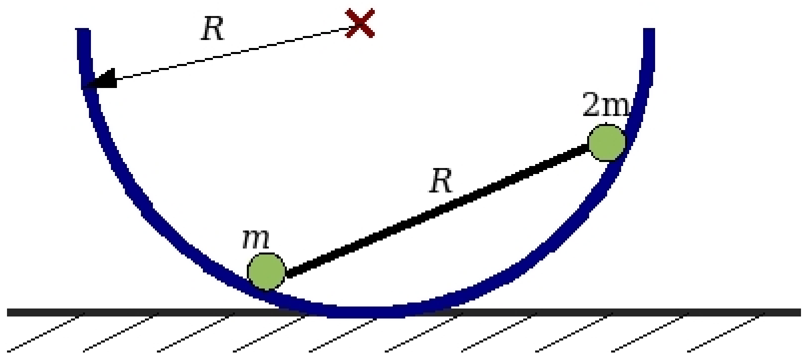
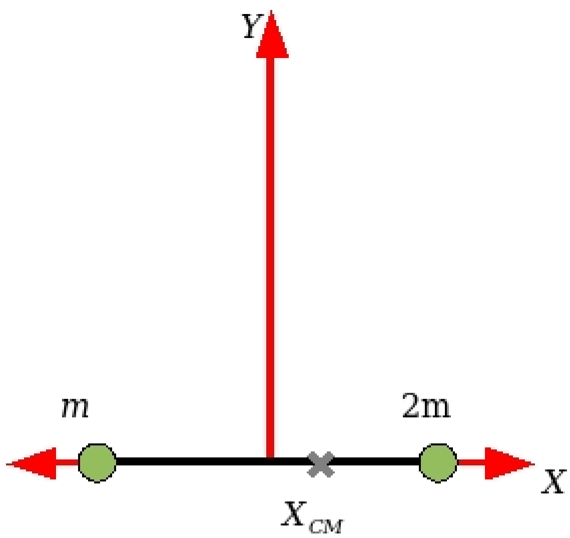
Auxiliar 4: Estática
César Casanova

Problema 2

En los extremos de una barra de masa despreciable se adhieren dos bolitas, de masa m y $2m$ respectivamente. El sistema posa sobre un tiesto de fondo esférico resbaloso de radio igual a la longitud de la barra. Calcule el ángulo que forma la barra con la vertical y la distancia desde el suelo hasta el centro de masa de la configuración.



Al igual que el problema 1, primero debemos calcular el centro de masa de la configuración, así que elegimos convenientemente su posición, quedando de la siguiente forma:



Reemplazando directamente en la expresión para el centro de masa, ya que se tienen las masas y sus posiciones :

$$X_{CM}=\frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}$$

$$X_{CM}=\frac{x_m m+x_{2m}2m}{m+2m}$$

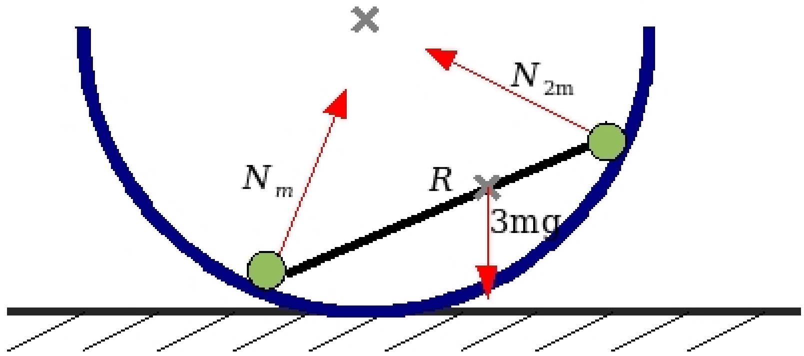
$$X_{CM}=\frac{-\frac{R}{2}m+\frac{R}{2}2m}{3m}=\frac{R}{6}$$

Entonces las distancias a las respectivas masas son :

Para m : $\frac{R}{2}+\frac{R}{6}=\frac{2}{3}R$

Para 2m : $\frac{R}{2}-\frac{R}{6}=\frac{1}{3}R$ (el centro de masa está más cercano a la masa mayor)

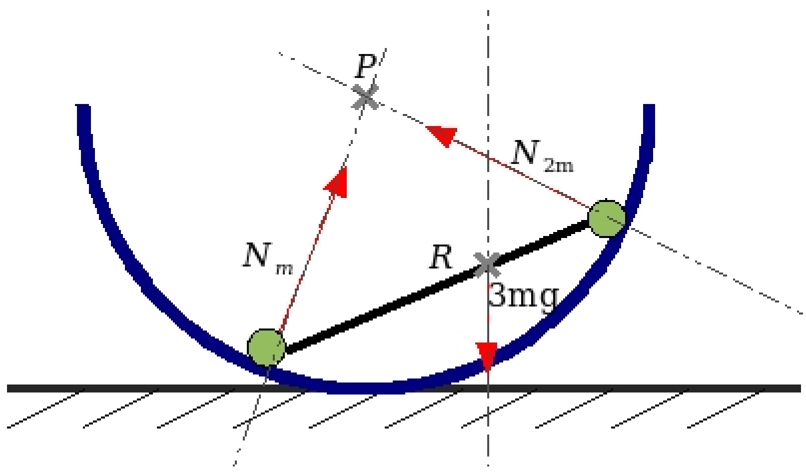
Una vez obtenido el centro de masa, se procede a hacer el DCL respectivo, e imponer las condiciones de equilibrio estático :



