Auxiliar #1

Conceptos Generales

- **Vínculos Holonómicos** (Constricciones): Son relaciones entre las posiciones (y posiblemente entre las velocidades [no-holonómicas]) de las partículas del sistema; también pueden ser vistas como las "restricciones" del movimientos que tienen las partículas.

$$C_i(\vec{r}^j) = 0 \tag{1}$$

  $i = 1, \ldots, A$, si hay A restricciones; $j = N$, siendo N el número de dimensiones del sistema.

  Ejemplos

  1. Una partícula se mueve en una mesa, que está a una altura a del piso, entonces

$$C_1(x, y, z) = 0$$
$$z = a \Rightarrow z - a = 0$$

  2. Una partícula se mueve en una superficie que se oscila verticalmente con frecuencia ω, entonces,

$$C_1(x, y, z) = 0$$
$$\dot{z} = \cos(\omega t) \Rightarrow z = \sin(\omega t) + D$$

- **Coordenadas Generalizadas** (Grados de Libertad del Sistema): Son las coordenadas independientes necesarias para describir el movimiento. En general, si hay N partículas y A constricciones, entonces hay $3N - A$ grados de libertad.

- **Ecuaciones de Euler-Lagrange**: Sea una acción del tipo

$$s = \int L(q^i, \dot{q}^i) dt$$

  entonces, al extremar la acción se encuentran las ecuaciones del Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0 \tag{2}$$

Si el sistema cuenta con constricciones, al utilizar multiplicadores de Lagrange se pueden encontrar las fuerzas relacionadas a las constricciones:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = F_i^{NC} + \lambda_k \frac{\partial C^k}{\partial x^i} \tag{3}$$

En el caso de haber fuerzas disipativas,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = F_j^{Dis} \frac{\partial \hat{e}^j}{\partial x^i} \tag{4}$$

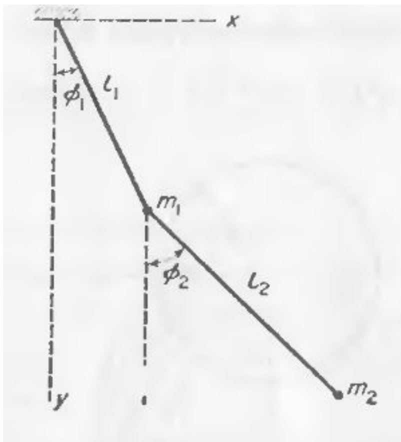
Siendo $\hat{e}^j$ la dirección de la fuerza disipativa.

El lagrangeano general para mecánica clásica es

$$L = \frac{1}{2} m_i v_i^2 - U = T - U \tag{5}$$

Ejercicios

1. Péndulo doble



Lo primero es definir las coordenadas generalizadas, lo que es simple si se eligen las coordenadas adecuadas: polares. Luego vienen las constricciones del sistema (este paso se puede omitir con la práctica): como todo se desarrolla en un plano $z_1 = z_2 = 0$, además, las cuerdas son de largo fijo, $r_1 = l_1$, $r_2 = l_2$, o sea, las únicas coordenadas generalizadas son ϕ_1 y ϕ_2.

Ahora hay que determinar T y U:

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

el valor de v_1 es conocido: $v_1 = l_1^2 \dot{\phi}_1^2$, pero el valor de v_2 es más complicado:

$$
\begin{aligned}
v_2^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \\
x &= l_1 \cos\phi_1 + l_2 \cos\phi_2 \\
-\dot{x} &= l_1\dot{\phi}_1 \sin\phi_1 + l_2\dot{\phi}_2 \sin\phi_2 \qquad (6) \\
y &= l_1 \sin\phi_1 + l_2 \sin\phi_2 \\
\dot{y} &= l_1\dot{\phi}_1 \cos\phi_1 + l_2\dot{\phi}_2 \cos\phi_2 \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Usando (6) y (7), usando propiedades trigonométricas se encuentra T:

$$
T = \frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(l_1^2\dot{\phi}_1^2 + l_2^2\dot{\phi}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2\cos(\phi_1-\phi_2)\right) \qquad (8)
$$

También es fácil de encontrar U:

$$
U = -m_1gl_1\cos\phi_1 - m_2g(l_1\cos\phi_1 + l_2\cos\phi_2) \qquad (9)
$$

Ahora utilizando (9), (8), (5):

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(l_1^2\dot{\phi}_1^2 + l_2^2\dot{\phi}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2\cos(\phi_1-\phi_2)\right) \\
&\quad + m_1gl_1\cos\phi_1 + m_2g(l_1\cos\phi_1 + l_2\cos\phi_2)
\end{aligned}
$$

