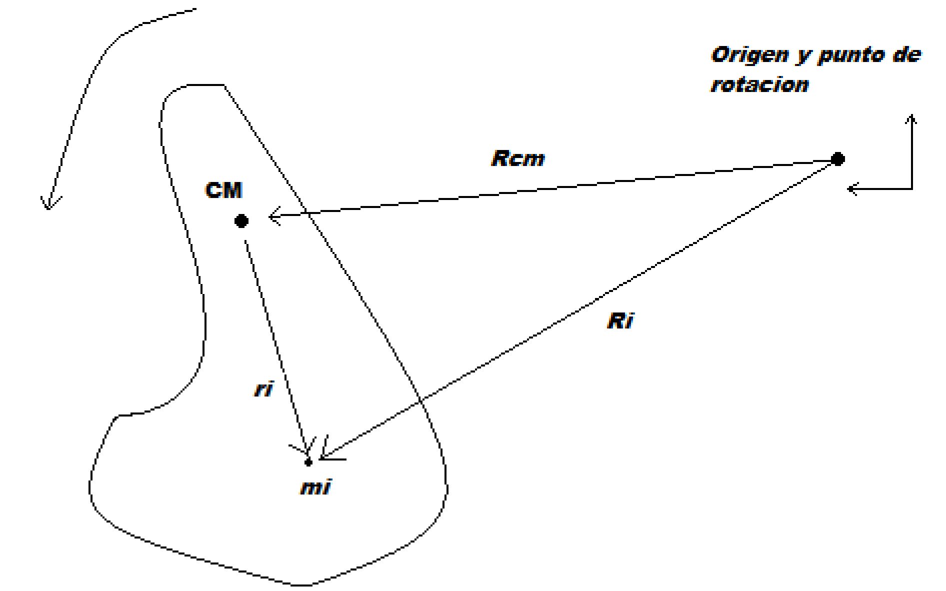
Pauta Clase Auxiliar Sistemas Newtonianos
Sección 3
21/04/2008

Problema 1



Del diagrama se tiene la relación:

$$R_i = R_{CM} + r_i$$

Asumimos el origen del sistema de referencia en el punto de rotación del cuerpo por comodidad.

Luego por la definición de momento de inercia se tiene lo siguiente:

$$I_o = \sum R_i^2 \cdot m_i = \sum \left(R_{cm} + r_i\right)^2 \cdot m_i = \sum \left(R_{cm}^{\ 2} + 2 \cdot R_{cm} \cdot r_i + r_i^{\ 2}\right) \cdot m_i$$
$$= \sum R_{cm}^{\ 2} \cdot m_i + \sum 2 \cdot R_{cm} \cdot r_i \cdot m_i + \sum r_i^2 \cdot m_i = R_{cm}^{\ 2} \cdot \sum m_i + 2 \cdot R_{cm} \cdot \sum r_i \cdot m_i + \sum r_i^2 \cdot m_i$$

El primer término de esta expresión corresponde a la masa total del cuerpo mientras que el último corresponde al momento de inercia con respecto al centro de masa por lo tanto realizamos el siguiente reemplazo:

$$M = \sum m_i \ \text{ y } \ I_{cm} = \sum r_i^2 \cdot m_i$$

Se obtiene la siguiente expresión:

$$I_o = R_{cm}{}^2 \cdot M + 2 \cdot R_{cm} \cdot \sum r_i \cdot m_i + I_{cm}$$

Claramente el primer y último término corresponden a la expresión de Steinner, luego analizamos el segundo término.

Por definición de centro de masa se tiene:

$$R_{cm} = \frac{\sum m_i \cdot R_i}{\sum m_i}$$

Reemplazamos por la relación del principio: $R_i = R_{CM} + r_i$

Se obtiene:

$$R_{cm} = \frac{\sum m_i \cdot R_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \cdot \left(R_{cm} + r_i\right)}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \cdot R_{cm}}{\sum m_i} + \frac{\sum m_i \cdot r_i}{\sum m_i} = R_{cm} \cdot \frac{\sum m_i}{\sum m_i} + \frac{\sum m_i \cdot r_i}{\sum m_i} = R_{cm} + \frac{\sum m_i \cdot r_i}{\sum m_i}$$

$$\rightarrow R_{cm} = R_{cm} + \frac{\sum m_i \cdot r_i}{\sum m_i} \rightarrow R_{cm} - R_{cm} = \frac{\sum m_i \cdot r_i}{\sum m_i} \rightarrow \frac{\sum m_i \cdot r_i}{\sum m_i} = 0 \rightarrow \sum m_i \cdot r_i = 0$$

Luego el segundo termino de la expresión $I_o = R_{cm}{}^2 \cdot M + 2 \cdot R_{cm} \cdot \sum r_i \cdot m_i + I_{cm}$ queda como: $2 \cdot R_{cm} \cdot \sum r_i \cdot m_i = 2 \cdot R_{cm} \cdot 0 = 0$ con lo que se obtiene:

$$I_o = R_{cm}{}^2 \cdot M + I_{cm}$$

Que es la expresión para Steinner.

