Capítulo 4

Las leyes de Newton

En el presente capítulo enunciaremos y analizaremos las así llamadas *Leyes de Newton*. Recurrir a estas leyes para formular la *mecánica clásica* presenta algunos inconvenientes, pues permite que se le hagan objeciones desde un punto de vista lógico. A pesar de estas dificultades persistiremos en este camino, es decir, tomaremos las leyes de Newton como el punto de partida para el desarrollo de la mecánica. Las razones para ello son dos: por una parte esta forma de proceder corresponde más de cerca al desarrollo histórico y, por otra, tiene la ventaja de ser una formulación menos abstracta que las otras alternativas.
Antes de enunciar las famosas leyes de Newton, debemos discutir algunos conceptos preliminares.

4.1. Espacio y tiempo

En la *Mecánica de Newtoniana* se supone que las partículas, como también los observadores, "viven" en un espacio *euclideano tridimensional*. Eso significa, entre otras cosas, que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo que imaginemos en este espacio, es siempre 180^o. Otra característica de un espacio euclideano es, por ejemplo, que la suma de dos vectores de desplazamiento es conmutativa.
Para darse cuenta como estos conceptos fracasan cuando el espacio es no–euclideano es útil considerar el espacio bi–dimensional formado por la superficie de una esfera. Tal espacio es no–euclideano y en él se presentan varias situaciones curiosas. Por ejemplo, al viajar en línea recta en ese espacio, en algún instante uno vuelve al punto de partida. La suma de los ángulos interiores de un triángulo dibujado sobre tal esfera es mayor a 180^o y también la suma de dos vectores es no conmutativa.
El *espacio* que Newton usa para desarrollar la mecánica no sólo es euclideano sino que también homogéneo e isótropo. Esto significa que todos los lugares del espacio son equivalentes y que el espacio tiene las mismas propiedades en todas las direcciones.

Para desarrollar la mecánica también es indispensable decir algo sobre el concepto de tiempo. Newton usó la suposición de que: "*El tiempo matemático, absoluto y verdadero fluye,* *debido a su propia naturaleza, parejamente y en forma independiente a cualquier agente externo*". Si bien la mayoría de las personas sienten simpatía por esta concepción del tiempo, hay que darse cuenta de que desde el punto de vista estrictamente lógico esta concepción es insatisfactoria ya que sin el concepto *tiempo* la palabra *parejamente* no tiene significado. No es fácil decir algo sobre la noción *tiempo* que sea mejor o que clarifique lo expresado por Newton, consecuentemente, no intentaremos hacerlo aquí. Más bien apelaremos a nuestra intuición, experiencia y conocimiento sobre lo que es el tiempo: es algo que permea a todo el espacio y *avanza en forma homogénea y continua*, independiente de la posición, del observador, de la velocidad — independiente de cualquier cosa.

El tiempo se mide usando relojes. Generalmente un reloj posee alguna característica que hace que éste se comporte en forma periódica. Con la suposición de que el tiempo transcurrido entre dos repeticiones es siempre el mismo, podemos usar ese movimiento periódico como reloj. Por ejemplo, el movimiento rotatorio de la tierra en torno al sol se usa para definir la unidad de tiempo llamada *año*; el movimiento de la tierra en torno a su propio eje puede usarse para definir *día solar*. Un péndulo, o una masa colgada de un resorte, también puede usarse como reloj.

Supongamos que un observador O tiene numerosos relojes idénticos a su disposición, que los ha sincronizado y que tales relojes no modifican su ritmo si se los aleja, cada uno de los demás. De esta manera el observador O puede tener en todos los lugares del espacio relojes sincronizados con el que él posee. Para el observador O, dos eventos que ocurren en lugares distintos, serán *simultáneos* si los relojes ubicados en los dos lugares marcan la misma hora al ocurrir los eventos. Una consecuencia de la concepción newtoniana del tiempo es que si dos eventos son simultáneos para un observador, también lo serán para todos los demás observadores. En la mecánica newtoniana el concepto *simultaneidad* tiene una validez absoluta.

Al comenzar con el estudio de la física es difícil argumentar a favor o en contra de esta concepción newtoniana del tiempo. Las experiencias vividas por la gran mayoría de las personas, sugieren aceptar esta concepción como válida (o al menos plausible).

