}$$

De acuerdo a lo anterior se conserva

$$y'\frac{\partial}{\partial y'}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E+mgy)}} - \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E+mgy)}} = \text{constante}$$

o sea

$$\begin{aligned}
\frac{(y')^2}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{\frac{2}{m}(E+mgy)}} - \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E+mgy)}} &= \text{constante} \\
\frac{-1}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{\frac{2}{m}(E+mgy)}} &= \text{constante}
\end{aligned}$$

Si la partícula partió del reposo en el origen entonces $E = 0$ con $y(0) = 0$ entonces $y'(0) = \infty$

$$\frac{-1}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{2gy}} = \text{constante} = -H$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{1}{2gH^2y} - 1} &= \frac{dy}{dx} \\
x &= \int \frac{dy}{\sqrt{\frac{1}{2gH^2y} - 1}}
\end{aligned}$$

Sea

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2gH^2}\sin^2\theta &= y. \\
dy &= \frac{1}{gH^2}\sin\theta\cos\theta d\theta.
\end{aligned}$$

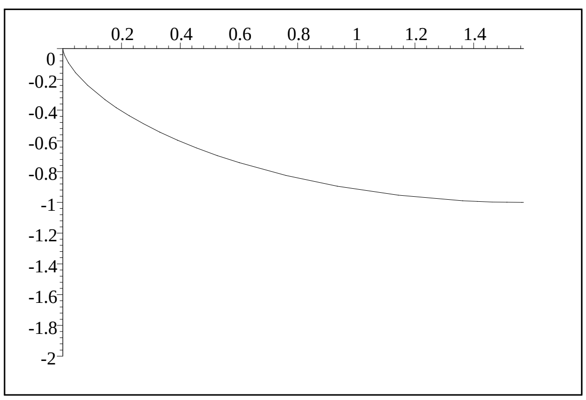
entonces

$$\begin{aligned} x &= \int \frac{1}{gH^2} \frac{\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2\theta} - 1}} d\theta \\ &= \frac{1}{gH^2} \int \sin^2\theta d\theta \end{aligned}$$

finalmente, la ecuación paramétrica de la curva es

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2gH^2} \sin^2\theta, \\ x &= \frac{1}{2gH^2}(\theta - \cos\theta\sin\theta). \end{aligned}$$

Mediante parametric Plot de mapple, ploteamos
$(\theta - \cos\theta\sin\theta)$
$-\sin^2\theta$



Para el caso de la cuerda

Reemplazando

$$L = \frac{\sigma}{2}\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right)^2 - \frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right)^2,$$

es decir

$$-\frac{\partial}{\partial x}\tau\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\sigma\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right) = 0,$$

justo la ecuación de onda

$$\sigma\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}-\tau\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}=0$$

5.4. Soluciones de la ecuación de onda

La ecuación de onda puede escribirse

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}-v^2\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} &= 0,\\ v &= \sqrt{\frac{\tau}{\sigma}}.\end{aligned} \tag{5.9}$$

▶ Teorema 5.2
Las soluciones de la ecuación de onda (5.9) son

$$y(x,t)=F(x+vt)+G(x-vt),$$

con F y G funciones arbitrarias de una variable.

Demostracion 2
Si cambiamos a variables $\zeta=x+vt$, $\psi=x-vt$ podemos escribir

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\psi}\\ &= \frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{\partial}{\partial\psi}\\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial\zeta}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\psi}\\ &= v\frac{\partial}{\partial\zeta}-v\frac{\partial}{\partial\psi},\end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}+\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}+2\frac{\partial^2}{\partial\zeta\partial\psi}\\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= v^2\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}+v^2\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}-2v^2\frac{\partial^2}{\partial\zeta\partial\psi},\end{aligned}$$

de modo que

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} = 4v^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \psi}.$$

Entonces, en estas variables, la ecuación de onda es

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \zeta \partial \psi} = 0,$$

que es trivial integrar obteniendo

$$\frac{\partial y}{\partial \zeta} = f(\zeta),$$

y

$$y = F(\zeta) + G(\psi) = F(x + vt) + G(x - vt).$$

Las soluciones anteriores corresponden a una forma invariable que se propaga hacia la derecha $G(x - vt)$ o hacia la izquierda $F(x + vt)$ con velocidad constante $v = \sqrt{\tau/\sigma}$. Sin embargo en una cuerda, debemos hacer consideraciones adicionales pues debemos satisfacer por ejemplo que $y(0,t) = y(L,t) = 0$ en el caso de extremos fijos.

5.4.1. Condiciones de frontera

Supongamos que queremos resolver la ecuación de onda sujeta a las condiciones anteriores de extremos fijos $y(0,t) = y(L,t) = 0$.

Método de separación de variables

Suponga una solución de la forma

$$y(x,t) = X(x)G(t),$$

entonces si se sustituye se obtiene

$$X(x)G''(t) - v^2 X''(x)G(t) = 0$$

o bien

$$\frac{G''(t)}{G(t)} = v^2 \frac{X''(x)}{X(x)},$$

de modo que cualquiera de los lados no puede ser función ni de x ni de t, por lo tanto

$$\frac{G''(t)}{G(t)} = v^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = -\omega^2,$$

de donde el signo se ha elegido de modo de tener soluciones oscilatorias

$$G(t) = Ce^{\pm i\omega t}$$

y

$$X(x) = De^{\pm ikx}$$

donde hemos llamado

$$k = \frac{\omega}{v}.$$

Para satisfacer la condición de frontera $X(0) = 0$ debemos tomar

$$X(x) = D \sin kx,$$

y para que $X(L) = 0$ debe ser

$$\sin kL = 0,$$

de modo que hay un número discreto de valores de k permitidos, es decir

$$k = \frac{n\pi}{L} \text{ con } n = 1, 2, 3 \cdots$$

de ese modo, la solución general, que satisface las condiciones de frontera es

$$y(x,t) = \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} (D_n^+ e^{i\frac{n\pi}{L}vt} + D_n^- e^{-i\frac{n\pi}{L}vt}) \sin \frac{n\pi x}{L}. \tag{5.10}$$

5.4.2. Condiciones iniciales

La determinación completa de los coeficientes D_n requiere de conocer la forma inicial del hilo $F(x)$ y su perfil de velocidad inicial $V(x)$, es decir supondremos conocidos

$$\begin{aligned} F(x) &= y(x,0), \\ V(x) &= \left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}. \end{aligned}$$

Considerando esto y haciendo $t=0$ en 5.10 y su derivada se obtiene

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}(D_n^+ + D_n^-)\sin\frac{n\pi x}{L}, \\ V(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} i\frac{n\pi}{L}v(D_n^+ - D_n^-)\sin\frac{n\pi x}{L}. \end{aligned}$$

Pero las funciones $\sin n\pi x/L$ son ortogonales en el intervalo $(0,L)$ de modo que podemos despejar

$$\begin{aligned} D_n^+ + D_n^- &= \frac{2}{L}\int_0^L F(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \\ D_n^+ - D_n^- &= -\frac{2i}{n\pi v}\int_0^L V(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} D_n^+ &= \frac{1}{L}\int_0^L F(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx - \frac{i}{n\pi v}\int_0^L V(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \\ &= \frac{1}{L}F_n - \frac{i}{n\pi v}V_n \\ D_n^- &= \frac{1}{L}\int_0^L F(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx + \frac{i}{n\pi v}\int_0^L V(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \\ &= \frac{1}{L}F_n + \frac{i}{n\pi v}V_n, \end{aligned}$$

donde hemos llamado

$$\begin{aligned} F_n &= \int_0^L F(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \\ V_n &= \int_0^L V(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx. \end{aligned}$$

Así finalmente la solución es

$$\begin{aligned} y(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}((\frac{1}{L}F_n - \frac{i}{n\pi v}V_n)e^{i\frac{n\pi}{L}vt} + \\ &\quad (\frac{1}{L}F_n + \frac{i}{n\pi v}V_n)e^{-i\frac{n\pi}{L}vt})\sin\frac{n\pi x}{L}, \end{aligned}$$

que se reduce a

$$y(x,t) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}(F_n \cos\frac{n\pi}{L}vt + \frac{L}{n\pi v}V_n \sin\frac{n\pi}{L}vt)\sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{5.11}$$

Caso particular, la cuerda parte del reposo

Para este caso, lo anterior se reduce a

$$\begin{aligned} y(x,t) &= \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos\frac{n\pi vt}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}, \\ F_n &= \int_0^L F(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \end{aligned}$$

EJERCICIO 5.4.1 *Demuestre que el resultado anterior puede escribirse:*

$$y(x,t) = \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty} F_n \left(\sin\left(\frac{n\pi}{L}(x+vt)\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{L}(x-vt)\right)\right)$$

o sea, tal como lo establece el método de D'Alembert (vea más adelante).

5.5. Método de las series de Fourier

Todas las funciones que se anulan en $x = 0$, $x = L$ pueden expandirse en serie de Fourier como

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

donde

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x')\sin\frac{n\pi x'}{L}dx'$$

de modo que la solución de la ecuación de onda para la cuerda con extremos fijos puede expandirse así

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L},$$

que al sustituir en la ecuación de onda da

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n''(t)\sin\frac{n\pi x}{L} + v^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\pi^2}{L^2}b_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L} = 0,$$

de donde por la independencia de las funciones base $\sin\frac{n\pi x}{L}$ permite obtener

$$b_n''(t) + \frac{v^2 n^2\pi^2}{L^2}b_n(t) = 0,$$

ecuación del movimiento armónico simple con soluciones

$$b_n(t) = A_n\cos\frac{vn\pi}{L}t + B_n\sin\frac{vn\pi}{L}t$$

de modo que

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{vn\pi}{L}t + B_n\sin\frac{vn\pi}{L}t\right)\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Para tomar en cuenta las condiciones iniciales considere

$$\begin{aligned} y(x,0) &= F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin\frac{n\pi x}{L}, \\ \left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} &= V(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{vn\pi}{L}B_n\sin\frac{n\pi x}{L}, \end{aligned}$$

de donde los coeficientes son

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{L}\int_0^L F(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \\ B_n &= \frac{2}{vn\pi}\int_0^L V(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \end{aligned}$$

o sea se ha obtenido el mismo resultado de (5.11).

5.6. Solución de D'Alembert

Para una forma inicial y perfil inicial de velocidades conocido

$$\begin{aligned} y(x,0) &= F(x), \quad 0 \le x \le L \\ \left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} &= V(x), \quad 0 \le x \le L \end{aligned}$$

es posible extender dichas funciones de modo que la solución de la ecuación de onda es la forma propuesta por D'Alembert

$$y(x,t) = \frac{1}{2}(F(x+vt) + F(x-vt)) + \frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} V(u)du. \tag{5.12}$$

Esta obviamente satisface la ecuación de onda por tratarse de funciones de $x \pm vt$. Sin embargo, las definiciones de $F(x)$ y $V(x)$ que originalmente están hechas en $0 \leq x \leq L$, deben ser extendidas a $-\infty < x < \infty$ como se explica a continuación.

5.6.1. Condiciones iniciales.

La forma inicial de la cuerda y su perfil inicial de velocidad

$$\begin{aligned} y(x,0) &= F(x), \quad 0 \leq x \leq L, && (5.13) \\ \left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} &= V(x), \quad 0 \leq x \leq L, && (5.14) \end{aligned}$$

son satisfechas por 5.12 puesto que

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2}(F(x) + F(x)) \\ \left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right| &= \frac{1}{2}(vF'(x+vt) - vF'(x-vt)) + \frac{1}{2}(V(x+vt) + V(x-vt)), \\ V(x) &= \frac{1}{2}(V(x) + V(x)) \end{aligned}$$

5.6.2. Condiciones de frontera

Como veremos la condición de extremos fijos

$$\begin{aligned} y(0,t) &= 0, && (5.15) \\ y(L,t) &= 0. && (5.16) \end{aligned}$$

Impone ciertos requisitos a $F(x)$ y $V(x)$ que veremos.

La 5.15 impone que

$$0 = \frac{1}{2}(F(vt) + F(-vt)) + \frac{1}{2v}\int_{-vt}^{vt} V(u)du,$$

lo cual se satisface si se extiende el rango de definición de $F(x)$ y $V(x)$ de modo que ellas sean antisimétricas, es decir

$$\begin{aligned} F(-x) &= -F(x), \\ V(-x) &= -V(x). \end{aligned}$$

La ecuación 5.16 impone que

$$0 = \frac{1}{2}(F(L+vt) + F(L-vt)) + \frac{1}{2v}\int_{L-vt}^{L+vt} V(u)du,$$

cuestión que exige extender el rango de definición de $F(x)$ y $V(x)$ de modo que ellas sean antisimétricas y de periodo $2L$, es decir

$$\begin{aligned} F(x+2L) &= F(x), \\ V(x+2L) &= V(x). \end{aligned}$$

5.6.3. Casos particulares

El método de D'Alembert es especialmente útil cuando $F(x)$ y $V(x)$ sean dadas como funciones antisimétricas de periodo $2L$.