Problema 2

a)

Para la energía cinética inicial se tiene:

$$K = \frac{1}{2} M \cdot v_o{}^2 + \frac{1}{2} I_c \cdot \omega_o{}^2$$ Para esto usamos la expresión $$v_o = \omega_o \cdot R$$

Así queda $$K = \frac{1}{2} M \cdot v_o{}^2 + \frac{1}{2} I_c \cdot \omega_o{}^2 = \frac{1}{2} M \cdot v_o{}^2 + \frac{1}{2} I_c \cdot \left(\frac{v_o}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(M + \frac{I_c}{R^2}\right) \cdot v_o{}^2$$

Como el sistema se frena hasta el reposo producto del roce la energía cinética se disipa en trabajo realizado por la fuerza de roce F_r.

$$W = F_r \cdot d = \left(\mu \cdot \frac{M}{2} \cdot g\right) \cdot d$$

Luego por conservación de energía el trabajo debe ser igual a la energía cinética.

$$K = W \rightarrow \frac{1}{2}\left(M + \frac{I_c}{R^2}\right) \cdot v_o{}^2 = \left(\mu \cdot \frac{M}{2} \cdot g\right) \cdot d \rightarrow d = \frac{\left(M \cdot R^2 + I_c\right) \cdot v_o{}^2}{\mu \cdot M \cdot g \cdot R^2}$$

Donde *d* corresponde a la distancia que recorrió el cuerpo hasta detenerse.

b)

La energía cinética inicial ahora es:

$$K = \frac{1}{2} M \cdot v_o{}^2$$

Y el trabajo es:

$$W = F_r \cdot d = \left(\mu \cdot M \cdot g\right) \cdot d$$

Igualando se obtiene:

$$K = W \rightarrow \frac{1}{2} M \cdot v_o{}^2 = \left(\mu \cdot M \cdot g\right) \cdot d \rightarrow d = \frac{v_o{}^2}{2 \cdot \mu \cdot g}$$

Donde *d* es la nueva distancia.

Problema 3

a)

$$I = 0 \cdot m + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot L \right)^2 \cdot m + 0 \cdot m + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot L \right)^2 \cdot m = 2 \cdot \frac{2}{4} \cdot L^2 \cdot m = m \cdot L^2$$

b)

$$I = \left(\frac{L}{2} \right)^2 \cdot m + \left(\frac{L}{2} \right)^2 \cdot m + \left(\frac{L}{2} \right)^2 \cdot m + \left(\frac{L}{2} \right)^2 \cdot m = 4 \cdot \frac{L^2}{4} \cdot m = m \cdot L^2$$

Problema 4

Usando Steinner

$$I = \frac{1}{2} M \cdot R^2 + M \cdot R^2 = \frac{3}{2} M \cdot R^2$$

Se tiene la relación:

$$\omega_o = \frac{v_o}{R}$$

Luego la energía cinética es:

$$K = \frac{1}{2} I \cdot \omega_o{}^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} M \cdot R^2 \right) \cdot \left(\frac{v_o{}^2}{R^2} \right) = \frac{3}{4} M \cdot v_o{}^2$$

La energía potencial se transforma en energía potencial la cual es al final:

$$U = M \cdot g \cdot R$$

Igualando energías:

$$K = U \rightarrow M \cdot g \cdot R = \frac{3}{4} \cdot M \cdot v_o{}^2$$

La velocidad inicial es:

$$v_o = \sqrt{\frac{4}{3} g \cdot R}$$

Problema 5

En un comienzo solo hay energía potencial elástica que cuando alcance el largo natural se convertirá completamente en engría cinética.

La energía potencial esta dada por:

$U = \frac{1}{2} k \cdot \Delta x$ Y para este caso queda como $U = \frac{1}{2} k \cdot D$

El momento de inercia es: $I = \frac{1}{2} M \cdot R^2$ por lo tanto la energía cinética final queda:

$$K = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} M \cdot R^2\right) \cdot \omega^2$$

Se igualan las energías para obtener la velocidad angular:

$$U = K \rightarrow \frac{1}{2} k \cdot D = \frac{1}{4} M \cdot R^2 \cdot \omega^2 \rightarrow \omega^2 = \frac{2 \cdot k \cdot D^2}{M \cdot R^2} \rightarrow \omega = \frac{D}{R}\sqrt{\frac{2 \cdot k}{M}}$$

Problema 6

Sea el momento de inercia conocido para un cubo girando en torno a su centro de masa:

$I_{cm} = \frac{1}{6} M \cdot L^2$ Se debe usar Steinner para obtener el momento de inercia con respecto a una de sus aristas:

$$I = \frac{1}{6} M \cdot L^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} L\right)^2 \cdot M = \frac{2}{3} M \cdot L^2$$

Para obtener la velocidad angular con que debe ser lanzado para que no se de vuelta se deben igualar las energías de modo que el centro de masa no pase el eje vertical en el tope. El caso limite de esto es que la velocidad, y por lo tanto la energía cinética, sea cero cuando el CM se encuentra en el punto mas alto, o sea en el eje vertical.