Señalamos, sin embargo, que más adelante (en futuros cursos) nos veremos forzados a abandonar este concepto intuitivo del tiempo. Y no solamente del tiempo; en algún momento nos veremos obligados a revisar muchos otros conceptos que ya creíamos tener claramente establecidos.

Pasamos a enunciar las *leyes de Newton*. Sin embargo, deseamos hacer notar desde la partida que las leyes de Newton sólo serán aplicables a fenómenos que usualmente observamos en nuestro mundo macroscópico; no son aplicables ni en el mundo microscópico, ni a fenómenos que ocurren a escalas cosmológicas. Las leyes de Newton también fracasan estrepitosamente al describir con ellas sistemas en que algunas (o todas) de las partículas se desplazan a velocidades comparables a la velocidad de la luz.

4.2. Las leyes de Newton

Presentamos a continuación los postulados fundamentales de la mecánica que Isaac Newton publicó en su libro "*Principia*" en 1687.

Primera ley:

Cada cuerpo material persiste en su estado de reposo o de movimiento uniforme en línea recta, a menos que una fuerza, que actúa sobre el cuerpo, lo conmine a cambiar de estado.

¿Qué realmente quiere decir esta ley, que se conoce también con el nombre de *ley de inercia*? En su redacción aparece la palabra *fuerza*, luego para interpretar la ley de inercia debemos apelar a nuestro conocimiento intuitivo sobre qué es una fuerza: una fuerza es lo que hacemos, por ejemplo, al usar nuestros músculos para empujar un objeto. La primera ley entonces establece que cualquier cuerpo material, al que nadie ni nada empuja o tira, se trasladará con una velocidad constante (es decir, se moverá en línea recta con una rapidez uniforme). Si la velocidad es cero, o sea, el cuerpo está en reposo, continuará en reposo.
Consideremos ahora un observador O que observa una partícula sobre la cual no actúan fuerzas. Si el observador O, mientras observa, realiza saltos mortales, la partícula no le parecerá estar moviéndose con velocidad constante. Sólo si el sistema de referencia que usa O para observar a la partícula satisface ciertas condiciones, el cuerpo se moverá (para O) con velocidad constante. O sea, la primera ley de Newton es válida sólo si el movimiento del cuerpo se observa desde ciertos sistemas de referencia bien particulares. Tales sistemas de referencia se llaman *inerciales*. En otras palabras, la primera ley de Newton en realidad no es otra cosa que la definición de un *sistema inercial*.

Para enunciar la segunda ley debemos definir previamente el concepto de *cantidad de movimiento* o *momentum* de una partícula. El momentum de una partícula es el producto de la masa de la partícula por su velocidad. Como el producto de un escalar (la masa) por un vector (la velocidad), es un vector, el momentum de una partícula es un vector:

$$\vec{p} = m\vec{v} \ .$$

La *masa* m de un cuerpo será una magnitud que es proporcional a su *peso*, es decir, proporcional al esfuerzo que es necesario realizar para levantarlo o suspenderlo. Si un cuerpo pesa más que otro, esto se debe a que el primero tiene una masa mayor que el segundo.
La unidad de masa en el sistema internacional de unidades SI es el *kilógramo*, y corresponde a la masa del *kilógramo patrón* guardado en una oficina en París. Sin embargo, para la mayoría de los efectos prácticos podemos definir a un kilógramo como la cantidad de masa que posee un litro de agua dulce.
Una hipótesis que se hace en la mecánica newtoniana es que la cantidad de materia no cambia. Efectivamente, nuestra experiencia nos muestra que, por ejemplo, si hacemos colisionar dos relojes de manera que ellos se desintegren, la masa de todos los fragmentos y partes seguirá siendo igual a la de los dos relojes originales. Otro ejemplo, al agregarle un litro de agua a un balde de arena seca encontraremos que la arena mojada pesará ahora un kilógramo más que cuando la arena estaba seca. Esta hipótesis, de que la masa de un sistema cerrado no cambia, pareciera estar bien fundamentada por numerosas observaciones.
Pasamos a enunciar la segunda ley de Newton.