Ejemplo 5.6.1 *Como ejemplo supongamos que*

$$y(x,0) = F(x) = A\sin\frac{n\pi x}{L}, \qquad 0 \le x \le L, \tag{5.17}$$

$$\left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = V(x) = 0, \qquad 0 \le x \le L. \tag{5.18}$$

Esta $F(x)$ es de antemano antisimétrica y de periodo $2L$. Luego la solución será

$$y(x,t) = \frac{1}{2}\left(A\sin\frac{n\pi(x+vt)}{L} + A\sin\frac{n\pi(x-vt)}{L}\right),$$

que se reduce a

$$y(x,t) = A\left(\cos\frac{n\pi}{L}vt\right)\sin\frac{n\pi}{L}x,$$

que muestra con claridad como oscila la cuerda con un periodo

$$T = \frac{2L}{nv}.$$

y una longitud de onda

$$\lambda = \frac{2L}{n}.$$

Note que

$$v = \frac{\lambda}{T}.$$

EJEMPLO 5.6.2 *Otro ejemplo es*

$$\begin{aligned} y(x,0) &= F(x) = 0, \qquad 0 \le x \le L, & (5.19) \\ \left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} &= V(x) = V_0 \sin\frac{n\pi x}{L}, \qquad 0 \le x \le L. & (5.20) \end{aligned}$$

Esta $V(x)$ es de antemano antisimétrica y de periodo $2L$. Luego la solución será

$$\begin{aligned} y(x,t) &= \frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} V_0 \sin\frac{n\pi u}{L} du, \\ &= \frac{V_0 L}{n\pi v}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{n\pi vt}{L}. \end{aligned}$$

5.6.4. Extensión de $F(x)$ o $V(x)$

Las funciones dadas deben ambas anularse en $x = 0$ y en $x = L$. Sus extensiones antisimétricas de periodo $2L$ son las series de Fourier

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \\ V(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b'_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \end{aligned}$$

donde los coeficientes están dados por

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L F(x)\sin\frac{n\pi x}{L} dx, \\ b'_n &= \frac{2}{L}\int_0^L V(x)\sin\frac{n\pi x}{L} dx. \end{aligned}$$

La demostración de esto descansa en la propiedad de .ºrtogonalidad" para m, n enteros

$$\int_0^L \sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L} = \frac{L}{2}\delta_{mn}.$$

5.7. Ejemplos

5.7.1. Si la cuerda parte recta con un perfil de velocidades iniciales

$$V(x) = V_0\sin\frac{\pi x}{L},$$

$V(x)$ es de antemano impar y de periodo $2T$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
y(x,t) &= \frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} V(x)dx \\
&= \frac{V_0 L}{\pi v}\sin\frac{\pi}{L}vt\sin\pi\frac{x}{L} \\
&= \frac{V_0 L}{2\pi v}(\cos\pi\frac{x-vt}{L} - \cos\pi\frac{x+vt}{L}).
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.7.1 *Si la forma inicial fuera una semi sinusoide*

$$F(x) = A\sin\frac{\pi x}{L}$$

esta función es de antemano impar y de periodo $2L$. Entonces

$$\begin{aligned}
y(x,t) &= \frac{A}{2}\left(\sin\frac{\pi(x+vt)}{L} + \sin\frac{\pi(x-vt)}{L}\right) \\
&= A\sin\frac{\pi}{L}x\cos\frac{\pi}{L}vt.
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.7.2 *En general, una extensión impar y de periodo $2L$ de $F(x)$ es*

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{L} \\
b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L F(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx,
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} y(x,t) &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\sin\frac{n\pi(x+vt)}{L} + \sin\frac{n\pi(x-vt)}{L}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi\frac{x}{L}\cos n\frac{\pi}{L}vt. \end{aligned}$$

EJEMPLO 5.7.3 *Si la cuerda parte recta con un perfil de velocidades iniciales*

$$V(x) = V_0 \sin\frac{\pi x}{L},$$

determine la solución de la ecuación de onda.

Solución. $V(x)$ es de antemano impar y de periodo $2T$, por lo tanto

$$\begin{aligned} y(x,t) &= \frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} V(x)dx \\ &= \frac{V_0 L}{\pi v}\sin\frac{\pi}{L}vt\sin\pi\frac{x}{L} \\ &= \frac{V_0 L}{2\pi v}(\cos\pi\frac{x-vt}{L} - \cos\pi\frac{x+vt}{L}). \end{aligned}$$

▲

EJEMPLO 5.7.4 *Una cuerda de longitud L con extremos fijos comienza a oscilar partiendo del reposo de manera que su forma inicial es:*

$$F(x) = \begin{cases} Ax/L & si \quad x < L/2 \\ A(1-x/L) & si \quad x > L/2 \end{cases}$$

Determine $y(x,t)$.

Solución. La solución será

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{vn\pi}{L}t\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

siendo

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L F(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

donde evaluamos

$$\frac{2}{L}\int_0^{L/2}(Ax/L)\sin\frac{n\pi x}{L}dx+\frac{2}{L}\int_{L/2}^{L}A(1-\frac{x}{L})\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

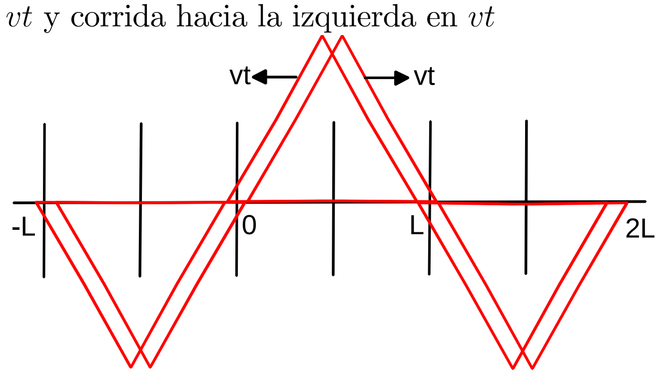
resultando

$$\begin{aligned} y(x,t) &= 4A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{1}{2}n\pi}{n^2\pi^2}\cos\frac{vn\pi}{L}t\sin\frac{n\pi x}{L} \\ &= 4A\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2}\cos\frac{v(2k+1)\pi t}{L}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{L}. \end{aligned}$$

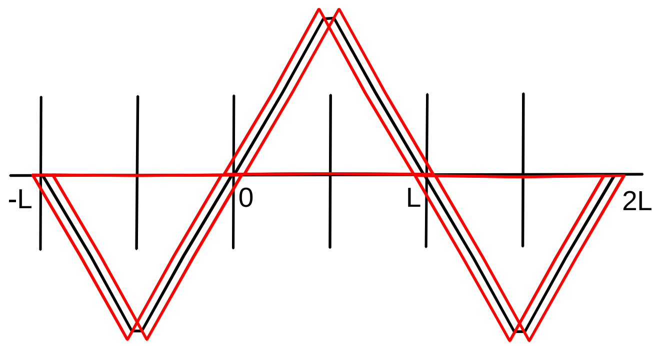
Esta solución sin embargo dice poco de la forma que tiene la onda. Analicemos la solución de D'Alembert

$$y(x,t)=\frac{1}{2}(F(x+vt)+F(x-vt)).$$

En la figura siguiente se ilustra la extensión periódica de $F(x)$ corrida hacia la derecha en vt y corrida hacia la izquierda en vt



De modo que cuando ha transcurrido un tiempo t, $F(x+vt)$ y $F(x-vt)$ son corrimientos a la izquierda y a la derecha de $F(x)$. Ambas curvas las analizamos en el intervalo donde está la cuerda y las promediamos, obteniendo la forma ilustrada en la figura siguiente:



Es aparente que la forma de la onda será simétrica respecto al punto medio, y formada por segmentos rectos, a pesar de la aparentemente complicada serie de Fourier de la solución anterior.

5.8. Consideraciones energéticas

Consideremos el trozo de cuerda desde x en adelante, como se indica en la figura (5.1). Sobre ese trozo actúa la fuerza ejercida por la parte izquierda de la cuerda es decir

$$F = -\tau \sin\theta \approx -\tau \tan\theta = -\tau \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}.$$

Por otro lado la velocidad de ese extremo de la cuerda es

$$v_y = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t},$$

de modo que la potencia entregada al lado derecho de la cuerda (por el izquierdo) es

$$P = F v_y = -\tau \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} y(x,t). \tag{5.21}$$

5.8.1. Potencia en ondas armónicas

Para una onda armónica sinusoidal del tipo

$$y = A \sin(kx - \omega t),$$

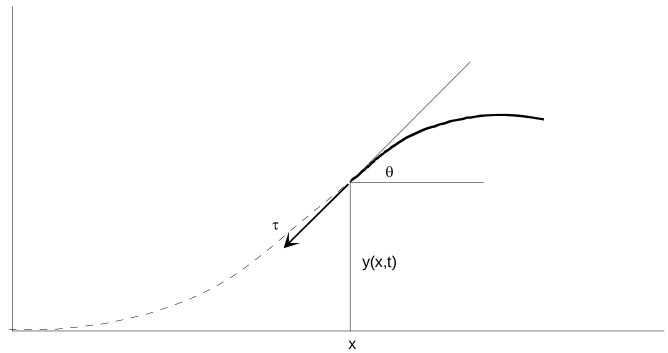


Figura 5.1: Potencia en una onda.

resulta

$$P = \tau A^2 k\omega \cos^2(kx - \omega t).$$

Aquí se tienen las relaciones

$$\begin{aligned} k &= \frac{2\pi}{\lambda}, \\ v &= \frac{\omega}{k} = v = \sqrt{\frac{\tau}{\sigma}}, \end{aligned}$$

de modo que la potencia puede escribirse

$$P = \sigma\omega^2 A^2 v \cos^2(kx - \omega t).$$

o sea en una onda que viaja hacia la derecha hay una potencia positiva entregada desde el lado izquierdo al derecho. La potencia promedio puede calcularse y resulta

$$< P >= \frac{1}{2}\sigma\omega^2 A^2 v.$$

5.8.2. Membranas

Considere una membrana elástica tensionada y denotemos por

$$\sigma(x, y)$$

la densidad superficial de masa y mediante

$$u(x, y, t)$$

el desplazamiento vertical de la membrana a partir de su posición de equilibrio, como se indica en la figuraEl área de equilibrio dA y el área deformada

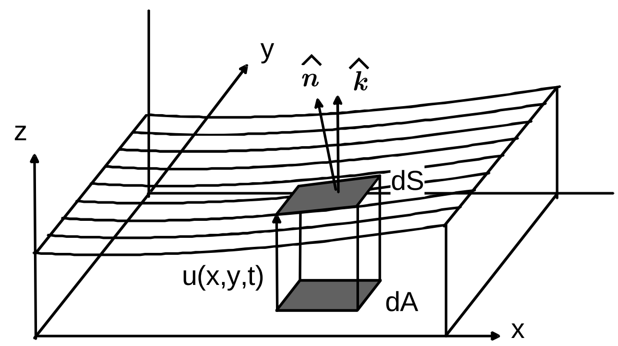


Figura 5.2:

dS están relacionadas mediante

$$\hat{k} \cdot \hat{n} dS = dA.$$

Si σ representa ahora la densidad superficial de masa, la energía cinética del elemento de masa dA de membrana será

$$\frac{1}{2}\sigma dA \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 .$$

Si $\tau(x, y)$ es la tensión superficial (fuerza por unidad de longitud $\mathrm{N\,m^{-1}}$) o equivalentemente la densidad de energía de superficie (energía por unidad de área $\mathrm{J\,m^{-2}} = \mathrm{N\,m^{-1}}$) la energía potencial es igual al trabajo de cambiar el área desde dA hasta dS es decir

$$\tau(dS - dA) = \tau(\frac{1}{\hat{k} \cdot \hat{n}} - 1)dA,$$

pero la normal está en la dirección del gradiente de la superficie. La ecuación de la superficie es

$$F(x, y, z, t) = z - u(x, y, t) = 0,$$

y entonces

$$\hat{n} = \frac{\nabla(z - u(x, y, t))}{|\nabla(z - u(x, y, t))|} = \frac{\hat{k} - \nabla u(x, y, t)}{\left|\hat{k} - \nabla u(x, y, t)\right|},$$

pero $\nabla u(x,y,t)$ está sobre el plano (x,y) de manera que

$$\hat{n} = \frac{\hat{k} - \nabla u(x,y,t)}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}},$$

y su proyección será

$$\hat{k}\cdot\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \tau(dS - dA) &= \tau(\frac{1}{\hat{k}\cdot\hat{n}} - 1)dA = \tau(\sqrt{1+|\nabla u|^2} - 1)dA \\ &\simeq \tau(\frac{1}{2}|\nabla u|^2)dA, \end{aligned}$$

de modo que la densidad Lagrangiana será

$$\begin{aligned} L &= \frac{\sigma}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \tau(\frac{1}{2}|\nabla u|^2) = \frac{\sigma}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\tau\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) \\ &= L(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}). \end{aligned}$$

Si se supone que la membrana está fija en alguna curva cerrada C en el plano x,y, el principio variacional de Hamilton con acción

$$S = \int_{t_1}^{t_2}\int_A L(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})dxdydt,$$

tiene por variación

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\int_A \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial u/\partial t)}\delta\partial u/\partial t + \frac{\partial L}{\partial(\partial u/\partial x)}\delta\partial u/\partial x + \frac{\partial L}{\partial(\partial u/\partial y)}\delta\partial u/\partial y\right)dxdydt,$$

Pero $\delta u(x,y,t_1) = 0$, $\delta u(x,y,t_2) = 0$ y $\delta u(x,y,t) = 0$ sobre C. Entonces podemos escribir

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\int_A \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial u/\partial t)}\frac{\partial}{\partial t}\delta u + \frac{\partial L}{\partial(\partial u/\partial x)}\frac{\partial}{\partial x}\delta u + \frac{\partial L}{\partial(\partial u/\partial y)}\frac{\partial}{\partial y}\delta u\right)dxdydt$$

La primera integral, integrada parcialmente respecto al tiempo dará

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_A \left(-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial(\partial u/\partial t)}\right) dxdydt\delta u.$$

La segunda y la tercera respecto a xy pueden transformarse

$$\int_A \left(\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial L}{\partial(\partial u/\partial x)}\delta u\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial L}{\partial(\partial u/\partial y)}\delta u\right\} - \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial L}{\partial(\partial u/\partial x)}\right\}\delta u - \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial L}{\partial(\partial u/\partial y)}\right\}\delta u\right)$$

y haciendo uso del teorema de Green

$$\oint_C (Pdx + Qdy) = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy,$$

las dos primeras se reducen a una integral sobre C

$$\oint_C (-\frac{\partial L}{\partial(\partial u/\partial y)}\delta u dx + \frac{\partial L}{\partial(\partial u/\partial x)}\delta u dy = 0$$

por ser $\delta u = 0$ sobre C. Así resultará

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\int_A \left(-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial(\partial u/\partial t)} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial(\partial u/\partial x)} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial L}{\partial(\partial u/\partial y)}\right) dxdydt\delta u,$$

dando como ecuación de movimiento

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial(\partial u/\partial t)} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial(\partial u/\partial x)} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial L}{\partial(\partial u/\partial y)}, \\ L &= \frac{\sigma}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\tau\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) \end{aligned}$$

o sea

$$\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \tau\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0,$$

la ecuación de onda en dos dimensiones. La velocidad de propagación será c donde

$$c^2 = \frac{\tau}{\sigma}.$$

5.8.3. Solución para geometrías específicas

Primero, buscaremos los modos normales de vibración, es decir modos donde todos los elementos de la membrana, excepto los que estén fijos, oscilan con la misma frecuencia ω. Tendremos entonces

$$u(x,y,t) = \rho(x,y)\cos(\omega t).$$

Al sustituir en la ecuación de onda resulta

$$\begin{aligned}\rho(x,y)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\cos(\omega t) &= c^2\cos(\omega t)\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\rho}{\partial y^2}\right),\\ &= -\omega^2\rho(x,y)\cos(\omega t),\end{aligned}$$

o sea

$$\left(\frac{\partial^2\rho(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\rho(x,y)}{\partial y^2}\right)+\frac{\omega^2}{c^2}\rho(x,y)=0,$$

la llamada ecuación de Helmholtz bidimensional.

