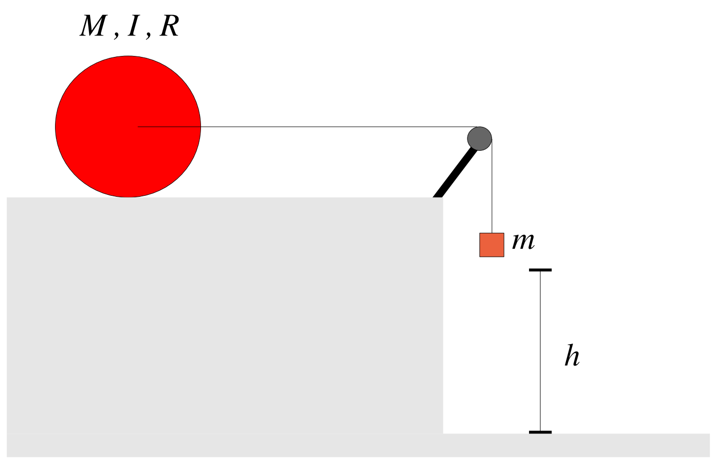
Energía y Rodadura sin Resbalar

Auxiliar Extra 15/05/2008
César Casanova Morales

Problema 1

Un cilindro de masa M , inercia I y radio R está posado sobre una tarima sin ningún tipo de roce, desde éste pende una masa m a través de un hilo. Calcule la velocidad con cual chocará la masa m si ésta se deja caer desde el reposo, a una altura h sobre el suelo. Recuerde que la inercia de un cilindro es $I=\frac{MR^2}{2}$.



Por conservación de la Energía:

$$E_i=mgh+U_{cil}$$

$$E_f=\frac{1}{2}(m+M)V_{CM}{}^2+\frac{1}{2}I\omega^2+U_{cil}$$

Como ninguna disipación $E_i=E_f$

Luego igualando

$$mgh+U_{cil}=\frac{1}{2}(m+M)V_{CM}{}^2+\frac{1}{2}I\omega^2+U_{cil}$$

Además por **RSR** $V_{CM}=\omega R$ en consecuencia $\omega=\frac{V_{CM}}{R}$

$$mgh=\frac{1}{2}(m+M)V_{CM}{}^2+\frac{1}{2}I\left(\frac{V_{CM}}{R}\right)^2$$

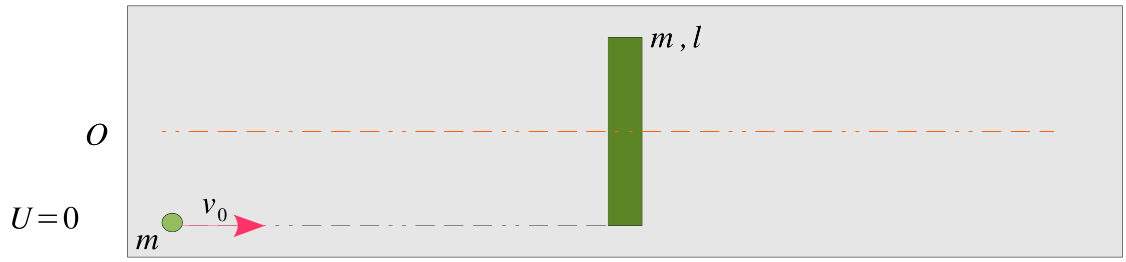
$$V_{CM}=\sqrt{\frac{mgh}{\frac{1}{2}(m+M)+\frac{1}{2}\frac{I}{R^2}}}$$

Reemplazando la inercia :

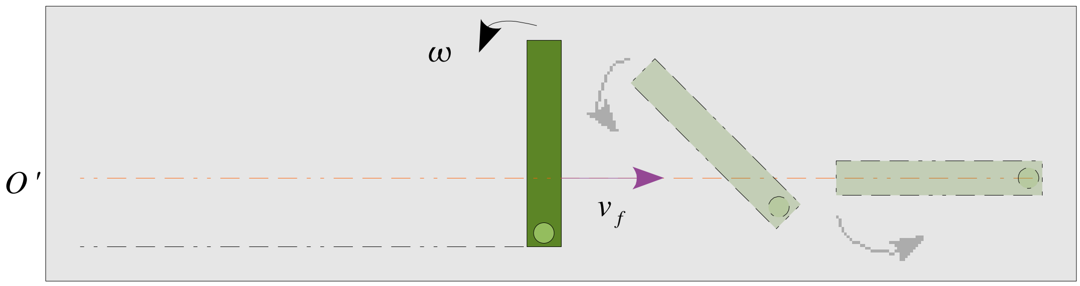
$$V_{CM}=\sqrt{\frac{mgh}{\frac{1}{2}(m+M)+\frac{M}{4}}}=\sqrt{\frac{4\text{mgh}}{2\text{m}+2\text{M}+M}}=2\sqrt{\frac{mgh}{3\text{M}+2\text{m}}}$$

Problema 2

Un proyectil es lanzado horizontalmente contra una barra de largo l , que se encuentra vertical suspendida de unos hilos, suponga que las distancias que separan los dos elementos además la velocidad del disparo es grande, tal que se puede despreciar los efectos de la gravedad en un movimiento parabólico, considerando sólo la componente horizontal de dicho movimiento



El proyectil queda incrustado en la barra y esta comienza a trasladarse con una velocidad V_f hacia la derecha, sin embargo se observa una rotación en torno a su nuevo centro de masa, encuentre la velocidad angular ω con que girará la barra en nuestra aproximación.



Luego del choque el centro de masa cambia, así como lo indica en la figura la línea horizontal roja, por lo tanto se debe encontrar el centro de masa entre una barra con centro de masa en $l/2$, y una masa ubicada en uno de sus extremos, si calculamos éste desde el extremo donde se haya ésta última:

$$R_{CM}=\frac{m(\frac{l}{2})+m(0)}{m+m}=\frac{l}{4}$$

Por conservación del momento, se encuentra la velocidad final

$$p_i=mv_0$$
$$p_f=(m+m)v_f$$

Igualando $mv_0=2\mathrm{mv}_f$ entonces $v_f=\frac{v_0}{2}$

Para encontrar la inercia :

$$I_{O'}=I_{barraO'}+I_{proyectil}$$

$$I_{barraO'}=I_{CM}+m\overline{OO'}^2=\frac{ml^2}{12}+m(\frac{l}{4})^2=\frac{7}{48}ml^2$$

$$I_{proyectil}=m(\frac{l}{4})^2=\frac{ml^2}{16}$$

Finalmente...

$$I_{O'}=\frac{7}{48}ml^2+\frac{1}{16}ml^2=\frac{10}{48}ml^2$$

Por conservación de la energía:

$$E_i=\frac{1}{2}mv_0{}^2+mg(\frac{l}{2})$$

$$E_f=\frac{1}{2}(m+m)v_f{}^2+\frac{1}{2}I_{O'}\omega^2+mg(\frac{l}{4})$$

Igualando las energías $\frac{1}{2}mv_0{}^2+\frac{mgl}{2}=m(\frac{v_0}{2})^2+\frac{1}{2}(\frac{5}{24}ml^2)\omega^2+\frac{mgl}{4}$

Despejando

$$\frac{1}{4}v_0{}^2+\frac{gl}{4}=\frac{5}{48}l^2\omega^2$$

$$(\frac{v_0}{l})^2+\frac{g}{l}=(\frac{5}{12})\omega^2$$

Por último la velocidad angular pedida es:

$$\omega=\frac{\sqrt{15}}{6}\sqrt{(\frac{v_0}{l})^2+\frac{g}{l}}$$