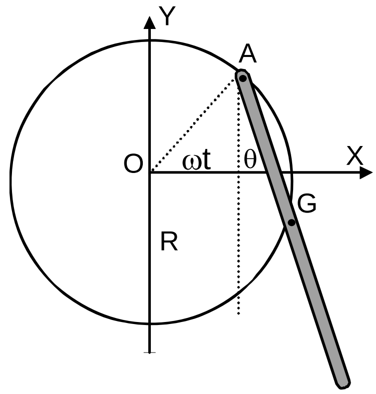
- Problema 1



Si alumno utiliza otros pasos, evalue usted más o menos de acuerdo a este método...Tenemos

$$
\begin{aligned}
x_G &= R\cos\omega t + a\sin\theta, \quad y_G = R\sin\omega t - a\cos\theta \\
\dot{x}_G &= -R\omega\sin\omega t + a\dot{\theta}\cos\theta, \quad \dot{y}_G = R\omega\cos\omega t + a\dot{\theta}\sin\theta \\
L &= \frac{1}{2}M(R^2\omega^2 - 2R\omega a\dot{\theta}\sin\omega t\cos\theta + 2R\omega a\dot{\theta}\cos\omega t\sin\theta + a^2\dot{\theta}^2) \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{1}{3}Ma^2\dot{\theta}^2 - mgR(R\sin\omega t - a\cos\theta).
\end{aligned}
$$

Omitiendo términos constantes o funciones de sólo el tiempo

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{2}{3}Ma^2\dot{\theta}^2 - MR\omega a\dot{\theta}\sin(\omega t-\theta) + MgRa\cos\theta \\
p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = \frac{4}{3}Ma^2\dot{\theta} - MR\omega a\sin(\omega t-\theta)
\end{aligned}
$$

Ecuación de Lagrange

$$
\frac{4}{3}Ma^2\ddot{\theta} - MR\omega a\frac{d}{dt}\sin(\omega t-\theta) - MR\omega a\dot{\theta}\cos(\omega t-\theta) + MgRa\sin\theta = 0
$$

o sea

$$
\frac{4}{3}a\ddot{\theta} - R\omega^2\cos(\omega t-\theta) + gR\sin\theta = 0 \qquad \text{(a) 3p)}
$$

Para construir las ecuaciones de Hamilton

$$
\begin{aligned}
H &= p_\theta\dot{\theta} - L = \frac{2}{3}Ma^2\dot{\theta}^2 - MgRa\cos\theta \\
p_\theta &= \frac{4}{3}Ma^2\dot{\theta} - MR\omega a\sin(\omega t-\theta) \\
H &= \frac{3}{8Ma^2}(p_\theta + MR\omega a\sin(\omega t-\theta))^2 - MgRa\cos\theta
\end{aligned}
$$

$$
H = \frac{3}{8Ma^2}(p_\theta + MR\omega a\sin(\omega t-\theta))^2 - MgRa\cos\theta
$$

$$\begin{aligned}
\dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{3}{4Ma^2}(p_\theta + MR\omega a \sin(\omega t - \theta)) \\
\dot{p}_\theta &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{3R\omega}{4a}(p_\theta + MR\omega a \sin(\omega t - \theta))\cos(\omega t - \theta)(\text{b) 3p)} \\
& -MgRa\sin\theta
\end{aligned}$$

- PROBLEMA 2 Un trompo con A, C, m, g, h dados se coloca en movimiento con las condiciones iniciales

$$\begin{aligned}
\theta(0) &= \pi/2, \quad \dot{\theta}(0) = \omega, \quad \dot{\phi}(0) = \sqrt{\frac{g}{h}}, \quad s = 2\sqrt{\frac{g}{h}} \\
A &= mh^2, \quad C = 2mh^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha &= A\dot{\phi}\sin^2\theta + Cs\cos\theta = A\sqrt{\frac{g}{h}} = mh^2\sqrt{\frac{g}{h}} \\
2E - Cs^2 &= A\dot{\phi}^2\sin^2\theta + A\dot{\theta}^2 + 2mgh\cos\theta = A\frac{g}{h} = mgh
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
f(u) &= (2E - Cs^2 - 2mghu)\frac{1-u^2}{A} - \left(\frac{\alpha - Csu}{A}\right)^2 \\
&= \frac{g}{h}(1-2u)(1-u^2) - \frac{g}{h}(1-4u)^2 \\
&= \frac{g}{h}u(-17u + 6 + 2u^2)
\end{aligned}$$

cuyas raíces son

$$\begin{aligned}
u_1 &= 0, \quad \theta_1 = \pi/2 = 90^o \\
u_2 &= \frac{17}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{241} = 0.369, \quad \theta_2 = 1.19 \text{ rad} = 68.2^o
\end{aligned}$$