Membrana rectangular

Llamando $k^2=\frac{\omega^2}{c^2}$ debemos resolver

$$\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\rho}{\partial y^2}\right)+k^2\rho=0.$$

Usando la técnica de separación de variables

$$\rho = X(x)Y(y),$$

resulta

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}+k^2=0,$$

por lo cual deben ser constantes

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=k_x^2,\quad \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=k_y^2,\quad k^2=k_x^2+k_y^2.$$

Las soluciones que satisfacen bordes fijos en un rectángulo $X(0)=X(a)=0$, $Y(0)=Y(b)=0$ son

$$\begin{aligned}X(x) &= \sqrt{\frac{2}{a}}\sin k_x x=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{m\pi x}{a},\quad m=1,2,3\ldots\infty\\ Y(y) &= \sqrt{\frac{2}{b}}\sin k_y y=\sqrt{\frac{2}{b}}\sin\frac{n\pi y}{b},\quad n=1,2,3\ldots\infty.\end{aligned}$$

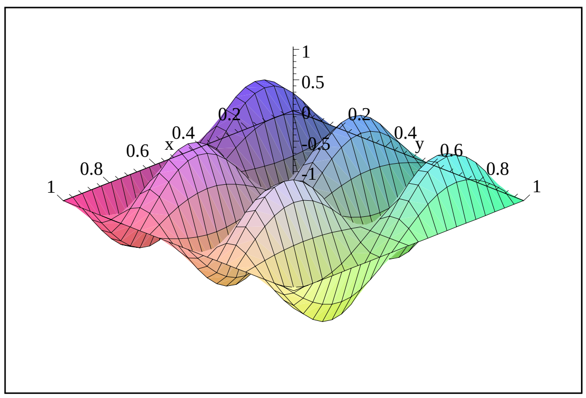
donde las frecuencias de los modos normales (m, n) son

$$k^2 = \frac{\omega_{n,m}^2}{c^2} = \frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}.$$

La frecuencia más baja, la fundamental es

$$\omega_{1,1} = \pi c \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1^2}{b^2}}.$$

$$\sin 2\pi x \sin 5\pi y$$



Membrana circular

Buscaremos nuevamente los modos normales de vibración, es decir modos donde todos los elementos de la membrana, excepto los que estén fijos, oscilan con la misma frecuencia ω. Tendremos entonces usando coordenadas polares

$$u(r, \phi, t) = \rho(r, \phi)\cos(\omega t).$$

Al sustituir en la ecuación de onda resulta

$$\begin{aligned} \rho(r, \phi)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\cos(\omega t) &= c^2\cos(\omega t)\nabla^2\rho, \\ &= -\omega^2\rho(x, y)\cos(\omega t), \end{aligned}$$

Ahora tenemos que resolver la ecuación de Helmholtz con $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$

$$\nabla^2\rho + k^2\rho = 0,$$

donde supondremos como condición de borde $\rho = 0$, en $r = a$.En coordenadas polares r, ϕ la ecuación de Hemholtz será

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}\rho + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\rho}{\partial\phi^2} + k^2\rho = 0,$$

donde nuevamente, usando la técnica de separación de variables

$$\rho = R(r)\Phi(\phi),$$

conduce a

$$r\frac{1}{R}\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}R + k^2r^2 + \frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = 0,$$

luego

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -m^2\Phi,$$

por lo tanto

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\phi}, \quad m = \pm1, \pm2, \pm3 \ldots \pm\infty,$$

y la parte radial satisface

$$\begin{aligned} r\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}R + (k^2r^2 - m^2)R &= 0, \\ r^2\frac{d^2}{dr^2}R + r\frac{d}{dr}R + (k^2r^2 - m^2)R &= 0, \end{aligned}$$

la cual puede ser reconocida como la ecuación de Bessel. Como es bien sabido, las soluciones regulares en el origen son

$$R = J_m(kr),$$

y la condición de contorno fijo en $r = a$ conduce a que

$$J_m(ka) = J_m(\frac{\omega a}{c}) = 0.$$

Denotemos por $\alpha_{m,n}$ el enésimo cero de J_m luego las frecuencias propias serán

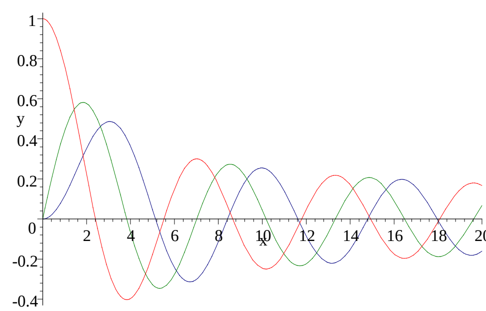
$$\frac{\omega_{m,n}a}{c} = \alpha_{m,n}.$$

Las funciones de Bessel

Las de Bessel, $J_v(z) = \mathrm{BesselJ}_v\,(z)$ y $Y_v(z) = \mathrm{BesselY}_v\,(z)$ son soluciones de primera y segunda clase de la ecuación de Bessel

$$z^2\frac{d^2w}{dz^2} + z\frac{dw}{dz} + \left(z^2 - v^2\right) w = 0.$$

Las de primera clase son regulares en el origen y el gráfico siguiente muestra las tres primeras.



J_0 (rojo), J_1(verde), J_2 (azul)

5.9. Elementos de mecánica de Fluidos

Para estudiar la dinámica de los fluidos, se han seguido dos caminos. Uno debido a Lagrange utiliza las coordenadas de cada partícula de fluido a medida que transcurre el tiempo de acuerdo a las fuerzas que ella experimenta. Otra forma debida a Euler consiste en abandonar el intento de precisar las coordenadas de cada partícula de fluido, y en vez, preocuparse de la densidad y la velocidad del fluido en puntos fijos del espacio en cada instante de tiempo. De este punto de vista, Euleriano, la atención se pone en un elemento de fluido que pasa a través de un volumen de control el cual está fijo en el espacio. Este es el método que usaremos principalmente aquí. Se definen $\rho(x, y, x, t)$ la densidad del fluido en un punto del espacio en tiempo t y $\vec{v}(x, y, z, t)$ el vector velocidad de un elemento de fluido ubicado en ese mismo punto y en ese mismo tiempo. Las partículas del fluido en el volumen de control cambian continuamente. A pesar de que nos concentraremos en puntos fijos del espacio, las ecuaciones usuales de la mecánica aplican a partículas y por lo tanto será inevitable seguir el movimiento de las partículas al menos por intervalos de tiempos cortos. Así estaremos interesados en dos tipos de derivadas. Por ejemplo si $p(x, y, z, t)$ representa la presión en un punto x, y, z, en un tiempo t determinado, la derivada Euleriana

$$\frac{\partial p}{\partial t}$$

representará la tasa a la cual está cambiando la presión en un punto fijo y la derivada Lagrangiana

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dt} &= \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \\
&= \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla p,
\end{aligned}$$

representará la tasa a la cual está cambiando la presión en un punto que sigue el movimiento de una partícula del fluido. Esto aplicará a cualquier función de las coordenadas y del tiempo, lo cual anotaremos simbólicamente como

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla.$$

5.9.1. Cambio del volumen

Consideremos un elemento de volumen δV que se mueve con el fluido de modo que contiene siempre el mismo número de partículas de fluido. Si el fluido se mueve, ese elemento se mueve y en general cambiará de volumen. Supongamos que se trata de un elemento de volumen rectangular de lados δx, δy, δz. Entonces sus caras tienen velocidades v_x, v_y, v_z. Así el cambio de volumen debido al desplazamiento de las caras $\delta y\ \delta z$ (una en x la otra en $x + \delta x$) será

$$\begin{aligned}
d\delta V &= \delta y \delta z (v_x(x + \delta x, t)dt - v_x(x + \delta x, t)dt) \\
&= \delta y \delta z \delta x \frac{\partial v_x}{\partial x} dt,
\end{aligned}$$

o sea

$$\begin{aligned}
\frac{d\delta V}{dt} &= \delta y \delta z \delta x \frac{\partial v_x}{\partial x} \\
&= \delta V \frac{\partial v_x}{\partial x}.
\end{aligned}$$

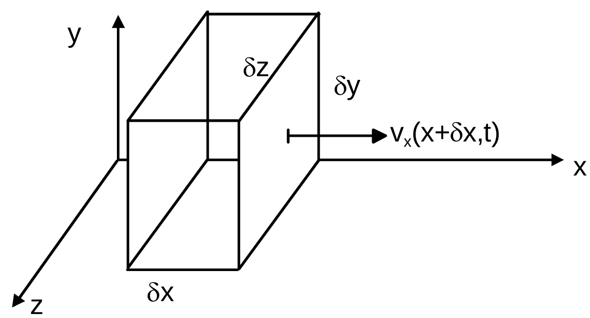


Figura 5.3:

Más en general, si varían las posiciones de las seis caras, se tiene

$$\frac{d\delta V}{dt} = \delta V(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}),$$

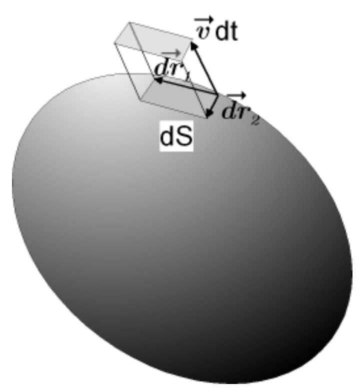
o sea

$$\frac{d\delta V}{dt} = \nabla \cdot \vec{v}\delta V.$$

Algunas propiedades del operador ∇ se explican en el apéndice. Más en general, como se explica en la figura que sigue, el cambio de volumen que se produce por el cambio del área se puede expresar como (producto mixto)

$$(d\vec{r}_1 \times d\vec{r}_2) \cdot \vec{v}dt = \hat{n} \cdot \vec{v}dtdS,$$

(base×altura)



luego la superficie cerrada completa cambia un volumen

$$\begin{aligned} dV &= \oint_S \vec{v} \cdot \hat{n} dt dS \\ \frac{dV}{dt} &= \oint_S \vec{v} \cdot \hat{n} dS. \end{aligned}$$

Si se utiliza el teorema de la divergencia la última expresión puede escribirse como

$$\frac{dV}{dt} = \int_V \nabla \cdot \vec{v} dV.$$

Fluidos incompresibles

Si el fluido es incompresible, es decir si el volumen de un número determinado de partículas no cambia con el tiempo, entonces del resultado anterior sigue que

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0.$$

Ecuación de continuidad

La masa de un elemento de volumen que sigue el movimiento del fluido no varía. Eso se puede escribir utilizando el concepto de densidad volumétrica de masa ρ como

$$\delta m = \rho \delta V = \text{constante},$$

es decir

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt}\delta V + \rho \frac{d}{dt}\delta V &= 0 \\ \frac{d\rho}{dt}\delta V + \rho \nabla \cdot \vec{v} \delta V &= 0 \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} &= 0. \end{aligned}$$

pero

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho,$$

luego

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0,$$

o

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \tag{5.22}$$

Esta última relación se denomina la ecuación de continuidad de un fluido.

5.9.2. Líneas de flujo

Para visualizar el movimiento de un fluido se utilizan tres tipos de líneas, llamadas líneas de velocidad, caminos y de trazadores.

1. Líneas de velocidad. Son las líneas del campo de velocidad $\vec{v}(x, y, z, t)$, es decir líneas que son tangentes y paralelas al vector velocidad en cada punto de coordenadas fijas x, y, z en un instante t. La ecuación de las líneas de velocidad se obtiene de

   $$\frac{dx}{v_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{v_z(x, y, z, t)}.$$

   Integrando estas ecuaciones para t fijo permitiría encontrar las líneas de velocidad. Puede ser útil expresar las coordenadas en forma paramétrica $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$. Por ejemplo sean

   $$\begin{aligned} v_x &= x(1 + 2t), \\ v_y &= y, \\ v_z &= 0, \end{aligned}$$

   luego se debe resolver

   $$\frac{dx}{x(1 + 2t)} = \frac{dy}{y},$$

   integrando

   $$\frac{1}{(1 + 2t)} \ln x = \ln y$$

   luego

   $$x = y^{(1+2t)}.$$

2. Caminos. Es la curva trazada por una partícula del fluido a medida que ella se mueve. Ella satisface

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= v_x(x,y,z,t),\\ \frac{dx}{dt} &= v_x(x,y,z,t),\\ \frac{dx}{dt} &= v_x(x,y,z,t),\end{aligned}$$

ecuaciones que al ser integradas permitirían encontrar $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Consideremos el mismo ejemplo anterior

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= v_x = x(1+2t),\\ \frac{dy}{dt} &= v_y = y,\end{aligned}$$

que son fácilmente integrables

$$\begin{aligned}\ln\frac{x}{x_0} &= t+t^2,\\ \ln\frac{y}{y_0} &= t,\end{aligned}$$

de manera que la trayectoria o camino es

$$\begin{aligned}x &= x_0 e^{t(1+t)},\\ y &= y_0 e^{t}.\end{aligned}$$

3. Líneas de trazadores. Son las líneas que siguen trazadores continuamente inyectados al fluido. Ellos pueden ser humo, tinta, y otros. No discutiremos este tema aquí.

