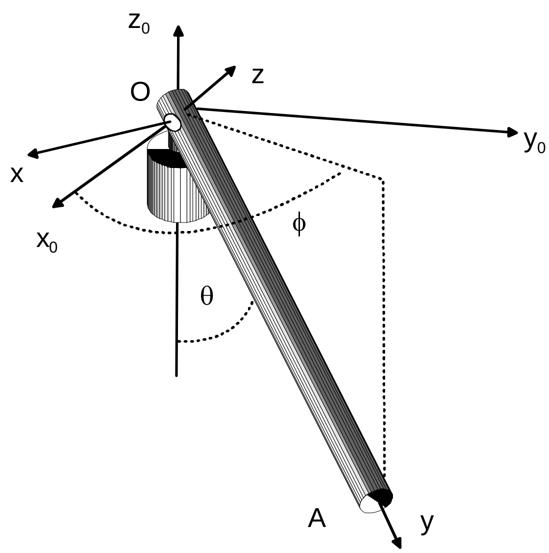
- PROBLEMA 3



La barra OA indicada en la figuraestá unida a un dispositivo en O que le permite cambiar libremente los ángulos de inclinación respecto a la vertical z_0 y el ángulo ϕ de su proyección sobre el plano horizontal x_0y_0. Los ejes $Oxyz$ son ejes principales de inercia en O, y a lo largo de la barra, xy perpendiculares a la barra en A y el eje x horizontal.

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{\imath} + \dot{\phi}(\sin\theta\hat{k} - \cos\theta\hat{\jmath})$$

$$I_{xx} = I_{zz} = \frac{1}{3}ML^2, \quad I_{yy} = 0$$

La energía cinética es

$$K = \frac{1}{2}I_{xx}\omega_x^2 + \frac{1}{2}I_{yy}\omega_y^2 + \frac{1}{2}I_{zz}\omega_z^2$$

así resulta el Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}\frac{1}{3}ML^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{3}ML^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta + Mg\frac{L}{2}\cos\theta$$

y ecuaciones de Lagrange

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{3}ML^2\ddot{\theta} - \frac{1}{3}Ml^2\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta + Mg\frac{l}{2}\sin\theta \\ 0 &= \frac{1}{3}ML^2\ddot{\phi}\sin^2\theta + \frac{2}{3}ML^2\dot{\phi}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta \qquad \text{(a) 2p)} \end{aligned}$$

Cantidades conservadas

$$\begin{aligned} H &= E = \frac{1}{2}\frac{1}{3}ML^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{3}ML^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta - Mg\frac{L}{2}\cos\theta \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{3}ML^2\Omega^2 \\ p_\phi &= \frac{1}{3}ML^2\dot{\phi}\sin^2\theta = \frac{1}{3}ML^2\Omega \qquad \text{(b) 2p)} \end{aligned}$$

simplificando la ecuación de conservación de energía

$$\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta - \frac{3g}{L}\cos\theta = \Omega^2$$

eliminando $\dot{\phi}$

$$\dot{\phi} = \frac{\Omega}{\sin^2\theta}$$

$$\dot{\theta}^2 = -\Omega^2\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} + \frac{3g}{L}\cos\theta$$

Puntos de retorno

$$\dot{\theta} = 0 \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{2} \qquad \text{(c) 1p)}$$

y el otro satisface

$$\Omega^2\cos\theta = \frac{3g}{L}(1-\cos^2\theta)$$

cuyas raíces son

$$\cos\theta = \frac{\Omega^2 L}{6g}\left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{36g^2}{\Omega^4L^2}}\right)$$

sea

$$p = \frac{\Omega^2 L}{6g}$$

$$\cos\theta = -p \pm \sqrt{p^2+1}$$

el signo $-$ no sirve

$$\begin{aligned} \cos\theta_2 &= \sqrt{p^2+1} - p > 0 \qquad \text{(c) 1p)} \\ \theta_2 &< \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

0.1 Usando origen en G

Tambien puede hacerse usando origen en G, pero los momentos de inercia son otros

$$I_{xx} = I_{zz} = \frac{1}{12}ML^2, \quad I_{yy} = 0$$

y además

$$v_G^2 = \frac{L^2}{4}\dot{\theta}^2 + \frac{L^2\sin^2\theta}{4}\dot{\phi}^2$$

de manera que la energía cinética es

$$K = \frac{1}{2}M(\frac{L^2}{4}\dot{\theta}^2 + \frac{L^2 \sin^2\theta}{4}\dot{\phi}^2) + \frac{1}{2}\frac{1}{12}ML^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}ML^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta$$

$$K = \frac{1}{6}ML^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{6}ML^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta$$

igual que antes y de aquí todo sigue igual...