$$\sum \vec{F}=0$$

$$\overrightarrow{N_m}+\overrightarrow{N_{2m}}+\overrightarrow{3mg}=0$$

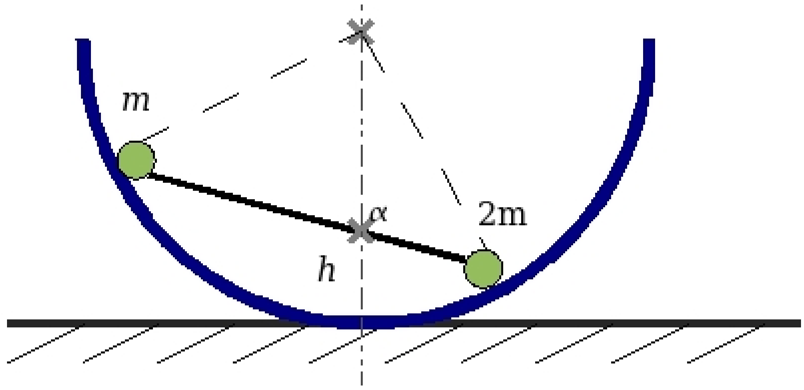
Para los torques se debe elegir, como siempre, el punto donde "se cancelen" la mayor cantidad de fuerza, para esto basta con extender la dirección de las fuerzas y fijarse si ésta pasa o no por el punto elegido, determinando de esta forma, que la fuerza es paralela al brazo, encontrándose ambos en la misma dirección, por lo tanto su torque es nulo, ya que el producto cruz de dos vectores paralelos es nulo. Esto ocurre en P :



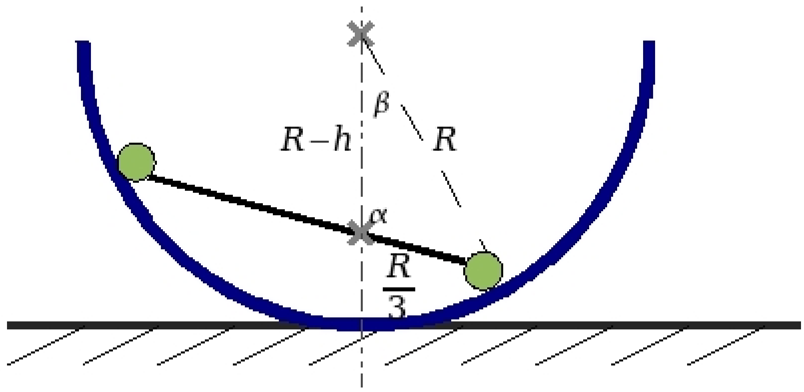
Entonces la única fuerza que estaría haciendo torque sería el peso:

$$\tau_{3mg}=r\cdot Mg\cdot\sin(\alpha)$$

Pero $\sum \vec{\tau}=0$, por lo tanto $\tau_{3mg}=0$ entonces $r=0$, en este caso donde estamos suponiendo que $\sin(\alpha)\neq 0$, así que la verdadera posición que alcanza es :



Y se desea encontrar α y h , pero dada la configuración, notamos que la barra de longitud R y las proyecciones radiales forman un triángulo equilátero, o sea los ángulos interiores valen $\frac{\pi}{3}$, luego necesitamos dos ecuaciones para encontrar las incógnitas, una viene dada por el teorema del seno y la otra por geometría:



$$\frac{\sin(\alpha)}{R}=\frac{\sin(\beta)}{\frac{R}{3}} \quad \text{(teorema del seno)}$$

$$\pi-\alpha=\beta+\frac{\pi}{3} \quad \text{(geometría en el triángulo)}$$

$$\frac{1}{3}\sin(\alpha)=\sin(\frac{2}{3}\pi-\alpha)=\sin(\frac{2}{3}\pi)\cos(\alpha)-\cos(\frac{2}{3}\pi)\sin(\alpha) \quad \text{(seno diferencia de ángulos)}$$

Recuerde que :

$$\sin(\frac{2}{3}\pi)=\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3})=2\cos(\frac{\pi}{3})\sin(\frac{\pi}{3})=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(\frac{2}{3}\pi)=\cos(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3})=\cos(\frac{\pi}{3})^2-\sin(\frac{\pi}{3})^2=-\frac{1}{2}$$

Finamente el valor de α es :

$$\frac{1}{3}\sin(\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\alpha)+\frac{1}{2}\sin(\alpha)$$

Despejando $\frac{-1}{6}\sin(\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\alpha)$, dividiendo $\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}=-3\sqrt{3}$

$$\alpha=\arctan(-3\sqrt{3})$$

Y para h se tendrá:

$$\frac{\sin(\alpha)}{R}=\frac{\sin(\frac{\pi}{3})}{R-h}$$

Despeje y reemplace....