5.10. Ecuación de movimiento de un fluido ideal

En un fluido ideal, por definición, no actúan otras fuerzas de un elemento sobre otro de fluido, más que las fuerzas de presión, que actúan normalmente a las superficies de los elementos considerados. En los fluidos reales, actúan además fuerzas tangenciales o de viscosidad que por ahora despreciaremos. Aceptaremos además que pueden actuar fuerzas externas sobre cada elemento de volumen, tal como el peso de aquel. La presión es isotrópica de modo que la fuerza que actúa sobre cada elemento de área se obtiene simplemente multiplicando la presión sobre el área por el área en cuestión. Así, si se trata de un elemento de volumen como un paralelepípedo rectangular de aristas δx, δy, δz, la fuerza resultante en la dirección x debida a la presión será

$$\begin{aligned}\delta F_x &= p(x,y,z)\delta y\delta z - p(x+\delta x,y,z)\delta y\delta z\\ &= -\frac{\partial p}{\partial x}\delta x\delta y\delta z,\end{aligned}$$

y en su forma vectorial

$$\delta\vec{F} = -\nabla p\delta V.$$

Sea además $\vec{f}$ la fuerza externa que actúa por unidad de volumen. Así la fuerza resultante sobre el elemento de volumen será

$$\delta\vec{F} = -\nabla p\delta V + \vec{f}\delta V.$$

La segunda ley de Newton establece que esta fuerza es la masa por la aceleración del elemento de volumen, o sea

$$\rho\delta V\frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p\delta V + \vec{f}\delta V,$$

o bien

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \nabla p,$$

ahora, si realizamos la derivada total obtenemos

$$\rho(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v}) = \vec{f} - \nabla p, \tag{5.23}$$

y así obtenemos la ecuación de Euler para el movimiento de un fluido ideal:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v} = \frac{\vec{f}}{\rho} - \frac{\nabla p}{\rho}. \tag{5.24}$$

5.10.1. Onda sonoras en un fluido

Supongamos un fluido en equilibrio a una presión p_0 una densidad ρ_0 y sometido a una fuerza externa volumétrica $\vec{f_0}$. Para esta situación, la ecuación (5.24) se convierte en

$$\vec{f_0} = \nabla p_0. \tag{5.25}$$

Supongamos ahora que el fluido se somete a una perturbación pequeña de modo que la presión y la densidad se alteran a

$$\begin{aligned} p &= p_0 + p' \\ \rho &= \rho_0 + \rho', \end{aligned}$$

siendo $p' \ll p$ y $\rho' \ll \rho$ y supondremos además que la velocidad u sus derivadas son también pequeñas. Si sustituimos en (5.24) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} &= \frac{\vec{f_0}}{\rho_0 + \rho'} - \frac{\nabla(p_0 + p')}{\rho_0 + \rho'} \\ &\approx \frac{\vec{f_0}}{\rho_0} - \frac{\nabla(p_0 + p')}{\rho_0} \end{aligned}$$

si despreciamos términos cuadráticos en $\vec{v}$ y en las cantidades pequeñas p' y ρ' se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= \frac{\vec{f_0}}{\rho_0 + \rho'} - \frac{\nabla(p_0 + p')}{\rho_0 + \rho'} \\ &\approx \frac{\vec{f_0}}{\rho_0} - \frac{\nabla(p_0 + p')}{\rho_0} = -\frac{\nabla p'}{\rho_0}. \end{aligned}$$

o sea

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\nabla p'}{\rho_0}. \tag{5.26}$$

Además si se sustituye en la ecuación de continuidad (5.22) se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot ((\rho_0 + \rho')\vec{v}) \\ &\approx \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \vec{v}), \end{aligned}$$

o sea

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \nabla \rho_0. \tag{5.27}$$

Finalmente supondremos que la densidad en equilibrio es prácticamente constante de modo que la última ecuación puede escribirse

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \vec{v} = 0. \tag{5.28}$$

La compresibilidad κ y su recíproco B

En termodinámica se definen la compresibilidad isotérmica

$$\kappa_T = \frac{1}{B_T} = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T,$$

y la compresibilidad adiabática

$$\kappa_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S = \frac{1}{B_S},$$

donde T y S denotan la temperatura absoluta y la entropía del sistema. Cuando una onda acústica pasa a través de una substancia los cambios de volumen son en realidad adiabáticos en vez de isotérmicos, de modo que la segunda de las anteriores es la que aplica. Ella puede ser escrita como

$$\frac{1}{B_S} = \kappa_S = -\frac{1}{m/\rho}\left(\frac{\partial m/\rho}{\partial p}\right)_S = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_S.$$

De este modo el incremento en la presión y la densidad están relacionadas por

$$\begin{aligned} \frac{1}{B_S} &= \kappa_S = \frac{1}{\rho_0}\frac{\rho'}{p'} \\ \rho' &= \frac{\rho_0 p'}{B_S}. \end{aligned}$$

Así podemos eliminar ρ' de la ecuación de continuidad (5.28) obteniendo

$$\frac{\rho_0}{B_S}\frac{\partial p'}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot \vec{v} \tag{5.29}$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = -B_S \nabla \cdot \vec{v}. \tag{5.30}$$

Si derivamos respecto al tiempo y utilizamos (5.26) se obtiene finalmente

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} &= -B_S \nabla \cdot \frac{\partial}{\partial t}\vec{v} \\ &= \frac{B_S}{\rho_0}\nabla \cdot \nabla p',\end{aligned}$$

es decir tenemos que las variaciones de la presión p' satisfacen la ecuación de ondas en tres dimensiones

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - v^2 \nabla^2 p' = 0, \tag{5.31}$$

donde la velocidad de propagación está dada por

$$v = \sqrt{\frac{B_S}{\rho_0}}.$$

5.10.2. Ondas de canal

Consideraremos un fluido incompresible sometido a un campo gravitacional uniforme. Trataremos primero de ondas de canal (ondas tidales), donde la longitud de onda es grande respecto a la profundidad del canal. En este límite, el movimiento principal de las partes del fluido es horizontal, de modo que el fluido se mueve hacia adelante y hacia atrás. Cuando se acumula en un punto, el nivel sube y aumenta la presión hidrostática. El fluido entonces fluye horizontalmente respondiendo al exceso de fuerza vertical .

Ecuaciones de movimiento

Considere un elemento de masa dm contenido en un volumen dV. La ecuación de Euler es

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \nabla p,$$

siendo la fuerza peso por unidad de volumen

$$\vec{f} = -\frac{dm}{dV} g\hat{k} = -\rho g\hat{k},$$

luego

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -g\hat{k} - \frac{1}{\rho}\nabla p.$$

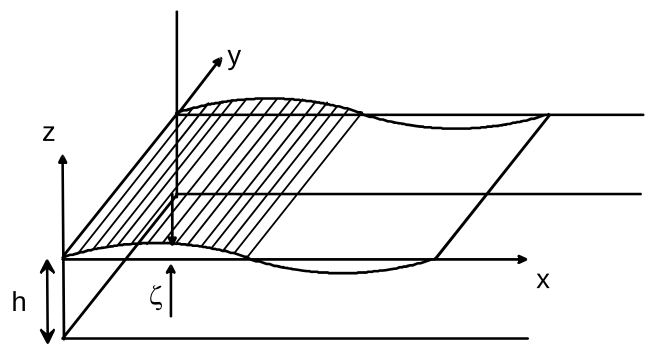


Figura 5.4:

Pero estamos suponiendo que el movimiento vertical tiene velocidad y aceleración despreciables y entonces

$$-g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}p \simeq 0$$

que nos indica la variación de la presión con la altura o profundidad en el fluido. A nivel $z = \zeta(x, y, t)$ la presión es la atmosférica p_0 resultando por integración

$$p = p_0 - \rho g(z - \zeta(x, y, t)).$$

Recordando que

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \simeq \frac{\partial \vec{v}}{\partial t},$$

En las direcciones horizontales tenemos

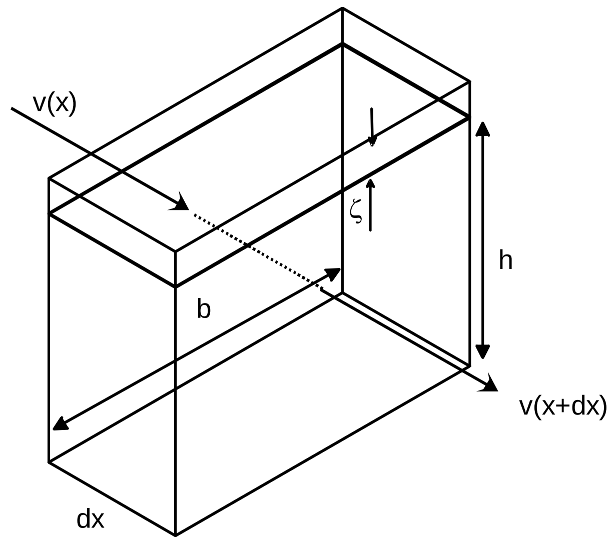
$$\begin{aligned}
\frac{dv_x}{dt} &= \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}p = -g\frac{\partial}{\partial x}\zeta(x, y, t), \\
\frac{dv_y}{dt} &= \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}p = -g\frac{\partial}{\partial y}\zeta(x, y, t).
\end{aligned}$$

Note que las aceleraciones horizontales son independientes de z.

Ondas unidimensionales

Consideraremos una onda unidimensional

$$\zeta = \zeta(x, t)$$



El fluido tiene movimiento en el eje x solamente y como consecuencia de la ecuación de continuidad, lo que se acumula provoca un cambio en la altura. El flujo (volumen/área × tiempo) es

$$J_x = \rho v(x),$$

de modo que

$$\left(\rho v(x) - \rho v(x+dx)\right)(h+\zeta)b(x)dt = \rho b dx d\zeta,$$

o bien

$$\begin{aligned} -\frac{\partial v(x)}{\partial x}(h+\zeta)b(x)dt &= bd\zeta, \\ -\frac{\partial v(x)}{\partial x}(h+\zeta)b &= b\frac{\partial \zeta}{\partial t}, \\ -\frac{\partial v(x)}{\partial x}h &= \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \end{aligned}$$

Pero

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -g\frac{\partial}{\partial x}\zeta(x,y,t),$$

luego

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial v(x)}{\partial x}h &= \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}, \\ gh\frac{\partial^2}{\partial x^2}\zeta(x,t) &= \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

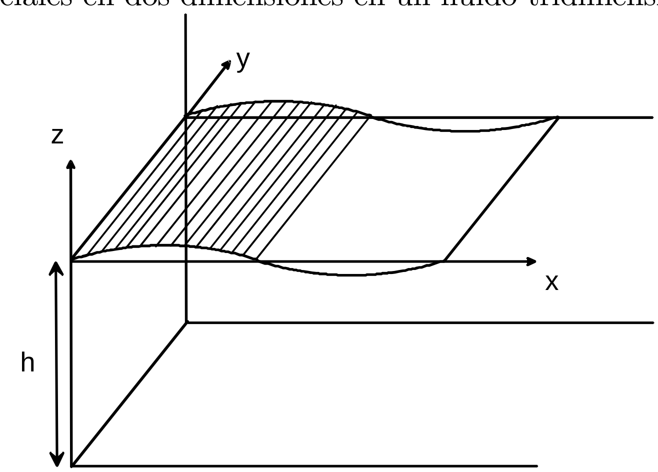
Que es la ecuación de onda con una velocidad de propagación

$$c = \sqrt{gh}.$$

El significado físico es que a mayor profundidad, mayor velocidad de propagación de la onda.

5.10.3. Ondas de superficie en líquidos

Para alturas mayores, un análisis más fino es necesario. Consideraremos ondas superficiales en dos dimensiones en un fluido tridimensional.



Respecto a la figura, el plano xy es el nivel de equilibrio del líquido en un canal de profundidad h. El líquido será considerado como incompresible con densidad volumétrica ρ constante de modo que la ecuación de continuidad (5.22) se reduce a

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0.$$

Supondremos también que el movimiento del fluido es irrotacional, es decir que

$$\nabla \times \vec{v} = 0.$$

Potencial de velocidades. Ecuación de Laplace.

Cuando el movimiento del fluido es irrotacional, el campo de velocidad del fluido es derivable de un potencial de velocidades $\Phi(\vec{r}, t)$ tal que

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = -\nabla\Phi(\vec{r}, t).$$

En términos de este potencial, la condición de incompresibilidad será

$$\nabla \cdot \vec{v} = \nabla \cdot \nabla \times \vec{v} = \nabla^2 \Phi = 0, \tag{5.32}$$

es decir el potencial de velocidad satisface la ecuación de Laplace en el interior del fluido en todo instante. En situaciones estacionarias, $\Phi = \Phi(\vec{r})$, y las líneas del campo de velocidad son fijas. Estas líneas del campo de velocidad, denominadas líneas de corriente, son tangentes al campo de velocidades del fluido en un cierto instante. No hay que confundirlas con las trayectorias seguidas por una partícula determinada a medida que transcurre el tiempo. En situaciones dinámicas como la que estudiamos, la propagación de ondas en un fluido $\Phi = \Phi(\vec{r}, t)$, las líneas de corriente irán cambiando como un todo a medida que el tiempo progrese. El resto del análisis intenta establecer las condiciones de contorno que debe cumplir el potencial de velocidad. Obviamente en el fondo del canal la velocidad normal debe anularse. Similarmente ocurre en las paredes laterales.

En la superficie libre del fluido tendremos condiciones adicionales. La dinámica del fluido ideal está dada por la ecuación de Euler (5.23)

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{f}}{\rho} - \frac{1}{\rho}\nabla p.$$

De aquí se puede establecer el llamado teorema de Bernouilli. La fuerza $\vec{f}$ representa a la fuerza externa por unidad de volumen.