Segunda ley:

El cambio de momentum $\Delta\vec{p}$ de una partícula es proporcional a la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo, como también al intervalo Δt durante el cual ella se aplica, y apunta en la dirección y sentido de esta fuerza, o sea,

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}\,\Delta t \ \ .$$

Como primer comentario es necesario decir que esta ley sólo es válida si la fuerza $\vec{F}$ es constante durante el intervalo Δt y si las magnitudes son observadas desde un sistema de referencia inercial.
La segunda ley debemos considerarla como definición del concepto *fuerza*. Si sobre una partícula actúa una fuerza durante un cierto intervalo de tiempo Δt, necesariamente cambiará su velocidad (y por consiguiente también su momentum). La *fuerza media* que actúa sobre la partícula durante el intervalo Δt es el cuociente entre el cambio de momentum y el intervalo de tiempo:

$$\langle\,\vec{F}\,\rangle = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} \ \ .$$

La fuerza instantánea se obtiene en el límite $\Delta t\longrightarrow 0$, o sea, viene dada por

$$\vec{F} \equiv \frac{d\vec{p}}{dt} \ \ .$$

Note que la fuerza también es una magnitud vectorial.

Si la masa de una partícula no varía a medida que transcurre el tiempo, entonces

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(\,m\vec{v}\,)}{dt} = m\,\frac{d\,\vec{v}}{dt} = m\,\vec{a} \ \ .$$

En palabras, la fuerza neta que actúa sobre una partícula es igual al producto de su masa y su aceleración.

Si la masa se mide en kg y la aceleración en (m/s^2), entonces la fuerza viene dada en Newtons (N). O sea, por definición, en el sistema de unidades SI

$$1\ \mathrm{N} \equiv 1\,\mathrm{kg}\cdot 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\ .$$

Tercera ley:

Si un cuerpo **A** *ejerce una fuerza sobre otro* **B**, *entonces este último ejercerá sobre* **A** *una fuerza de igual magnitud y en la misma dirección, pero en sentido opuesto.*

De acuerdo a la tercera ley, una fuerza nunca aparece en forma solitaria, sino que siempre vendrá acompañada de otras fuerzas, de manera que la suma vectorial de todas ellas sea nula. Es importante señalar que estas fuerzas, denominadas de *acción y reacción*, actúan siempre sobre objetos diferentes. O sea, la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan

sobre un cuerpo no necesariamente tiene que ser nula. Para que sobre un cuerpo pueda actuar una fuerza neta no nula es necesario que exista al menos un segundo cuerpo.
A pesar de que no se menciona explícitamente, al aplicar la tercera ley se supone que la acción y reacción aparecen en forma simultánea. Como dos cuerpos pueden interactuar a distancia (por ejemplo, a través de la interacción gravitacional), el último comentario implica que en la mecánica newtoniana debe existir una manera de transmitir la información de un cuerpo a otro con una velocidad infinita. En la naturaleza tales velocidades infinitas no existen; hoy en día sabemos que la velocidad de la luz en el vacío es un límite superior para las velocidades con que se puede trasladar algo material o información de un lugar a otro. Por esta razón, la tercera ley es generalmente una muy buena aproximación, pero no tiene una validez universal; por ejemplo, en colisiones atómicas no es siempre aplicable.

4.3. Uso de las leyes de Newton

Para aprender a manejar las leyes de Newton y comprender su significado, lo mejor es ilustrar su uso en algunas situaciones concretas.

Ejemplos:

1. Analicemos las fuerzas que actúan sobre un cuerpo que cae.

   Debido a la atracción gravitatoria, todo objeto sufrirá una fuerza que apunta hacia el centro de la tierra. Es esta fuerza la que acelera al cuerpo durante su caída.

   ¿Cuál es el tamaño de esta fuerza? Sabemos que al realizar experimentos con cuerpos sobre la superficie terrestre, al soltarlos todos ellos caen con la misma aceleración hacia la superficie. Esta aceleración constante, llamada *aceleración de la gravedad*, se denota por g, y su valor es aproximadamente $g = 9{,}81$ m/s^2. (En realidad, al realizar estos experimentos hay que asegurarse de que los efectos de la densidad y viscosidad de la atmósfera sean despreciables. Más aún, el experimento debe realizarse sin alejarse demasiado—a lo más unas pocas decenas de kilómetros—de la superficie terrestre.)