La precesión $\dot{\phi}$ es

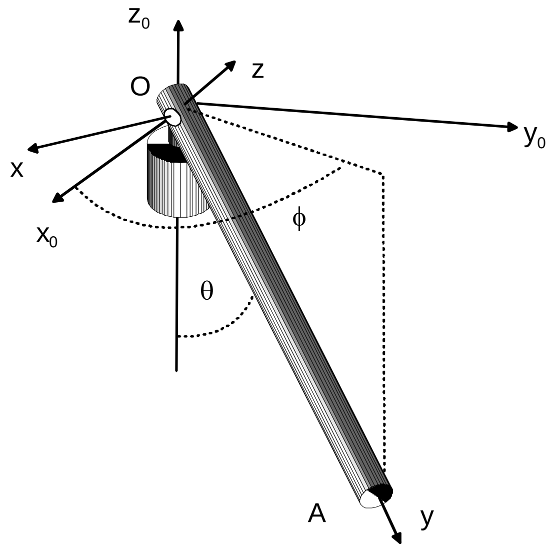
$$\dot{\phi} = \frac{1 - 4\cos\theta}{\sin^2\theta}\sqrt{\frac{g}{h}}$$

$$\frac{d}{d\theta}\frac{1-4\cos\theta}{\sin^2\theta} = -2\frac{-\cos\theta + 2\cos^2\theta + 2}{\sin^3\theta}$$

no tiene raíces reales, luego el máximo ocurre en uno de los extremos. Es fácil ver que el máximo ocurre en $\theta_1 = \pi/2 = 90^o$ y su magnitud es

$$\dot{\phi}_{\max} = \sqrt{\frac{g}{h}}$$

- PROBLEMA 3



La barra OA indicada en la figuraestá unida a un dispositivo en O que le permite cambiar libremente los ángulos de inclinación respecto a la vertical z_0 y el ángulo ϕ de su proyección sobre el plano horizontal x_0y_0. Los ejes $Oxyz$ son ejes principales de inercia en O, y a lo largo de la barra, xy perpendiculares a la barra en A y el eje x horizontal.

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{\imath} + \dot{\phi}(\sin\theta\hat{k} - \cos\theta\hat{\jmath})$$

$$I_{xx} = I_{zz} = \frac{1}{3}ML^2, \quad I_{yy} = 0$$

La energía cinética es

$$K = \frac{1}{2}I_{xx}\omega_x^2 + \frac{1}{2}I_{yy}\omega_y^2 + \frac{1}{2}I_{zz}\omega_z^2$$

así resulta el Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}\frac{1}{3}ML^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{3}ML^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta + Mg\frac{L}{2}\cos\theta$$

y ecuaciones de Lagrange

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{3}ML^2\ddot{\theta} - \frac{1}{3}Ml^2\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta + Mg\frac{l}{2}\sin\theta \\ 0 &= \frac{1}{3}ML^2\ddot{\phi}\sin^2\theta + \frac{2}{3}ML^2\dot{\phi}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta \qquad \text{(a) 2p)} \end{aligned}$$

Cantidades conservadas

$$\begin{aligned}
H &= E = \frac{1}{2}\frac{1}{3}ML^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{3}ML^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta - Mg\frac{L}{2}\cos\theta \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{3}ML^2\Omega^2 \\
p_\phi &= \frac{1}{3}ML^2\dot{\phi}\sin^2\theta = \frac{1}{3}ML^2\Omega \qquad \text{(b) 2p)}
\end{aligned}$$

simplificando la ecuación de conservación de energía

$$\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta - \frac{3g}{L}\cos\theta = \Omega^2$$

eliminando $\dot{\phi}$

$$\dot{\phi} = \frac{\Omega}{\sin^2\theta}$$

$$\dot{\theta}^2 = -\Omega^2\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} + \frac{3g}{L}\cos\theta$$

Puntos de retorno

$$\dot{\theta} = 0 \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{2} \qquad \text{(c) 1p)}$$

y el otro satisface

$$\Omega^2\cos\theta = \frac{3g}{L}(1-\cos^2\theta)$$

cuyas raíces son

$$\cos\theta = \frac{\Omega^2 L}{6g}\left(-1 \pm \sqrt{1+\frac{36g^2}{\Omega^4L^2}}\right)$$

sea

$$p = \frac{\Omega^2 L}{6g}$$

$$\cos\theta = -p \pm \sqrt{p^2+1}$$

el signo $-$ no sirve

$$\begin{aligned}
\cos\theta_2 &= \sqrt{p^2+1} - p > 0 \qquad \text{(c) 1p)} \\
\theta_2 &< \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$