Teorema de Bernouilli

La ecuación de Euler puede ser escrita de otras manera

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \frac{\vec{f}}{\rho} - \frac{1}{\rho}\nabla p.$$

Es una identidad matemática que

$$\nabla \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$$

entonces la ecuación de Euler puede escribirse como

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = \frac{\vec{f}}{\rho} - \frac{1}{\rho}\nabla p.$$

reemplacemos $\vec{v} = -\nabla\Phi$, $\nabla \times \vec{v} = 0$ y supongamos que la fuerza externa (el peso por unidad de volumen por ejemplo) es conservativo, luego

$$\vec{f} = -\nabla U(\vec{r}, t),$$

se obtiene

$$-\nabla\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \nabla\frac{1}{2}\vec{v}\cdot\vec{v} = -\nabla\frac{U}{\rho} - \nabla\frac{p}{\rho},$$

$$\nabla(\frac{p}{\rho} + \frac{U}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 - \frac{\partial\Phi}{\partial t}) = 0.$$

En otra palabras la cantidad que tiene gradiente cero es sólo función del tiempo

$$\frac{p}{\rho} + \frac{U}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 - \frac{\partial\Phi}{\partial t} = C(t).$$

El potencial de velocidad puede alterarse a

$$\Phi \to \Phi(\vec{r}, t) - \int C(t)dt,$$

sin que se altere el campo de velocidades y entonces la función $C(t)$ se cancela obteniendo

$$\frac{p}{\rho} + \frac{U}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 - \frac{\partial\Phi(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0. \tag{5.33}$$

En la superficie libre del fluido $z = \zeta$, la presión es la presión atmosférica p_0. Supondremos también que la fuerza aplicada por unidad de volumen proviene de un potencial gravitacional

$$\vec{f} = -\frac{dm}{dV}g\hat{k} = -\nabla\rho g z,$$

y que en la superficie libre $z = \zeta$

$$\frac{U}{\rho} = g\zeta,$$

y si despreciamos v^2, se obtiene

$$\frac{p_0}{\rho} + g\zeta - \frac{\partial\Phi(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0,$$

y haremos otro cambio en el potencial de velocidad

$$\Phi \to \Phi(\vec{r},t) - \frac{p_0 t}{\rho},$$

luego

$$g\zeta - \left.\frac{\partial \Phi(\vec{r},t)}{\partial t}\right|_{z=\zeta} = 0,$$

o bien, en la superficie libre se cumple

$$\zeta(x,y,t) = \frac{1}{g}\frac{\partial \Phi(x,y,\zeta,t)}{\partial t} \simeq \frac{1}{g}\frac{\partial \Phi(x,y,0,t)}{\partial t}.$$

O sea las variaciones de la altura del nivel libre del fluido se deben a que en la superficie Φ cambia con el tiempo.

Forma de la superficie libre

La altura z es alguna función de x, y, t. Esto es, la forma de la superficie estará dada por

$$F(\vec{r},t) = F(x,y,z,t) = z - \zeta(x,y,t) = 0.$$

En un pequeño intervalo de tiempo dt, la velocidad normal

$$\vec{v}_n = \hat{n}\hat{n}\cdot\vec{v}, \quad \text{con } \hat{n} = \frac{\hat{k} - i\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \hat{\jmath}\frac{\partial \zeta}{\partial y}}{\left|\hat{k} - i\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \hat{\jmath}\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right|}.$$

causa un desplazamiento de la superficie dado por

$$F(\vec{r} + \vec{v}_n dt, t + dt) = 0,$$

y haciendo una expansión de Taylor

$$\sum (v_n)_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0,$$

pero

$$\hat{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|},$$

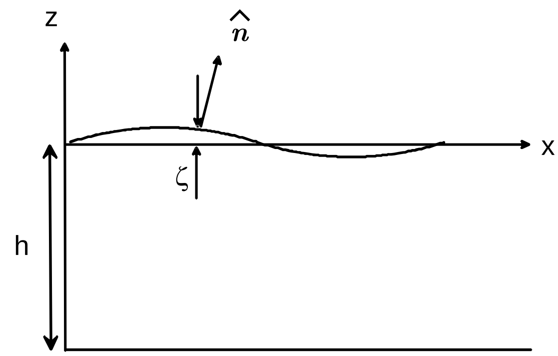


Figura 5.5:

luego

$$\vec{v}_n \cdot \nabla F = \vec{v} \cdot \nabla F,$$

y entonces

$$\vec{v} \cdot \nabla F + \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

Pero

$$F(x, y, z, t) = z - \zeta(x, y, t) = 0,$$

luego

$$v_z - v_x \frac{\partial \zeta}{\partial x} - v_y \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0, \tag{5.34}$$

además

$$v_z = \frac{\partial \zeta}{\partial t},$$

luego

$$v_x \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0$$

Condiciones de contorno

El potencial de velocidad satisface la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \Phi = 0,$$

y tiene como condiciones de contorno en una superficie fija, el fondo por ejemplo

$$v_n = -\hat{n} \cdot \nabla\Phi = 0,$$

y en la superficie libre $z = \zeta$

$$\begin{aligned} v_z &= \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \\ \zeta &= \frac{1}{g}\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad \text{(De Bernouilli)} \end{aligned}$$

que pueden combinarse en

$$v_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{1}{g}\frac{\partial^2 \Phi(x, y, 0, t)}{\partial t^2}.$$

Relación de dispersión

Consideremos como un ejemplo, una onda unidimensional que viaja con velocidad c en la dirección x, siendo el ancho del canal constante b y la profundidad h. Tratemos una solución

$$\Phi(x, z, t) = Z(z) \cos k(x - ct),$$

coloquemos esto en la ecuación de Laplace

$$\cos k(x - ct)\frac{\partial^2}{\partial z^2}Z(z) + Z(z)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\cos k(x - ct) = 0,$$

de donde

$$\frac{d^2}{dz^2}Z(z) - k^2 Z(z) = 0,$$

por lo cual

$$Z(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz},$$

pero en el fondo del canal $z = -h$, $v_z = 0$ o sea

$$\begin{aligned} \hat{k} \cdot \nabla Z(z) &= 0, \\ Z'(-h) &= 0, \end{aligned}$$

entonces

$$0 = kAe^{-kh} - kBe^{+kh},$$

luego $= B$

$$\begin{aligned} Z(z) &= Ae^{-kh}(e^{kz+kh} + e^{-kh-kz}), \\ &= C\cosh k(z+h), \end{aligned}$$

pero teníamos que

$$v_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{1}{g}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \text{ en la superficie libre}$$

o sea

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{1}{g}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \quad \Phi = C\cosh k(z+h)\cos k(x-ct),$$

conduce a

$$k\sinh kh \simeq \frac{1}{g}k^2c^2\cosh kh.$$

Note que

$$k = \frac{2\pi}{\lambda},$$

entonces

$$c^2 = \frac{g}{k}\tanh kh,$$

O sea la solución para el potencial de velocidad es

$$\Phi = C\cosh k(z+h)\cos k(x-ct),$$

con

$$c^2 = \frac{g}{k}\tanh kh.$$

Note que si h es pequeño respecto a la longitud de onda ,

$$c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}.\tanh\frac{2\pi}{\lambda}h \simeq \frac{g\lambda}{2\pi}\frac{2\pi}{\lambda}h = gh,$$

el resultado obtenido anteriormente. Haremos algunos cálculos numéricos, tomando $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $C = 1$, $h = 2$, $\lambda = 1$, $g = 1$.

$$c = \sqrt{\frac{g}{k}\tanh k(\zeta+h)} \simeq \sqrt{\frac{g}{k}\tanh kh} = 0{,}398\,94$$

$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}\tanh\frac{2\pi h}{\lambda}} = 0{,}398\,94$
$c = 0{,}398\,94$
$\Phi = C\cosh k(z+h)\cos k(x-ct) = \cos(6.\,283\,2x - 2.\,506\,6t)\cosh(6.\,283\,2z + 12.\,566)$

$\Phi = C\cosh k(z+h)\cos k(x-ct) = \cosh(6.\,283\,2z + 12.\,566)\cos(6.\,283\,2x - 2.\,506\,6t)$

La forma de la superficie

$$\begin{aligned}\zeta &= \frac{1}{g}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{1}{g}\frac{\partial}{\partial t} C\cosh k(z+h)\cos k(x-ct) \\ &= \frac{1}{g} C\cosh k(z+h) kc \sin k(x-ct)\end{aligned}$$

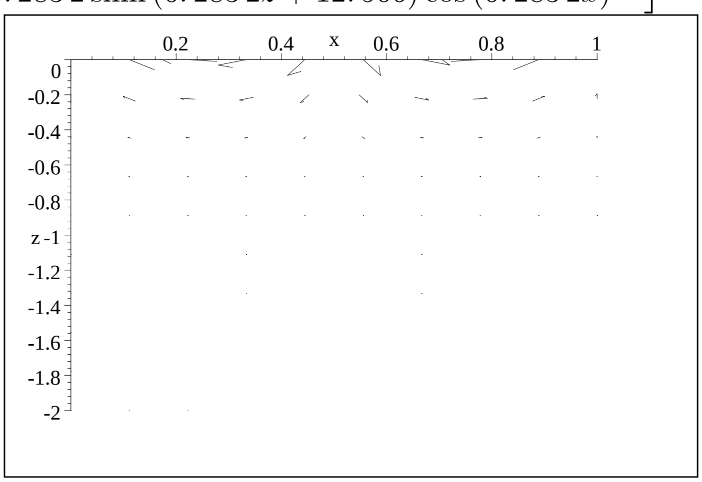
$$\vec{v} = -\nabla\Phi$$

Para t, el vector $\vec{v}$ evaluado numéricamente es

$\vec{v} = \begin{bmatrix} -6.2832\cosh(6.2832z+12.566)\sin(6.2832x-2.5066t), \\ 6.2832\sinh(6.2832z+12.566)\cos(6.2832x-2.5066t) \end{bmatrix}$ y mediante la opción Vector Field Plot 2 D con muPad, se obtiene

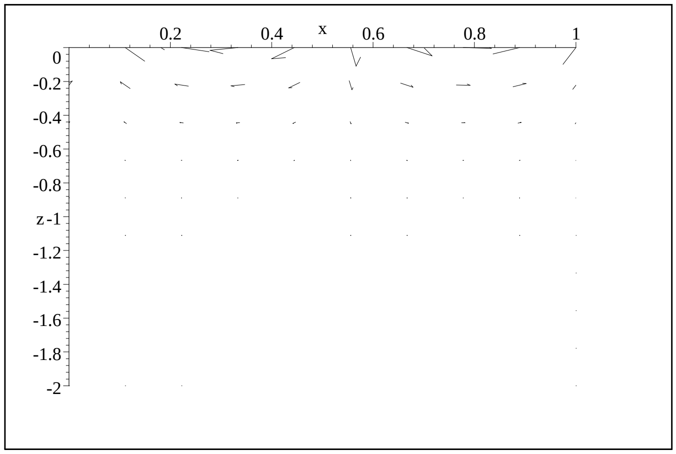
Para $t = 0$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} -6.2832\cosh(6.2832z+12.566)\sin(6.2832x), \\ 6.2832\sinh(6.2832z+12.566)\cos(6.2832x) \end{bmatrix}$$



Para $t = 0{,}1$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} -6.2832\cosh(6.2832z+12.566)\sin(6.2832x-0{,}25066), \\ 6.2832\sinh(6.2832z+12.566)\cos(6.2832x-0{,}25066) \end{bmatrix}$$



$$\Phi = C \cosh k(z+h) \cos k(x-ct),$$

con

$$\frac{g}{k} \tanh k(\zeta + h) = c^2,$$

$$\begin{aligned} v_z &= -kC \cos k(x-ct) \sinh k(z+h) = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla v_z \simeq \frac{\partial z}{\partial t} \\ v_x &= kC \sin k(x-ct) \cosh k(z+h) \simeq \frac{\partial x}{\partial t}. \end{aligned}$$

Trayectoria de una partícula

Tenemos que el campo de velocidades es con $\Phi = C \cosh k(z+h) \cos k(x-ct)$

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = -Ck \cosh k(z+h) \sin k(x-ct), \\ v_z &= \frac{dz}{dt} = Ck \sinh k(z+h) \cos k(x-ct). \end{aligned}$$

Si al lado derecho aproximamos $x = x_0$, $z = z_0$, estas son satisfechas por las siguientes coordenadas

$$\begin{aligned} x &= x_0 - \frac{C}{c} \cosh k(z_0+h) \cos k(x_0-ct), \\ z &= z_0 - \frac{C}{c} \sinh k(z_0+h) \sin k(x_0-ct) \end{aligned}$$

de donde

$$\left(\frac{x-x_0}{\cosh k(z_0+h)}\right)^2+\left(\frac{x-x_0}{\sinh k(z_0+h)}\right)^2=\frac{C^2}{c^2},$$

la ecuación de una trayectoria elíptica

5.10.4. Más sobre ondas de superficie

Primero recordemos las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un fluido ideal, incompresible y con flujo irrotacional

1. El potencial de velocidad satisface la ecuación de Laplace en todo el fluido (5.32)

$$\nabla^2\Phi=0.$$

2. La ecuación de Bernouilli es (5.33)

$$\frac{p}{\rho}+\frac{U}{\rho}+\frac{1}{2}v^2-\frac{\partial\Phi(\vec{r},t)}{\partial t}=0.$$

En la superficie libre del fluido $z=\zeta$, la presión es la presión atmosférica p_0. Supondremos también que la fuerza aplicada por unidad de volumen proviene de un potencial gravitacional

$$\vec{f}=-\frac{dm}{dV}g\hat{k}=-\nabla\rho gz,$$

y que en la superficie libre $z=\zeta$

$$\frac{U}{\rho}=g\zeta,$$

ahora no despreciamosv^2, obteniendo

$$\frac{p_0}{\rho}+g\zeta+\frac{1}{2}v^2-\frac{\partial\Phi(\vec{r},t)}{\partial t}=0,$$

y haremos otro cambio en el potencial de velocidad

$$\Phi\rightarrow\Phi(\vec{r},t)-\frac{p_0t}{\rho},$$

luego

$$\begin{aligned} g\zeta + \frac{1}{2}v^2 - \frac{\partial \Phi(\vec{r},t)}{\partial t} &= 0, \\ g\zeta + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 - \frac{\partial \Phi(\vec{r},t)}{\partial t} &= 0, \text{ en la superficie libre.} \end{aligned} \tag{5.35}$$

3. Sobre cualquier superficie fija que contenga al fluido

$$\hat{n}\cdot\nabla\Phi = 0.$$

4. La superficie libre tiene una forma dada por

$$z - \zeta(x,y,t) = 0.$$

De la ecuación (5.34), se dedujo que

$$v_z - v_x\frac{\partial \zeta}{\partial x} - v_y\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0,$$

que será escrito en términos del potencial de velocidades Φ

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \vec{v}\cdot\nabla\zeta - \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= 0, \\ -\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \nabla\Phi\cdot\nabla\zeta - \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= 0, \text{ en la superficie libre del fluido} \end{aligned} \tag{5.36}$$

Una ecuación extendida para ondas de canal

Busquemos una solución de la forma

$$\Phi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cosh\left[k(z+h)\right]e^{ikx}\widetilde{f}(k,t)dk.$$

Satisface (3) en el fondo del canal, puesto que

$$v_z(z=-h) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}k\sinh\left[k(z+h)\right]e^{ikx}\widetilde{f}(k,t)dk \to 0.$$

Satisface la ecuación de Laplace. Calculemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}k^2\cosh\left[k(z+h)\right]e^{ikx}\widetilde{f}(k,t)dk, \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}k^2\cosh\left[k(z+h)\right]e^{ikx}\widetilde{f}(k,t)dk. \end{aligned}$$

Luego

$$\nabla^2\Phi = 0.$$

Aproximación en la superficie libre $kh << 1$.