   Conociendo la aceleración del cuerpo y su masa m podemos (usando la segunda ley de Newton) establecer cuál es la fuerza gravitacional que actúa sobre el cuerpo. Definiendo al vector unitario $\hat{z}$ como un vector que apunta hacia arriba, el vector aceleración del cuerpo vendrá dado por $\vec{a} = -g\hat{z}$. La fuerza sobre el cuerpo es entonces

   $$\vec{F} = m\,(-g\,\hat{z}) = -mg\hat{z} \quad .$$

   A la magnitud de esta fuerza gravitacional es lo que se llama *peso* del objeto. Usando la letra W para denotar al peso se tiene

   $$|\vec{F}| \equiv W = m\,g = \text{peso del objeto} \; .$$

2. Analicemos las fuerzas que actúan sobre un libro de masa M, en reposo sobre una mesa (superficie horizontal).

   Ya sabemos que sobre el libro actúa una fuerza, debido a la gravedad terrestre, que es
$$\vec{W} = -Mg\hat{z} \ .$$

   Por otra parte, debido a que el libro se encuentra (y se mantiene) en reposo, la fuerza neta sobre el libro debe ser nula. ¿Quién o qué ejerce otra fuerza, igual a $-\vec{W}$, sobre el libro? La respuesta es: la mesa. Efectivamente, el libro se apoya sobre la mesa y la superficie de ella ejerce sobre el libro una fuerza hacia arriba, llamada *reacción*, cuya magnitud es igual al peso del libro.

   Introduzcamos los así llamados *diagramas de cuerpo libre*:

   > *Al analizar las fuerzas que se ejercen sobre un cuerpo es conveniente aislarlo del resto de los objetos que interactúan con él. Para ello cada objeto que interactúa con este cuerpo es sustituido por una fuerza que cumple con la tercera ley de Newton. El resultado de esta operación es el así llamado* diagrama de cuerpo libre *del objeto.*

   Para el caso del libro, la interacción de éste con la tierra se reemplaza por el vector $\vec{W}$ que apunta hacia abajo y cuya magnitud coincide con el peso del libro; el efecto de la mesa sobre el libro se reemplaza por el vector $\vec{R}$, (ver figura 4.1). Si el libro se mantiene en reposo, la segunda ley de Newton requiere que $\vec{W} + \vec{R} = 0$.

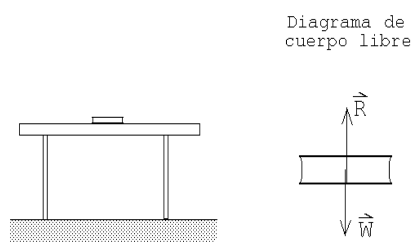


Figura 4.1

3. Consideremos un objeto de masa m que cuelga del techo sujetado por una cuerda ideal (ver figura 4.2). ¿Cuál es la fuerza que la cuerda ejerce sobre el gancho en el techo y cuál es la tensión de la cuerda?

   Una *cuerda ideal* es una cuerda que, a menos que se especifique lo contrario, no tiene masa, es perfectamente flexible y no es extensible. Que una cuerda sea perfectamente flexible quiere decir que sólo es capaz de transmitir una fuerza a lo largo de ella; no puede ejercer fuerzas transversales.

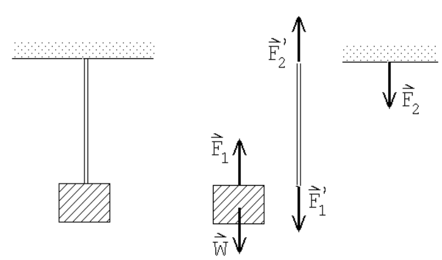


Figura 4.2

   Sobre el objeto actúan dos fuerzas; una es el peso $\vec{W} = -mg\hat{z}$ y la otra es la fuerza $\vec{F}_1$ ejercida por la cuerda. Como el objeto no acelera, la fuerza neta (es decir, la suma de todas las fuerzas que actúan sobre él) debe ser nula. Por consiguiente, $\vec{F}_1 = -\vec{W}$.

Denotemos por $\vec{F}_1'$ a la fuerza ejercida por el objeto sobre la cuerda. Debido al principio de acción y reacción, $\vec{F}_1' = -\vec{F}_1$. La cuerda por otra parte ejerce una fuerza $\vec{F}_2$ sobre el gancho (la dirección de esta fuerza es hacia abajo). A su vez, el gancho ejercerá una fuerza $\vec{F}_2'$ sobre la cuerda. Nuevamente debido al principio de acción y reacción, $\vec{F}_2' = -\vec{F}_2$.

