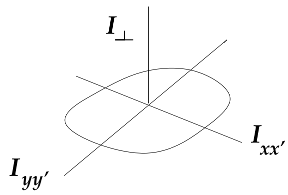
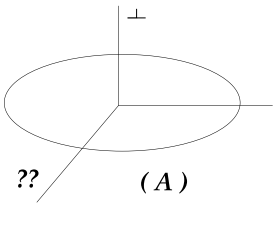
FI1A2 - SISTEMAS NEWTONIANOS
Semestre 2008-1
Unidad 4B: *Addendum*: Teorema de los ejes perpendiculares
Por: Hugo F. Arellano

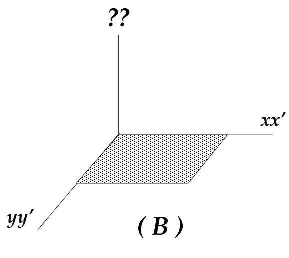
Departamento de Física
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile

Para el cálculo de momentos de inercia de cuerpos planos resulta muy útil el uso del *Teorema de los Ejes Perpendiculares*. Este teorema establece que si se conoce el momento de inercia de un cuerpo a lo largo de dos ejes mutuamente perpendiculares, que llamaremos *xx'* e *yy'*, entonces el momento de inercia con respecto a un eje perpendicular a los anteriores, $I_\perp$, está dado por la suma de ellos. Simbólicamente,

$$I_\perp = I_{xx'} + I_{yy'} \ .$$





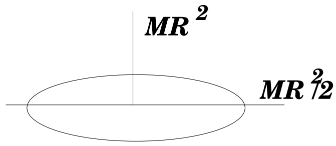


Antes de demostrar este teorema examinemos sus ventajas. Consideremos primero un aro de masa M y radio R (recuadro (A) de más arriba). Sabemos que el momento de inercia con respecto a un eje que pasa axialmente por su centro es

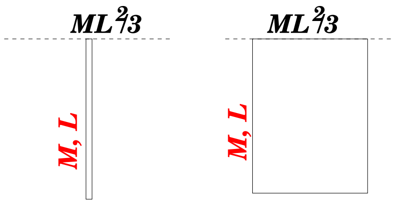
$$I_\perp = MR^2 \ .$$

Si consideramos dos ejes perpendiculares, en el plano del aro, que se cruzan mutuamente en el centro, entonces los momentos de inercia con respecto a cada uno de estos ejes será el mismo (por simetría). Llamemos a cada uno de ellos I_o. Aplicando el teorema anterior tenemos

$$MR^2 = I_\perp = I_o + I_o \quad \Rightarrow \quad I_o = MR^2/2 \ .$$



Otro ejemplo interesante es el momento de una placa uniforme de masa M, ancho a y longitud b. Sabemos que el momento de inercia de una barra de longitud L con respecto a un eje que pasa por uno de sus extremos, perpendicular a la barra, vale $ML^2/3$ (revisar Unidad 3, Sistemas Extendidos). No es difícil convencerse de que este momento de inercia es el mismo al de una puerta de longitud L, con respecto a un eje que pasa por un eje en su base (ver figura de más abajo).



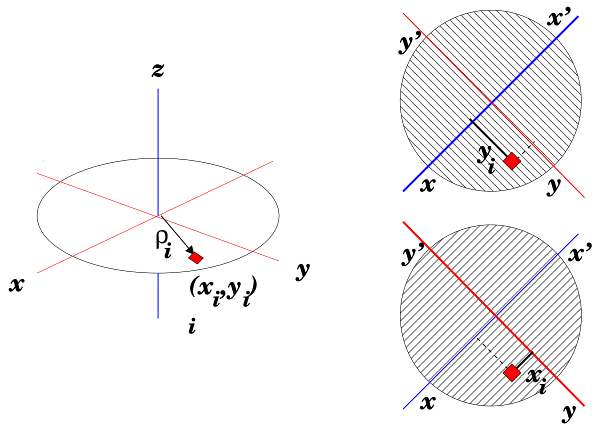
Usando el teorema de los ejes perpendiculares podemos calcular el momento de inercia con de la placa rectangular con respecto a un eje perpendicular a su plano, que pasa por una de sus esquinas. Escribimos (ver recuadro (B)) de la figura de la página anterior),

$$I_\perp = I_{xx'} + I_{yy'} = \frac{Ma^2}{3} + \frac{Mb^2}{3} \quad \rightarrow \quad I_\perp = \frac{M}{3}(a^2 + b^2) \ .$$

La demostración del Teorema de los Ejes Perpendiclares es bastante simple. Consideremos un cuerpo plano, coplanar con los ejes cartesianos x, y. El momento de inercia con respecto al eje z, perpendicular a los anteriores, esá dado por

$$I_z \equiv I_\perp = \sum_i m_i \, \rho_i^2 \ ,$$

donde m_i es la masa de la i-esima celda, distante en ρ_i al eje z.



Sin embargo, podemos escribir

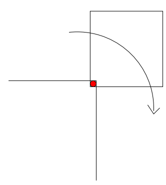
$$\rho_i^2 = x_i^2 + y_i^2 \ ,$$

lo que nos permite reescribimos la sumatoria, separándola en dos sumandos

$$I_\perp = \sum_i m_i\, x_i^2 + \sum_i m_i\, y_i^2 = I_{yy'} + I_{xx'} \ ,$$

demostrándose la propiedad. Nótese que hemos denotado $I_{xx'} = \sum_i m_i\, y_i^2$. Es un buen ejercicio convencerse de esta relación.

Abordemos un ejemplo simple. Una placa cuadrada de lados de longitud a está pivoteada en una de sus esquinas mediante un eje perpendicular al su plano. Inicialmente la placa se suelta del reposo como se indica en la figura de más abajo. Queremos saber su velocidad angular una vez que a girado en 90 grados.



Conservación de energía implica $(K+U_g)_A = (K+U_g)_B$, donde A indica configuración inicial y B la final. Así,

- En el estado A, $K = 0$ y $U_g = Mga/2$.
- En el estado B: $K = (1/2)I\omega^2$ y $U_g = -Mg/2$.
- El momento de inercia en este caso resulta $I = 2Ma^2/3$, con lo cual,

$$\omega^2 = 3g/a \ .$$