En la superficie libre, $z \simeq 0$

$$\Phi \simeq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \cosh\left[kh\right] e^{ikx}\widetilde{f}(k,t)dk \simeq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(1-\frac{k^2h^2}{2})e^{ikx}\widetilde{f}(k,t)dk.$$

Llamemos

$$f(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\widetilde{f}(k,t)dk,$$

luego la ecuación anterior puede escribirse

$$\Phi \simeq (1-\frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2})f(x,t). \text{ En la superficie libre.}$$

Similarmente

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi}{\partial z} &\simeq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k\sinh\left[kh\right] e^{ikx}\widetilde{f}(k,t)dk, \\
&\simeq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k(kh+\frac{k^3h^3}{6})e^{ikx}\widetilde{f}(k,t)dk, \\
&= (-h\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{6}h^3\frac{\partial^4}{\partial x^4})f(x,t). \text{ En la superficie libre.}
\end{aligned}$$

Sustituyendo en (5.36) y (5.35),

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\zeta}{\partial t} &= -(-h\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{6}h^3\frac{\partial^4}{\partial x^4})f(x,t)+\nabla\Phi\cdot\nabla\zeta, \\
g\zeta &= \frac{\partial}{\partial t}(1-\frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2})f(x,t)-\frac{1}{2}\left(\nabla\Phi\right)^2,
\end{aligned}$$

despreciando términos no lineales $\nabla\Phi\cdot\nabla\zeta$ y $\frac{1}{2}\left(\nabla\Phi\right)^2$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\zeta}{\partial t} &= -(-h\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{6}h^3\frac{\partial^4}{\partial x^4})f(x,t), && (5.37)\\
g\zeta &= \frac{\partial}{\partial t}(1-\frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2})f(x,t), && (5.38)
\end{aligned}$$

Ondas planas

Busquemos soluciones ondas armónicas simples

$$\begin{aligned} \zeta &= \zeta_0 e^{i(kx-\omega t)}, \\ f &= f_0 e^{i(kx-\omega t)}, \end{aligned}$$

al sustituir da

$$-i\omega\zeta_0 = -(hk^2 + \frac{1}{6}h^3k^4)f_0, \tag{5.39}$$

$$g\zeta_0 = (-i\omega - \frac{1}{2}h^2k^2 i\omega)f_0, \tag{5.40}$$

dividiéndolas

$$\omega^2 = ghk^2 \frac{1+\frac{1}{6}h^2k^2}{1+\frac{1}{2}h^2k^2}, \tag{5.41}$$

constituye la relación de dispersión.

5.10.5. Ecuación no lineal efectiva

En la sección anterior aproximamos

$$\Phi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \cosh\left[k(z+h)\right] e^{ikx}\widetilde{f}(k,t)dk,$$

tomando $z = 0$. Una simple generalización de los anterior expandiendo $[k(h+\zeta)]$ conducirá a

$$\begin{aligned} \Phi &\simeq (1 - \frac{1}{2}(h+\zeta)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2})f(x,t), \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} &\simeq (-(h+\zeta)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{6}(h+\zeta)^3\frac{\partial^4}{\partial x^4})f(x,t) \end{aligned}$$

Sustituyendo en (5.36) y (5.35), y despreciando

$$\begin{aligned} \frac{\partial\zeta}{\partial t} &= -(-(h+\zeta)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{6}(h+\zeta)^3\frac{\partial^4}{\partial x^4})f(x,t) + \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x}, \\ g\zeta &= \frac{\partial}{\partial t}(1 - \frac{1}{2}(h+\zeta)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2})f(x,t) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2, \end{aligned}$$

pero

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \simeq \frac{\partial}{\partial x}(1-\frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2})f(x,t) \simeq \frac{\partial f}{\partial x},$$

luego

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = (h+\zeta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{6}h^3\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \tag{5.42}$$

$$g\zeta = \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}h^2\frac{\partial^3 f}{\partial t \partial x^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2, \tag{5.43}$$

que se denominan ecuaciones de onda extendidas no lineales.

Ondas solitarias

Busquemos soluciones de la forma

$$\begin{aligned} \zeta(x,t) &= \zeta(x-ct), \\ f(x,t) &= f(x-ct). \end{aligned}$$

Al sustituir en las ecuaciones 5.42, 5.43 se obtiene

$$\begin{aligned} -c\zeta' &= (h+\zeta)f'' - \frac{1}{6}h^3 f'''' + f'\zeta', \\ g\zeta &= -cf' + c\frac{1}{2}h^2 f''' - \frac{1}{2}(f')^2, \end{aligned}$$

ecuaciones acopladas para f, ζ. Afortunadamente la primera puede ser integrada

$$-c\zeta' = -\frac{1}{6}h^3 f'''' + hf'' + f'\zeta' + \zeta f''$$

$$-c\zeta + \frac{1}{6}h^3 f''' - (h+\zeta)f' = \text{constante} \tag{5.44}$$

que debe ser resuelta junto con

$$cf' = -g\zeta + c\frac{1}{2}h^2 f''' - \frac{1}{2}(f')^2. \tag{5.45}$$

5.10.6. Una solución aproximada

Una solución aproximada se logra haciendo algunas otras aproximaciones. Primero mantener sólo el primer término de 5.45

$$cf' = -g\zeta.$$

Reemplace la velocidad de propagación por su aproximación de orden cero (5.41)

$$c^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = gh\frac{1+\frac{1}{6}h^2k^2}{1+\frac{1}{2}h^2k^2} \simeq gh.$$

Luego la ecuación 5.44 puede ser escrita

$$-c\zeta + \frac{1}{6}h^3 f''' - (h+\zeta)f' = \text{ constante}$$

$$-c^2\zeta + \frac{1}{6}h^3(-g\zeta'') - (h+\zeta)(-g\zeta) = \text{ constante}$$

$$(1-\frac{gh}{c^2})\zeta + \frac{1}{6}h^2\zeta'' - \frac{g}{\sqrt{gh}}\zeta^2 = \text{ constante}$$

Haciendo algunas otras aproximaciones, vea [**?**, p 401] una solución en forma de onda solitaria se encuentra

$$\zeta(x,t) = \zeta_0 \frac{1}{\cosh^2\left[\sqrt{\left(\frac{3\zeta_0}{h}\right)}\frac{x-ct}{2h}\right]}.$$

5.10.7. Algunas soluciones de la ecuación de onda.

De acuerdo a las propiedades del operador ∇ puede probarse que son soluciones de la ecuación de onda tridimensional

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - v^2\nabla^2\phi = 0.$$

5.10.8. A) Ondas planas

Esta son soluciones de la forma

$$\phi(x,y,x,t) = F(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) = F(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t),$$

donde F es una función arbitraria (diferenciable), v es la velocidad y $\vec{k}$ es un vector constante cuya magnitud se denomina número de onda. Para demostrarlo basta considerar que

$$\begin{aligned}
\nabla F(\vec{k}\cdot\vec{r}-vt) &= \vec{k}F'(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t), \\
\nabla^2 F(\vec{k}\cdot\vec{r}-vt) &= \vec{k}\cdot\nabla F(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t) \\
\nabla^2\phi &= k^2F''(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t), \\
\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} &= \omega^2k^2F''(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t),
\end{aligned}$$

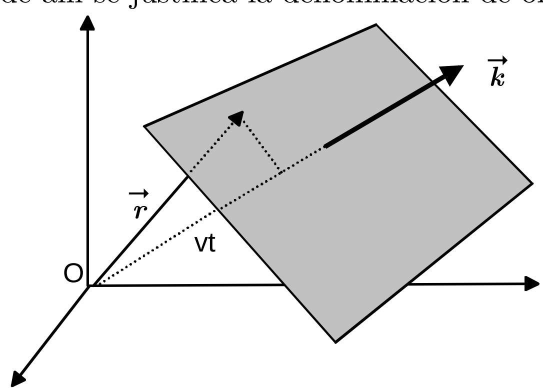
que prueba lo establecido siempre y cuando

$$v = \frac{\omega}{k}.$$

Hay que observar, que los puntos donde F tiene un valor constante, digamos $F(0)$ están sobre el plano

$$\begin{aligned}
\vec{k}\cdot\vec{r} &= \omega t \\
\hat{k}\cdot\vec{r} &= vt,
\end{aligned}$$

es decir un plano que viaja precisamente con la velocidad de propagación de la onda $v=\omega/k$, de allí se justifica la denominación de ondas planas.



Onda plana

5.10.9. B) Ondas esféricas

En coordenadas esféricas el Laplaciano puede escribirse (ver apéndice)

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2},$$

de modo que si buscamos soluciones de la ecuación de onda que dependan de la distancia al origen solamente, la ecuación de onda será

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - v^2 \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r}\phi = 0,$$

pero usted puede establecer que

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r}\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi),$$

de modo que la ecuación de onda es

$$\frac{\partial^2(r\phi)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi) = 0,$$

de modo que

$$r\phi(r,t) = F(kr - \omega t),$$

por lo cual una onda esférica es de la forma

$$\phi(r,t) = \frac{F(kr - \omega t)}{r},$$

donde la velocidad de propagación es ahora

$$v = \frac{\omega}{k}.$$

5.10.10. Las ondas electromagnéticas

Como ha sido bien establecido, los campos eléctricos $\vec{E}$ y magnético $\vec{B}$ en vacío satisfacen las cuatro ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \tag{5.46}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \tag{5.47}$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \tag{5.48}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \tag{5.49}$$

Vacío significa la nada. Una solución de estas ecuaciones diferenciales son lo trivial, no hay nada $\vec{E} = 0$, $\vec{B} = 0$. Pero, hay soluciones no triviales. Veremos. Tomemos el rotor de la tercera

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) + \frac{\partial \nabla \times \vec{B}}{\partial t} = 0,$$

y reemplazando la cuarta

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0,$$

pero como consecuencia de la primera

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E},$$

luego el vector campo eléctrico satisface la ecuación de onda tridimensional

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0,$$

con velocidad de propagación

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

Considerando que $\epsilon_0 = 8{,}854187817 \times 10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}}$ y $\mu_0 = 1{,}2566370614 \times 10^{-6}\,\mathrm{N\,A^{-2}}$ resulta $c = 2.9979 \times 10^8 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ la rapidez de la luz en el vacío. Similarmente, tomando el rotor de la cuarta

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \nabla \times \vec{E}}{\partial t},$$

reemplazando la tercera

$$-\nabla^2 \vec{B} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2},$$

es decir la misma ecuación de onda

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0.$$

5.10.11. Ondas electromagnéticas planas

Probando soluciones de la forma

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)},\\ \vec{B} &= \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)},\end{aligned}$$

al sustituir en las cuatro ecuaciones de Maxwell se obtiene que

$$\begin{aligned}\vec{k}\cdot\vec{E} &= 0,\\ \vec{k}\cdot\vec{B} &= 0,\\ -\vec{E}_0\times\nabla e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} - i\omega\vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} &= 0,\\ -\vec{B}_0\times\nabla e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} &= -\mu_0\epsilon_0 i\omega\vec{E}_0,\end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned}\vec{k}\cdot\vec{E} &= 0,\\ \vec{k}\cdot\vec{B} &= 0,\\ \vec{E}_0\times\vec{k} &= -\omega\vec{B}_0,\\ \vec{B}_0\times\vec{k} &= \mu_0\epsilon_0\omega\vec{E}_0,\end{aligned}$$

que muestra que los vectores $\vec{E}_0$, $\vec{B}_0$ y el vector de propagación $\vec{k}$ son ortogonales y además que

$$\begin{aligned}\frac{k^2}{\omega^2} &= \mu_0\epsilon_0 = \frac{1}{c^2},\\ \omega &= ck.\end{aligned}$$

Es la relación de dispersión.