Ahora, debido a que la cuerda no tiene masa, las únicas fuerzas que actúan sobre ella serán $\vec{F}_1'$ y $\vec{F}_2'$. Al estar en equilibrio (la cuerda no acelera), la suma de ambas fuerzas debe ser cero, luego $\vec{F}_2' = -\vec{F}_1'$. Resumiendo, tenemos que

$$-mg\hat{z} = \vec{W} = -\vec{F}_1 = \vec{F}_1' = -\vec{F}_2' = \vec{F}_2 \ ,$$

o sea, la fuerza $\vec{F}_2$ que la cuerda ejerce sobre el gancho es igual al peso $-mg\hat{z}$.

Cada uno de los extremos de la cuerda ejerce una fuerza sobre los objetos a los cuales está unida. Cuando la masa de la cuerda es nula, la magnitud de esa fuerza es la misma. A esta magnitud se le llama *tensión* de la cuerda. A lo largo de una cuerda ideal, que no tiene masa, la tensión no varía. Para la cuerda del presente problema, la tensión es $\tau = mg$. La tensión es un escalar.

4. Máquina de Atwood.

Consideremos dos masas m_1 y m_2 unidas por una cuerda ideal sin masa que pasa sobre una polea ideal (ver figura 4.3). Deseamos encontrar la aceleración de las masas y las tensiones de las cuerdas.

Con la expresión *polea ideal* nos estamos refiriendo a una polea que no tiene masa y gira sin roce. El objetivo de la polea es simplemente cambiar la dirección de la cuerda y, por lo tanto, de la fuerza (que actúa siempre a lo largo de la cuerda). La tensión a la que está sometida una cuerda no se modifica al pasar por una polea ideal.

Sea τ la tensión de la cuerda que une ambas masas y $\vec{a}_1 = a_0\hat{z}$ la aceleración que sufrirá la masa 1. La fuerza neta que actúa sobre la masa 1 es $(-m_1g+\tau)\hat{z}$, luego, de acuerdo a la segunda ley de Newton

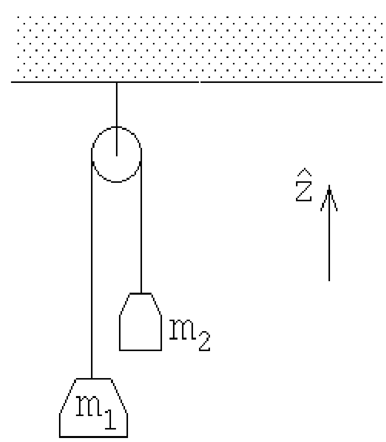


Figura 4.3

$$(-m_1g+\tau)\hat{z} = m_1\vec{a}_1 = m_1\, a_0\, \hat{z} \ \ .$$

De esta relación se deduce que

$$\tau - m_1 g = m_1 a_0 \ . \tag{4.1}$$

Debido a que la cuerda es inextensible, la aceleración que sufrirá la masa 2 es la opuesta a la de la masa 1, o sea, $\vec{a}_2 = -a_0\hat{z}$. Aplicando la segunda ley de Newton a la segunda masa se obtiene la expresión

$$\tau - m_2 g = -m_2 a_0 \ . \tag{4.2}$$

De las ecuaciones (4.1) y (4.2) podemos despejar las dos incógnitas a_0 y τ:

$$\tau = 2\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

y

$$a_0 = -\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, g \ .$$

Como la polea no tiene masa y ésta no sufre aceleraciones, la tensión de la cuerda que la sujeta deberá ser igual a 2τ.

Casos particulares:

Si $m_1 = m_2$, entonces $a_0 = 0$ y $\tau = m_1 g = m_2 g$. Tal como era de esperarse, si las masas son iguales, ninguna de ellas acelera.

Si $m_1 > m_2$ entonces a_0 resulta ser una magnitud negativa. Esto quiere decir que $\vec{a}_1 = a_0\hat{z}$ es una aceleración que apunta hacia abajo; tal como debe ser, la masa 1 baja, mientras que la masa 2 sube.

Si m_1 es muy parecida a m_2, entonces $|a_0| \ll g$. O sea, cada una de las masas realizará un movimiento uniformemente acelerado, pero con una aceleración mucho menor que g.