La energía inicial es:

$E_o = \frac{1}{2} I \cdot \omega_o^2 + m \cdot g \cdot \frac{L}{2}$ Y la energía final esta dada solo por la energía potencial

O sea $E_f = m \cdot g \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} L\right)$ igualando las energías se tiene:

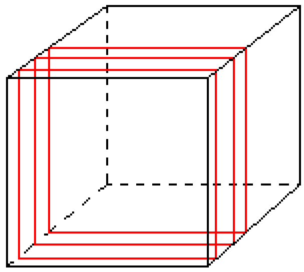
$$E_o = E_f \rightarrow \frac{1}{2} I \cdot \omega_o^{\ 2} + m \cdot g \cdot \frac{L}{2} = m \cdot g \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} L \right) \rightarrow \omega_o^{\ 2} = 8 \cdot \left(\sqrt{2} - 1 \right) \cdot g \cdot L$$

$$\rightarrow \omega_o = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\left(\sqrt{2} - 1 \right)} \cdot \sqrt{g \cdot L}$$

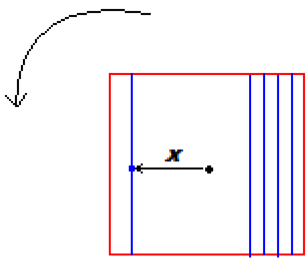
Anexo

Calculo del momento de inercia de un cubo de masa M y aristas L en torno a su centro:

Asumimos el cubo como la composición del cubo como muchos cuadrados que a la vez están compuestos de muchas barras lineales cuyo momento de inercia es conocido.



De esta forma el cubo de la figura esta compuesto por muchos cuadrados representados en la figura con color rojo.



A su vez cada cuadrado esta dividido en muchas líneas que están representadas en azul en la figura, estas lineas se encuentran a una distancia x del centro sobre el cual rotan los cuadrados.

La densidad para cada barra seria:

$\rho_b = \frac{M}{L^2}$ Esto pues primero consideramos al cubo como composición de muchos cuadrados de densidad $\rho_{cuadrado} = \frac{M}{L}$ y luego cada cuadrado esta compuesto por barras de densidad $\rho_b = \frac{\rho_{cuadrado}}{L} = \frac{M}{L^2}$

Luego cada barra esta girando a una distancia x del centro para lo cual se usa Steinner y el momento de inercia de cada barra queda:

$$I = \frac{1}{12} \rho_b \cdot L^2 + \rho_b \cdot x^2 = \frac{1}{12} \left(\frac{M}{L^2} \right) \cdot L^2 + \left(\frac{M}{L^2} \right) \cdot x^2 = \frac{M}{12} + \left(\frac{M}{L^2} \right) \cdot x^2$$

Para uno de los cuadrados que componen el cubo el momento de inercia esta dado por la suma infinitesimal de cada barra o sea queda:

$$I_{cuadrado} = \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{M}{12} + \left(\frac{M}{L^2} \right) \cdot x^2 \right) dx$$

$$= \frac{M}{12} \int_{-L/2}^{L/2} dx + \frac{M}{L^2} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \frac{M}{12} \cdot x \Big|_{-L/2}^{L/2} + \frac{M}{L^2} \frac{1}{3} \cdot x^3 \Big|_{-L/2}^{L/2}$$

$$= \frac{M}{12} \cdot \left(\frac{L}{2} + \frac{L}{2} \right) + \frac{M}{L^2} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{L}{2}^3 + \frac{L}{2}^3 \right) = \frac{M \cdot L}{12} + \frac{M \cdot L}{12} = \frac{1}{6} M \cdot L$$

$$I_{cuadrado} = \frac{1}{6} M \cdot L$$

Pero lo que se desea es el momento de inercia del cubo, y este sería la suma de todos los momentos de inercia de los cuadrados que lo componen, es decir:

$$I_{cubo} = \int_0^l \left(I_{cuadrado} \right) dx = \int_0^l \left(\frac{1}{6} M \cdot L \right) dx = \left(\frac{1}{6} M \cdot L \right) \int_0^l dx = \left(\frac{1}{6} M \cdot L \right) \cdot L = \frac{1}{6} M \cdot L^2$$

Luego este es el momento deseado.