Interferencia de ondas

Consideremos ondas sinusoidales unidimensionales $\psi(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \phi)$ donde ϕ se conoce como la fase de la onda. Debido a que la ecuación de onda es lineal, la superposición de este tipo de ondas de la misma velocidad $v = \omega/k$ es también solución de la ecuación de onda, La superposición de ondas de este tipo causa el fenómenos llamado de interferencia, en particular de interferencia constructiva e interferencia destructiva. Considere por ejemplo que la frecuencia sea la misma, entonces la longitud de onda también es la misma y el fenómeno que ocurre en la superposición depende de la diferencia de fase. En efecto, la superposición será

$$\psi = A_1 \sin(kx - \omega t + \phi_1) + A_2 \sin(kx - \omega t + \phi_2).$$

Aquí conviene utilizar elementos de los números complejos. Considere

$$A_1 e^{i(kx-\omega t+\phi_1)} + A_2 e^{i(kx-\omega t+\phi_2)} = A e^{i(kx-\omega t)},$$

esto es cierto si

$$\begin{aligned} A &= A_1 e^{i(\phi_1)} + A_2 e^{i(\phi_2)} \\ &= e^{i(\phi_1)}(A_1 + A_2 e^{i(\phi_2-\phi_1)}). \end{aligned}$$

Este número complejo puede colocarse en su forma polar de acuerdo a

$$A = |A|\, e^{i\phi}$$

donde

$$\begin{aligned} |A| &= \sqrt{(A_1 + A_2\cos(\phi_2-\phi_1))^2 + (A_2\sin(\phi_2-\phi_1))^2} \\ &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi_2-\phi_1)}, \\ \tan\phi &= \frac{A_2\sin(\phi_2-\phi_1)}{A_1 + A_2\cos(\phi_2-\phi_1)}. \end{aligned}$$

En resumen

$$A_1 e^{i(kx-\omega t+\phi_1)} + A_2 e^{i(kx-\omega t+\phi_2)} = |A|\, e^{i\phi} e^{i(kx-\omega t)},$$

donde la superposición de ondas sinusoidales es la parte imaginaria de la última expresión, es decir

$$\begin{aligned} \psi &= A_1 \sin(kx - \omega t + \phi_1) + A_2 \sin(kx - \omega t + \phi_2) \\ &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi_2-\phi_1)}\sin(kx - \omega t + \phi). \end{aligned}$$

Es decir la superposición es una onda del mismo tipo, con otra fase ϕ y con otra amplitud. La interferencia se llama constructiva si la amplitud de la onda resultante es máxima y destructiva si es mínima. Estos casos ocurren evidentemente si

a) Constructiva: $\phi_2 - \phi_1 = 2n\pi, n = 0, 1, 2...,$

$$\psi = |A_1 + A_2| \sin(kx - \omega t).$$

b) Destructiva: $\phi_2 - \phi_1 = (2n+1)\pi, n = 0, 1, 2...,$

$$\psi = |A_1 - A_2| \sin(kx - \omega t).$$

Pulsaciones

Otro fenómenos ocurre si las ondas que se superponen tienen la misma velocidad pero diferentes longitudes de onda y en consecuencia diferentes frecuencias. Suponiendo las mismas fases y amplitudes la superposición es

$$\begin{aligned}
\psi &= A\sin(k_1 x - \omega_1 t) + A\sin(k_2 x - \omega_2 t), \\
v &= \frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_2}{k_2}
\end{aligned}$$

que puede escribirse como

$$\psi = 2A\sin\frac{(k_1+k_2)x - (\omega_1+\omega_2)t}{2}\cos\frac{(k_1-k_2)x - (\omega_1-\omega_2)t}{2},$$

esto es el producto de dos ondas que se propagan a iguales velocidades

$$v = \frac{\omega_1+\omega_2}{k_1+k_2} = \frac{\omega_1-\omega_2}{k_1-k_2}$$

y que tienen frecuencias, una alta frecuencia

$$\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$$

y otra que puede ser muy pequeña

$$\frac{\omega_1-\omega_2}{2}$$

si las ondas que se superponen tienen frecuencias próximas. Este fenómeno se puede escuchar como un batido de baja frecuencia cuando se pulsan dos cuerdas de guitarra casi afinadas en la misma nota.

$$\psi = 2A\sin\frac{(k_1+k_2)(x-vt)}{2}\cos\frac{(k_1-k_2)(x-vt)}{2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\omega_1+\omega_2}{2} &= \frac{(k_1+k_2)v}{2}, \\
\frac{\omega_1-\omega_2}{2} &= \frac{(k_1-k_2)v}{2}.
\end{aligned}$$

5.10.12. Velocidad de grupo

La superposición de muchas ondas de casi la misma frecuencia y con longitudes de onda parecidas también, causa el fenómeno de la formación de un grupo que se dispersa. Para precisar las cosas supongamos que se superponen ondas con frecuencias en un cierto rango continuo, donde esas frecuencias dependen de la longitud de onda de alguna forma funcional tal como

$$\omega = \omega(k).$$

Esta relación se denomina relación de dispersión. En otras palabras estamos suponiendo que la velocidad de propagación $v = \omega(k)/k$ es alguna función de k es decir de la longitud de onda. Este caso tiene una representación concreta en el caso de las ondas luminosas que se propagan en materiales transparentes, donde la velocidad de propagación en ese medio es dependiente de la longitud de onda. Bueno, para ver lo que ocurre considere entonces una superposición continua para algún rango continuo de valores de k

$$\psi = \int A_k \sin(kx - \omega(k)t)dk.$$

Supongamos que la superposición es hecha en un entorno a un valor k_0. Si expandimos hasta primer orden

$$\omega(k) = \omega_0 + \omega_0'(k - k_0),$$

entonces

$$\begin{aligned}
\psi &= \int_{k_0-\Delta}^{k_0+\Delta} A_k \sin(kx - \omega(k)t)dk, \\
&= \int_{k_0-\Delta}^{k_0+\Delta} A_k \sin(kx - (\omega_0 + \omega_0'(k - k_0))t)dk, \\
&= \int_{k_0-\Delta}^{k_0+\Delta} A_k \sin(\omega_0' k_0 t - \omega_0 t + k(x - \omega_0' t))dk, \\
&\approx \frac{2A_0}{x - \omega_0' t} \sin\left(\Delta(x - \omega_0' t)\right) \sin\left(k_0 x - \omega_0 t\right)
\end{aligned}$$

donde hemos supuesto $A_k \approx A_{k_0} = A_0$. O sea, la resultante

$$\psi = 2A_0 \frac{\sin\left(\Delta(x - \omega_0' t)\right)}{x - \omega_0' t} \sin\left(k_0 x - \omega_0 t\right)$$

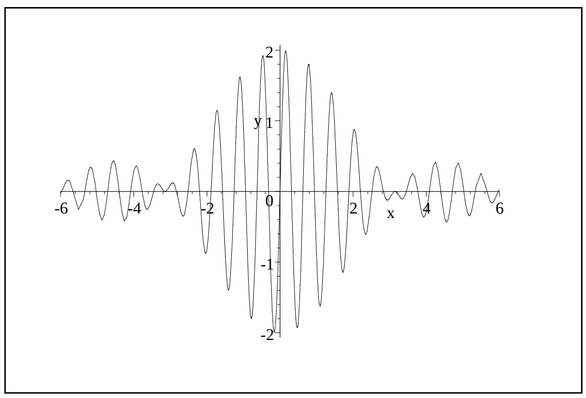
es una onda que viaja con la llamada velocidad de fase ω_0/k_0 modulada por otra onda que viaja con la llamada velocidad de grupo

$$v_g = \omega_0' = \left.\frac{d\omega(k)}{dk}\right|_{k=k_0}.$$

Note que en esta aproximación la amplitud máxima de la modulación ocurre en

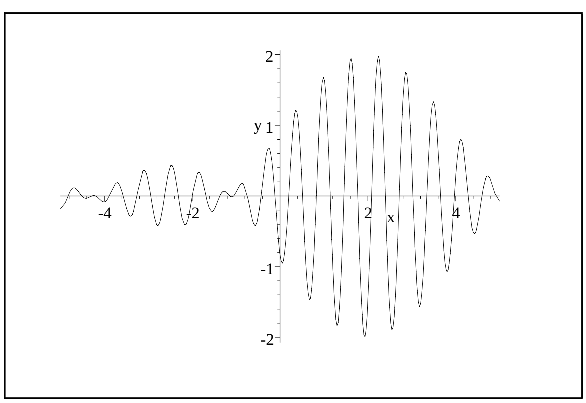
$$x = \omega_0' t$$

Representaremos el grupo viajero para $k_0 = 10$, $\Delta = 1$, $A_0 = 1$, $\omega_0' = 1, \omega_0 = 1$, en dos tiempos, $t = 0$ y $t = 2$.



Grupo en $t = 0$.

y para $t = 2$



Grupo en $t = 2$.

NOTA 5.1 En realidad la formación de grupos no se debe a la superposición de ondas que sean soluciones de una determinada ecuación de onda. La función considerada

$$\psi = \int A_k \sin(kx - \omega(k)t)dk,$$

no satisface la ecuación de onda. Ejemplo real donde se forman grupos se hará a continuación.

5.10.13. Efecto Doppler clásico

Suponga una onda viajera hacia la derecha del tipo armónico de velocidad de propagación v

$$\phi(x,t) = A\sin(kx - \omega t).$$

Si otro observador se aleja hacia la derecha sobre el eje x con velocidad $u < v$, ¿que onda es observada por el observador móvil? Para el observador móvil llamaremos la coordenada x'. Supondremos válida la transformación de Galileo, es decir obtendremos el denominado efecto Doppler clásico. Esta transformación puede escribirse

$$\begin{aligned} x' &= x - ut, \\ t' &= t. \end{aligned}$$

Así resulta

$$\begin{aligned} \phi'(x',t') &= \phi(x,t) = \phi(x' + ut, t'), \\ &= A\sin(k(x' + ut) - \omega t), \\ &= A\sin(kx' - (\omega - ku)t) \end{aligned}$$

es decir una onda armónica pero con frecuencia

$$\begin{aligned} \omega' &= \omega - ku, \\ &= \omega(1 - \frac{ku}{\omega}), \\ &= \omega(1 - \frac{u}{v}), \end{aligned}$$

es decir una frecuencia menor. Si al contrario, el observador y la onda tienen direcciones de movimiento de distinto sentido resultará

$$\omega' = \omega(1 + \frac{u}{v}),$$

una frecuencia mayor.

5.10.14. Efecto Doppler relativista

Para velocidades del observador muy altas, cercanas a la velocidad de la luz, debe aplicarse la transformación de Lorentz

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - ut), \\ t' &= \gamma(t - \frac{ux}{c^2}), \end{aligned}$$

donde c es la velocidad de la luz y $\gamma = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$. Así resulta

$$\begin{aligned} \phi'(x', t') &= \phi(x, t) = \phi(\gamma(x' + ut'), \gamma(t' + \frac{ux'}{c^2})), \\ &= A\sin(k\gamma(x' + ut') - \omega\gamma(t' + \frac{ux'}{c^2})), \\ &= A\sin(\gamma(k - \omega\frac{u}{c^2})x' - \gamma(\omega - ku)t', \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned} k' &= \gamma(k - \omega\frac{u}{c^2}), \\ \omega' &= \gamma(\omega - ku) = \gamma\omega(1 - \frac{u}{v}), \\ v' &= \frac{\omega'}{k'} = \frac{\omega - ku}{k - \omega\frac{u}{c^2}} = \frac{v - u}{1 - \frac{uv}{c^2}}. \end{aligned}$$

5.10.15. Efecto Doppler para ondas luminosas

Si las ondas tienen la velocidad de la luz, entonces $v' = v = c$ y los resultados anteriores se reducen a

$$\begin{aligned} \omega' &= \gamma(\omega - ku) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}\omega(1 - \frac{u}{c}), \\ \omega' &= \sqrt{\frac{1 - \frac{u}{c}}{1 + \frac{u}{c}}}\omega. \end{aligned}$$

5.11. Ejercicios propuestos.

EJERCICIO 5.11.1 *Demuestre que si $F(x)$ y $V(x)$ representan extensiones impares y de periodo $2L$ de la forma y de la velocidad inicial de la cuerda, entonces la expresión*

$$\begin{aligned} y(x,t) &= \frac{1}{2}(F(x+vt)+F(x-vt)) \\ &+\frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} V(x)dx \end{aligned}$$

satisface la ecuación de onda y además

$$\begin{aligned} y(x,0) &= F(x), \\ \left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} &= V(x), \\ y(0,t) &= 0, \\ y(L,t) &= 0. \end{aligned}$$

*Esta solución se denomina de D'Alembert. Vea [**?**].*

EJERCICIO 5.11.2 *Una cuerda elástica de largo L con extremos fijos parte del reposo con una deformación inicial*

$$y(0,x) = \begin{cases} cx & si \quad x < L/2 \\ 0 & si \quad x > L/2 \end{cases}$$

Resuelva para $y(x,t)$ en su desarrollo de Fourier. Esquematice cuidadosamente la forma de la onda para $t = T/4$, $T = T/2$, mediante la solución de D'Alembert.

EJERCICIO 5.11.3 *Repita el problema anterior si la cuerda parte tensa con un perfil de velocidades inicial*

$$\left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \begin{cases} v_0 x/L & si \quad x < L/2 \\ v_0(1-x/L) & si \quad x > L/2 \end{cases}$$

Solución. La forma inicial es cero y el perfil de velocidad inicial es

$$V(x) \begin{cases} v_0 x/L & \text{si} \quad x < L/2 \\ v_0(1-x/L) & \text{si} \quad x > L/2 \end{cases},$$

que debe ser expandido

$$V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L},$$

siendo entonces

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{L}\int_0^L V(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \\ &= \frac{2v_0}{L^2}\int_0^{L/2} x\sin\frac{n\pi x}{L}dx + \frac{2v_0}{L^2}\int_{L/2}^{L}(L-x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \\ &= \frac{4v_0}{n^2\pi^2}\sin\frac{1}{2}n\pi \end{aligned}$$

luego

$$V(x) = \frac{4v_0}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{1}{2}n\pi\sin\frac{n\pi x}{L},$$

y finalmente

$$\begin{aligned} y(x,t) &= \frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt}\frac{4v_0}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{1}{2}n\pi\sin\frac{n\pi x}{L}dx, \\ &= \frac{1}{2v}\frac{4v_0}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L}{n^3}\sin\frac{1}{2}n\pi(\cos\frac{n\pi(x-vt)}{L} - \cos\frac{n\pi(x+vt)}{L}). \end{aligned}$$

▲

Ejercicio 5.11.4 *Obtenga una expresión general para la superposición*

$$\psi = A_1\cos(kx-\omega t+\phi_1) + A_2\cos(kx-\omega t+\phi_2).$$

Solución. Sea $\phi = kx - \omega t$. Además proponga

$$\psi = A\cos(\phi+\delta) = A_1\cos(\phi+\phi_1) + A_2\cos(\phi+\phi_2).$$

coeficientes de $\cos\phi$ y $\sin\phi$ se obtienen

$$\begin{aligned} A\cos\delta &= A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2 \\ A\sin\delta &= A_1\sin\phi_1 + A_2\sin\phi_2, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{(A_1 \cos\phi_1 + A_2 \cos\phi_2)^2 + (A_1 \sin\phi_1 + A_2 \sin\phi_2)^2} \\ &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)}, \end{aligned}$$

y la fase

$$\tan\delta = \frac{A_1 \sin\phi_1 + A_2 \sin\phi_2}{A_1 \cos\phi_1 + A_2 \cos\phi_2}.$$

▲

Ejercicio 5.11.5 *Obtenga la superposición de las dos ondas*

$$\psi = 2A\sin(kx - \omega t + \pi/4) + A\sin(kx - \omega t).$$

Solución. Utilizando lo anterior la amplitud resultante es

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{4A^2 + A^2 + 4A^2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} \\ &= A\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

y la fase dada por

$$\tan\delta = \frac{2A\sin\frac{\pi}{4}}{2A\cos\frac{\pi}{4} + A} = 2 - \sqrt{2}.$$

▲

Ejercicio 5.11.6 *Determine la potencia promedio transmitida por la onda del problema anterior.*

Ejercicio 5.11.7 *Demuestre que si un punto se mueve sobre un plano de manera que sus dos coordenadas varían armonicamente como*

$$\begin{aligned} x &= A\cos(\omega t - \alpha), \\ y &= B\cos(\omega t - \beta), \end{aligned}$$

entonces el punto describe una elipse. Determine además la orientación de esa elipse respecto al eje x.

