

Corrección de la experiencia 1 de la práctica de la unidad 1

Al explicar el problema de la práctica 1 de la primera unidad, cometí un error bastante básico: la normal $\vec{N} = N\hat{y}$ depende de la posición x de la masa, es decir $N = mg$ no es correcto. Como el resorte tiene una componente hacia arriba, entonces esto disminuye la normal. Aquí va el desarrollo correcto de este problema. En todo caso las correcciones del Control de Lectura y del Informe considerarán como correcto el haber asumido $N = mg$.

Llamemos α el ángulo que forma el resorte con el piso rugoso. La ecuación de Newton en la dirección vertical ($\hat{y}$) es

$$m\ddot{y} = 0 = N + F_E \cdot \sin(\alpha) - mg,$$

donde $\sin(\alpha) = L/\sqrt{x^2 + L^2}$ y la fuerza elástica del resorte es $F_E = k(\sqrt{x^2 + L^2} - L)$. Luego

$$N = mg - kL^2 \left(\frac{\sqrt{x^2 + L^2} - L}{\sqrt{x^2 + L^2}} \right).$$

Consideremos el trabajo realizado por la fuerza de roce

$$E_f - E_i = W_{\text{roce}},$$

donde

$$E_i = \frac{1}{2}mV^2, \quad E_f = \frac{1}{2}k(\sqrt{x_o^2 + L^2} - L)^2.$$

Aquí, x_o es la posición donde la masa se detiene ($V = 0$). El trabajo de la fuerza de roce es entonces

$$W_{\text{roce}} = - \int_0^{x_o} \mu N(x) \cdot dx = - \int_0^{x_o} \mu \left[mg - kL \left(\frac{\sqrt{(x/L)^2 + 1} - 1}{\sqrt{(x/L)^2 + 1}} \right) \right] \cdot dx.$$

Escrito de otra manera

$$W_{\text{roce}} = - \int_0^{x_o} \mu(mg - kL) \cdot dx - \int_0^{x_o} \mu kL \left(\frac{1}{\sqrt{(x/L)^2 + 1}} \right) \cdot dx.$$

La primera integral es trivialmente $-\mu(mg - kL)x_o$. La segunda integral no es tan simple, y da $-\mu kL^2 \text{arcsinh}(x_o/L)$, donde $\text{arcsinh}(\cdot)$ es la función inversa de $\sinh(\cdot)$. Finalmente se obtiene la ecuación

$$\frac{1}{2}k(\sqrt{x_o^2 + L^2} - L)^2 - \frac{1}{2}mV^2 = -\mu(mg - kL)x_o + \mu kL^2 \text{arcsinh}(x_o/L), \quad (1)$$

a la cual si se puede encontrar una solución numérica usando **fzero** en Matlab. La función $\operatorname{arcsinh}(\cdot)$ se define en Matlab como $\operatorname{asinh}(\cdot)$.

Podemos escribir el siguiente m-file:

```
function f = func_practical(V,x);
mu = 0.1;
m = 0.1;
g = 9.8;
k = 2;
L = 0.1;
f = 0.5*k*(sqrt(x^2+L^2)-L)^2 - 0.5*m*V^2 + mu*x*(m*g-k*L) + mu*k*L^2*asinh(x/L);
```

Se trata entonces de buscar un cero de esta función. Para obtener las soluciones para $V = 0,3$ m/s, 0,5 m/s y 1 m/s se escribe en la línea de comando Matlab:

```
>> xsol = fzero(@(x) func_practical(0.3,x),0.1)

xsol = 0.04523617466591

>> xsol = fzero(@(x) func_practical(0.5,x),0.1)

xsol = 0.10784906258741

>> xsol = fzero(@(x) func_practical(1,x),0.1)

xsol = 0.24635954377827
```

Curiosamente, estos resultados numéricos difieren muy poco de los obtenidos con el supuesto $N = mg$. Esto se debe a que la constante k es bastante pequeña, es decir tiene un efecto débil sobre cómo varía la normal en función de la posición. De hecho, para $x_{\text{sol}} \approx 0,25$ m (el mayor de las tres soluciones), los tres términos del lado derecho de la ecuación (1) son respectivamente del orden $\mu mg \sim 0,1$, $kLx_o \sim 5 \times 10^{-3}$ y $\mu kL^2 \operatorname{arcsinh}(x_o/L) \sim 5 \times 10^{-3}$.