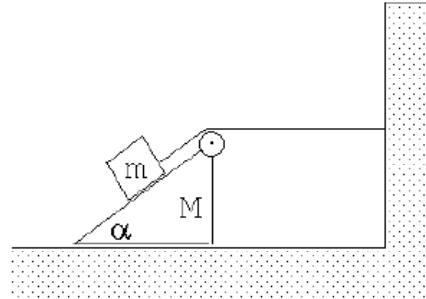


Pauta Auxiliar 29 de abril
FI100-07 2008-01

Aux: Osmar Valdebenito G.
Prof: Alejandra Montecinos T.

3.

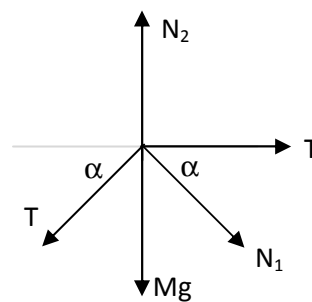
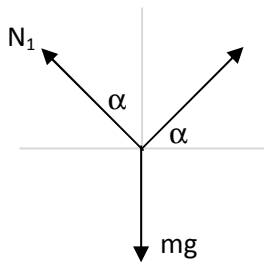
Considere el montaje mostrado en la figura 4.18. Suponga que las masas de la polea y del hilo, así como el rozamiento son despreciables. Se conocen las masas m , M y el ángulo de la cuña. Encuentre la aceleración de la cuña.



Respuesta:
$$a = \frac{mg \sin \alpha}{M + 2m(1 - \cos \alpha)}.$$

Solución

Haciendo los DCL respectivos para la masa y la cuña,



Cuando la cuña avanza $\underline{x}$ hacia la derecha, la masa avanza $\underline{x} - x \cos \alpha$, ie.

$$x_{\text{cuña}}(t) = \frac{1}{2} a_c t^2$$

$$x_{\text{masa}}(t) = x_{\text{cuña}}(t)(1 - \cos \alpha) = \frac{1}{2} a_{mx} t^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} a_c t^2 = \frac{1}{2(1 - \cos \alpha)} a_{mx} t^2$$

$$\Rightarrow a_c(1 - \cos \alpha) = a_{mx}$$

Notemos que, como $(1 - \cos \alpha) > 0$, a_c tiene el mismo signo que a_{mx} . Además, cuando la cuña avanza $\underline{x}$ hacia la derecha, la masa baja $\underline{x} \sin \alpha$, ie.

$$\Rightarrow a_c(\sin \alpha) = a_{my}$$

Tenemos entonces las siguientes ecuaciones:

$$(1) \sum f_{\text{masa}}^x = T \cos \alpha - N_1 \sin \alpha = m a_{mx} = m a_c (1 - \cos \alpha)$$

$$(2) \sum f_{\text{masa}}^y = -T \sin \alpha - N_1 \cos \alpha + mg = m a_{my} = m a_c \sin \alpha$$

$$(3) \sum f_{\text{cuña}}^x = T - T \cos \alpha + N_1 \sin \alpha = M a_c$$

$$(4) \sum f_{\text{cuña}}^y = Mg + T \sin \alpha + N_1 \cos \alpha - N_2 = 0$$

De (1) y (3), se puede despejar $T = [m(1 - \cos\alpha) + M]a_c$

Despejando de (2)·sen α + (4)·cos α , se obtiene

$$-T\text{sen}^2\alpha + mgsen\alpha + T\cos\alpha - T\cos^2\alpha = ma_c\text{sen}^2\alpha + Ma_c\cos\alpha$$

$$T\cos\alpha - T + mgsen\alpha = ma_c\text{sen}^2\alpha + Ma_c\cos\alpha$$

$$\Rightarrow T(\cos\alpha - 1) = ma_c\text{sen}^2\alpha + Ma_c\cos\alpha - mgsen\alpha$$

De las dos últimas ecuaciones encontradas, se obtiene:

$$a_c[m(1 - \cos\alpha) + M](\cos\alpha - 1) = ma_c\text{sen}^2\alpha + Ma_c\cos\alpha - mgsen\alpha$$

$$mgsen\alpha = a_c[msen^2\alpha + M\cos\alpha + (m(1 - \cos\alpha) + M)(1 - \cos\alpha)]$$

$$\Rightarrow a_c = \frac{mgsen\alpha}{[msen^2\alpha + M\cos\alpha + (m(1 - \cos\alpha) + M)(1 - \cos\alpha)]}$$

$$\Leftrightarrow a_c = \frac{mgsen\alpha}{[msen^2\alpha + M\cos\alpha + m(1 - \cos\alpha)^2 + M - M\cos\alpha]}$$

$$\Leftrightarrow a_c = \frac{mgsen\alpha}{msen^2\alpha + M\cos\alpha + m - 2m\cos\alpha + m\cos^2\alpha + M - M\cos\alpha}$$

$$\Leftrightarrow a_c = \frac{mgsen\alpha}{2m - 2m\cos\alpha + M}$$

$$\therefore \boxed{a_c = \frac{mgsen\alpha}{M + 2m(1 - \cos\alpha)}} \blacksquare$$