Solución. Para obtener la ecuación cartesiana, es necesario eliminar el tiempo entre x, y. Una forma de hacerlo es usando números complejos. Considere

$$\begin{aligned} e^{i(\omega t-\alpha)} &= \cos(\omega t-\alpha)+i\sin(\omega t-\alpha) \\ &= \frac{x}{A}+i\sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}}. \end{aligned}$$

similarmente

$$\begin{aligned} e^{-i(\omega t-\beta)} &= \cos(\omega t-\beta)+i\sin(\omega t-\beta) \\ &= \frac{y}{B}-i\sqrt{1-\frac{y^2}{B^2}}. \end{aligned}$$

Multiplicando ambas se obtiene

$$\begin{aligned} e^{i(\beta-\alpha)} &= (\frac{x}{A}+i\sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}})(\frac{y}{B}-i\sqrt{1-\frac{y^2}{B^2}}) \\ &= \frac{xy}{AB}-\frac{i}{A}x\sqrt{1-\frac{y^2}{B^2}}+\frac{i}{B}y\sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}}+\sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}}\sqrt{1-\frac{y^2}{B^2}}, \end{aligned}$$

tomando la parte real

$$\cos(\beta-\alpha)=\frac{xy}{AB}+\sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}}\sqrt{1-\frac{y^2}{B^2}},$$

reordenando

$$\sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}}\sqrt{1-\frac{y^2}{B^2}}=\cos(\beta-\alpha)-\frac{xy}{AB},$$

finalmente, elevando al cuadrado y ordenando

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-2\frac{xy}{AB}\cos(\beta-\alpha)=\sin^2(\beta-\alpha),$$

que es la ecuación de una elipse.

▲

Ejercicio 5.11.8 *Demuestre que una superposición de ondas de la forma*

$$\psi=\int A_k\sin(kx-\omega(k)t)dk.$$

no satisface la ecuación de ondas a menos que

$$v = \frac{\omega(k)}{k}$$

*sea constante. Esto naturalmente cuestiona el hecho de superponer ondas que no satisfacen una ecuación lineal. Las situaciones físicas donde se forman grupos son complejas. Vea([**?**, pag.370])*

Ejercicio 5.11.9 *Demuestre que si v denota la velocidad de fase de una onda armónica y v_g la velocidad de grupo, entonces*

$$v_g = v + k\frac{dv}{dk}.$$

Solución. Sea $\omega = \omega(k)$ la relación de dispersión. Tenemos, por definición

$$v = \frac{\omega}{k},\ v_g = \frac{d\omega}{dk}.$$

Derivando la primera respecto a k resulta

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dk} &= \frac{d}{dk}\frac{\omega}{k} = \frac{\frac{d}{dk}\omega}{k} - \frac{\omega}{k^2} \\ &= \frac{v_g}{k} - \frac{v}{k}, \end{aligned}$$

que prueba lo solicitado.

Ejercicio 5.11.10 *Si $n(\lambda)$ denota el índice de refracción de un material transparente en función de la longitud de onda, demuestre que la velocidad de grupo está dada por*

$$v_g = \frac{c}{n}(1 + \frac{\lambda}{n}n'(\lambda)).$$

Solución. El índice de refracción se define

$$n(\lambda) = \frac{c}{v(\lambda)},$$

siendo v la velocidad de fase. O sea

$$n(\lambda) = \frac{c}{\frac{\omega}{k}} = \frac{c}{\omega}k,$$

o bien

$$\omega = \frac{ck}{n(\lambda)}.$$

Derivando respecto a λ resulta

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}\frac{ck}{n(\lambda)} = \frac{c}{n(\lambda)} - \frac{ck}{n^2(\lambda)}n'(\lambda)\frac{d}{dk}\lambda,$$

que puede reordenarse

$$v_g = \frac{c}{n}\left(1 - \frac{k}{n}n'(\lambda)\frac{d}{dk}\lambda\right),$$

pero

$$\lambda = \frac{2\pi}{k},$$

luego

$$\begin{aligned} v_g &= \frac{c}{n}\left(1 + \frac{k}{n}n'(\lambda)\frac{2\pi}{k^2}\right) \\ &= \frac{c}{n}\left(1 + \frac{\lambda}{n}n'(\lambda)\right). \end{aligned}$$

▲

EJERCICIO 5.11.11 *Demuestre que*

$$\nabla\frac{1}{2}\vec{v}\cdot\vec{v} - \vec{v}\times(\nabla\times\vec{v}) = \vec{v}\cdot\nabla\vec{v}.$$

Solución. Es útil saber que (suma sobre índices repetidos)

$$\begin{aligned} \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_i &= \epsilon_{ijk}a_j b_k, \\ \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} &= \delta_{mj}\delta_{li} - \delta_{lj}\delta_{mi}, \end{aligned}$$

donde el símbolo de Levi Civita

$$\epsilon_{ijk} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & \text{hay dos o tres indices iguales} \\ 1 & \text{si} & ijk \text{ permutación par de } 123 \\ -1 & \text{si} & ijk \text{ permutación impar de } 123 \end{array} \right. .$$

Luego

$$\begin{aligned}
(\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}))_i &= \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} v_j \partial_l v_m \\
&= v_j \partial_i v_j - v_j \partial_j v_i \\
&= \partial_i \frac{1}{2} v_j v_j - \vec{v} \cdot \nabla v_i,
\end{aligned}$$

que prueban el resultado.

▲

5.11.1. Calculo variacional

Ejercicio 5.11.12 *Una cuerda de longitud fija L cuelga estando sus extremos fijos en dos puntos. Obtenga la ecuación para su forma con la condición de que su energía potencial es mínima.*

Solución. La longitud será

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx,$$

y su energía potencial

$$U = \sigma g \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

donde σ es la densidad lineal de masa. Variando la energía potencial

$$\begin{aligned}
\delta U &= \sigma g \int_{x_1}^{x_2} \delta y \sqrt{1 + (y')^2} dx + \sigma g \int_{x_1}^{x_2} y \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \frac{d}{dx} \delta y dx \\
&= \sigma g \int_{x_1}^{x_2} \delta y \sqrt{1 + (y')^2} dx - \sigma g \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \frac{y y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \delta y dx = 0,
\end{aligned}$$

debe entonces satisfacerse

$$\frac{d}{dx} \frac{y y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = \sqrt{1 + (y')^2}$$

para integrar reordene

$$\frac{y dy}{\sqrt{1 + (y')^2}} \frac{d}{dx} \frac{y y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = y dy,$$

o bien

$$\frac{yy'}{\sqrt{1+(y')^2}}d\frac{yy'}{\sqrt{1+(y')^2}} = ydy$$

que puede integrarse tomando $y'(0) = 0$ y $y(0) = c$

$$\frac{1}{2}\frac{y^2(y')^2}{1+(y')^2} = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}c^2,$$

o bien

$$\frac{y^2}{c^2} = 1 + (y')^2$$

cuya solución es

$$y = c\cosh\frac{x}{c},$$

la ecuación de una catenaria. El llamado parámetro c de la catenaria se determina por

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+(y')^2}dx = c\sinh\frac{x_2}{c} - c\sinh\frac{x_1}{c},$$

siendo x_1 y x_2 las coordenadas de los puntos fijos.

▲

PROBLEMA 5.11.1 *Se tiene una curva en el plano xy que va desde* x_1, y_1 *a* x_2, y_2*. Si esa curva se rota en* 2π *respecto al eje y se genera una cierta área. Determine esa curva para que el área generada sea mínima.*

Solución. El área generada será

$$S = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi x ds = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} x\sqrt{1+(y')^2}dx.$$

La ecuación de Euler Lagrange será

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y'}(x\sqrt{1+(y')^2}) - \frac{\partial}{\partial y}x\sqrt{1+(y')^2} = 0.$$

Realizando las operaciones

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y'}(x\sqrt{1+(y')^2}) = 0$$

o sea

$$\frac{\partial}{\partial y'}(x\sqrt{1+(y')^2}) = -c \quad \text{(constante)},$$

luego

$$x\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = -c$$

cuya solución es (una catenaria)

$$x = c\cosh\frac{y}{c}.$$

▲

PROBLEMA 5.11.2 *Si una partícula baja deslizando sin roce sobre una curva $y = y(x)$, el eje y hacia abajo, la rapidez dependerá de la energía de acuerdo a*

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - mgy$$

de manera que el tiempo de bajada desde x_1 hasta x_2 será

$$t = \int_{x_1}^{x_2}\frac{ds}{v} = \int_{x_1}^{x_2}\frac{\sqrt{1+y'^2}dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E+mgy)}}$$

Determine la curva $y(x)$ que da el mínimo tiempo de bajada.

Solución. De acuerdo a lo explicado, el "Lagrangiano"$\frac{\sqrt{1+y'^2}dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E+mgy)}}$ no contiene x de manera que se conserva el "Hamiltoniano"

$$y'\frac{\partial}{\partial y'}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E+mgy)}} - \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E+mgy)}} = \text{constante}$$

o sea

$$\begin{aligned}
\frac{(y')^2}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{\frac{2}{m}(E+mgy)}} - \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E+mgy)}} &= \text{constante} \\
\frac{-1}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{\frac{2}{m}(E+mgy)}} &= \text{constante}
\end{aligned}$$

Si la partícula partió del reposo en el origen entonces $E = 0$ con $y(0) = 0$ entonces $y'(0) = \infty$

$$\frac{-1}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{2gy}} = \text{constante} = -H$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{2gH^2y} - 1} &= \frac{dy}{dx} \\ x &= \int \frac{dy}{\sqrt{\frac{1}{2gH^2y} - 1}} \end{aligned}$$

Sea

$$\begin{aligned} \frac{1}{2gH^2}\sin^2\theta &= y. \\ dy &= \frac{1}{gH^2}\sin\theta\cos\theta d\theta. \end{aligned}$$

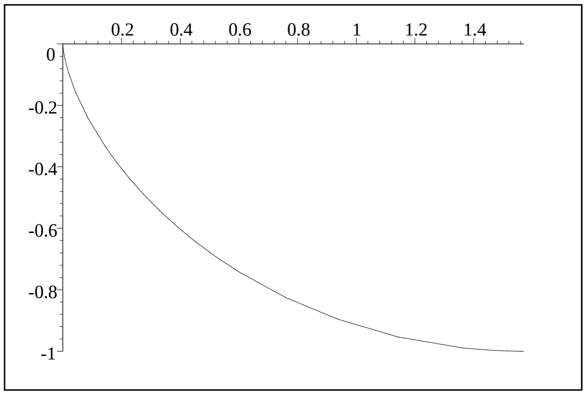
entonces

$$\begin{aligned} x &= \int \frac{1}{gH^2}\frac{\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2\theta} - 1}} d\theta \\ &= \frac{1}{gH^2}\int \sin^2\theta d\theta \end{aligned}$$

finalmente, la ecuación paramétrica de la curva es

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2gH^2}\sin^2\theta, \\ x &= \frac{1}{2gH^2}(\theta - \cos\theta\sin\theta). \end{aligned}$$

Mediante parametric Plot de mapple, ploteamos $\begin{matrix}(\theta - \cos\theta \sin\theta) \\ -\sin^2\theta\end{matrix}$



▲

Problema 5.11.3 *Determine la ecuaión de la curva que tiene la mínima longitud entre x_1 e x_2.*

Solución. La longitud de la curca ("la acción") será

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

El "lagrangiano"$L = \sqrt{1 + (y'(x))^2}$ no depende de y luego se conserva o es constante

$$p = \frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}$$

$$y'(x) = \text{constante}.$$

O sea se trata de la línea recta. Esa distancia mínima será

$$S(y_2, y_1, x_2, x_1) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

▲

Problema 5.11.4 *Con relación al problema anterior verifique las ecuaciones (5.4, 5.5, 5.6 y 5.7)*

Solución. En notación puramente matemática esas ecuaciones son

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S(y_2, y_1, x_2, x_1)}{\partial y_2} &= p(x_2), && (5.50)\\
\frac{\partial S(y_2, y_1, x_2, x_1)}{\partial y_1} &= -p(x_1) && (5.51)\\
\frac{dS(y_2, y_1, x_2, x_1)}{dx_2} &= L(y(x_2), y'(x_2)), && (5.52)\\
\frac{dS(y_2, y_1, x_2, x_1)}{dx_1} &= -L(y(x_1), y'(x_1)). && (5.53)
\end{aligned}$$

y podemos calcular

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S(y_2, y_1, x_2, x_1)}{\partial y_2} &= \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}, && (5.54)\\
\frac{\partial S(y_2, y_1, x_2, x_1)}{\partial y_1} &= -\frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} && (5.55)\\
\frac{dS(y_2, y_1, x_2, x_1)}{dx_2} &= \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} + && (5.56)\\
&\quad \frac{(y_2 - y_1)y'(x_2)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} && (5.57)\\
\frac{dS(y_2, y_1, x_2, x_1)}{dx_1} &= -\frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} && (5.58)\\
&\quad -\frac{(y_2 - y_1)y'(x_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} && (5.59)
\end{aligned}$$

▲

$$\begin{aligned}
p(x_2) &= \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}, && (5.60)\\
-p(x_1) &= -\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} && (5.61)\\
L(y(x_2), y'(x_2)) &= \sqrt{1 + (y')^2} && (5.62)\\
-L(y(x_1), y'(x_1)) &= -\sqrt{1 + (y')^2}. && (5.63)
\end{aligned}$$

Verifique las igualdades considerando que

$$y' = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Por ejemplo

$$\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = \frac{\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{\sqrt{1+(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1})^2}} = \frac{y_2-y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}.$$

Problema 5.11.5