Las ecuaciones de movimiento son, usando (2):

$$
\begin{aligned}
0 &= (m_1+m_2)\ddot{\phi}_1 l_1 + m_2l_2\ddot{\phi}_2\cos(\phi_1-\phi_2) - m_2l_2\dot{\phi}_2^2\sin(\phi_1-\phi_2) \\
&\quad + m_1l_2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2\sin(\phi_1-\phi_2) + (m_1+m_2)g\sin\phi_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &= m_2l_2\ddot{\phi}_2 + m_2l_1\ddot{\phi}_1\cos(\phi_1-\phi_2) - m_2l_1\dot{\phi}_1^2\sin(\phi_1-\phi_2) \\
&\quad + m_2g\sin\phi_1 = 0
\end{aligned}
$$

2. No unicidad del Lagrangeano

   Demuestre que si consideramos 2 lagrangeanos que difieren solo por una suma de una derivada total con respecto al tiempo,

   $$
   \bar{L}(q^i,\dot{q}^i,t) = L(q^i,\dot{q}^i,t) + \frac{d}{dt}f(q^i,\dot{q}^i,t)
   $$

   ambos lagrangeanos describen las mismas ecuaciones de movimiento.

   Solución:

   Esto resulta directo si se utiliza el principio de mínima acción. Sean $\bar{S}$ y S las acciones, entonces:

   $$
   \begin{aligned}
   \int_{q_1}^{q_2}\bar{L}(q^i,\dot{q}^i,t)dt &= \int_{q_1}^{q_2}L(q^i,\dot{q}^i,t)dt + \int_{q_1}^{q_2}\frac{d}{dt}f(q^i,\dot{q}^i,t)dt \\
   \bar{S} &= S + f(q_2,\dot{q}_2,t) - f(q_1,\dot{q}_1,t)
   \end{aligned}
   $$

   El termino extra es una constante, entonces, al extremar, esta se hace 0, por lo tanto, $\bar{L}$ y L expresan las mismas ecuaciones de movimiento

3. Sea una masa m_1 que se desliza sobre una superficie sin roce, atado a un resorte, y que del otro extremo cuelga un péndulo de masa m_2 de largo l, encuentre las ecuaciones de movimiento,

   Solución:

   Como ya se hizo anteriormente, es más fácil ocupar cartesianas para expresar el movimiento del péndulo:

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) \\
x_1 &= x + l\sin\theta \\
\dot{x}_1 &= \dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta \\
y_1 &= l\cos\theta \\
\dot{y}_1 &= -l\dot{\theta}\sin\theta \\
\Rightarrow T &= \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta) \\
U &= \frac{1}{2}kx^2 - mgl\cos\theta
\end{aligned}
$$

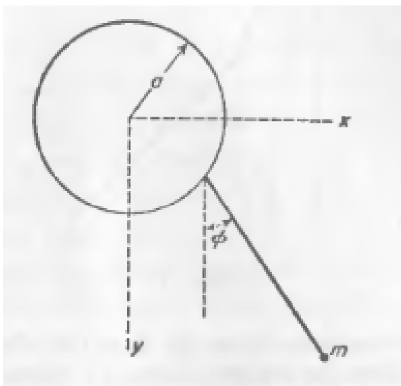
   Usando (5),

$$
L = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta) - \frac{1}{2}kx^2 + mgl\cos\theta
$$

   Usando (2) se pueden obtener las ecuaciones de movimiento:

$$
\begin{aligned}
(m_1+m_2)\ddot{x} + m_2l\ddot{\theta}\cos\theta - m_2l\dot{\theta}^2\sin\theta + kx = 0 \\
m_2\ddot{x}\cos\theta - m_2\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + m_2l\ddot{\theta} + m_2\dot{\theta}\dot{x}\sin\theta + mg\sin\theta = 0
\end{aligned}
$$

4. Un péndulo plano se desplaza uniformemente con la base sujeta a una circunferencia que rota con una frecuencia γ



   Grados de libertad: 1 ϕ

   Como en el caso del péndulo doble es más fácil descomponer el caso en coordenadas cartesianas, que a la larga dejarán el sistema en función de ϕ:

$$x = a\cos(\gamma t) + l\sin\phi \qquad y = -a\sin(\gamma t) + l\cos\phi$$

Con esto, s puede calcular el valor de L:

$$L = \frac{1}{2}m(l^2\dot{\phi}^2 + a^2\gamma^2 + 2la\dot{\phi}\gamma\sin(\phi - \gamma t)) + mg(l\cos\phi - a\sin(\gamma t))$$

Pero, como ya vimos, uno puede eliminar las derivadas totales con respecto al tiempo, además, también se pueden eliminar las funciones que sólo dependen del tiempo y las constantes, entonces, un lagrangeano equivalente pero más simple es:

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 + mla\gamma^2\sin(\phi - \gamma t) + mlg\cos\phi$$

Con esto la ecuación de movimiento resulta ser

$$ml\ddot{\phi} + ma\gamma^2\cos(\phi - \gamma t) + mg\sin\phi = 0$$