Si $m_1 = 0$, entonces $a_0 = g$ y $\tau = 0$. En este caso la cuerda deja de tener tensión, y por consiguiente la partícula 2 caerá con aceleración g.

5. Considere una cuerda flexible de masa M que cuelga entre dos paredes, siendo α el ángulo que forma la cuerda con la pared (ver figura 4.4). Se desea encontrar la tensión que la cuerda tiene en el punto mínimo.
   Para resolver el problema consideremos como nuestro sistema sólo la mitad derecha de la cuerda. Hay tres fuerzas que actúan sobre ese sistema:

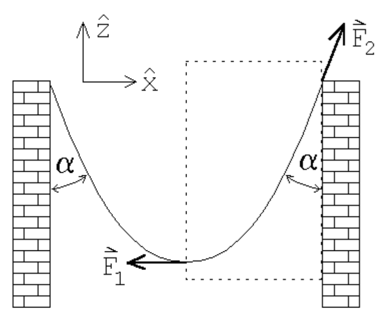


Figura 4.4

   i) El peso $\vec{W} = -\frac{1}{2}Mg\hat{z}$.
   ii) La fuerza $\vec{F}_1$ ejercida por la parte izquierda de la cuerda. La magnitud de esta fuerza es igual a la tensión de la cuerda en el mínimo, que llamaremos τ_0. Se tiene que $\vec{F}_1 = -\tau_0\hat{x}$.

iii) La fuerza que ejerce el gancho sobre la cuerda. Como la cuerda es flexible la fuerza necesariamente es a lo largo de la tangente de la cuerda. Si a la magnitud de esta fuerza la llamamos f_0, se tiene que $\vec{F}_2 = f_0 \cos\alpha\, \hat{z} + f_0 \sin\alpha\, \hat{x}$.

Como nuestro sistema está en equilibrio (no acelera), la suma de las tres fuerzas debe ser nula:

$$\vec{W} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\frac{1}{2} Mg\hat{z} - \tau_0\hat{x} + f_0 \cos\alpha\, \hat{z} + f_0 \sin\alpha\, \hat{x} = 0 \ .$$

Pero para que un vector sea cero es necesario que cada una de sus componentes sea nula. Este hecho nos da las siguientes ecuaciones:

$$\text{componente } z: \qquad -\frac{1}{2} Mg + f_0 \cos\alpha = 0$$

y

$$\text{componente } x: \qquad -\tau_0 + f_0 \sin\alpha = 0 \ .$$

De estas dos ecuaciones podemos despejar τ_0 y f_0, obteniéndose

$$\tau_0 = \frac{1}{2} Mg \tan\alpha$$

y

$$f_0 = \sqrt{\tau_0^2 + \left(\frac{Mg}{2}\right)^2} \ .$$

Notemos cómo para $\alpha \longrightarrow 90^\circ$, o sea, a medida que la cuerda se cuelga en forma más "tirante", la tensión de la cuerda tiende a infinito.

6. Consideremos una masa m que gira en el plano x, y, en un círculo de radio R y con una velocidad angular constante, ω_0 . Encontremos la fuerza neta a la que está sometida la masa.

En la sección 3.3 ya analizamos el movimiento circular y demsotramos que la aceleración de la masa m viene dada por $\vec{a}(t) = -R\omega_0^2\, \hat{r}$. De acuerdo a la tercera ley de Newton, el hecho que la masa m esté acelerada implica que sobre ella está actuando una fuerza neta

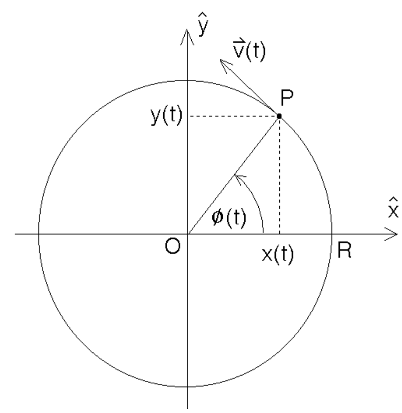


Figura 4.5

$$\vec{F} = m\vec{a} = -Rm\omega_0^2\, \hat{r} \ .$$

Esta fuerza (de magnitud constante) apunta hacia el origen y por esta razón se le denomina *fuerza centrípeta*.

Debido a la importancia de este resultado lo reiteramos: Una masa m que realiza un movimiento circular uniforme, está sometida a una fuerza que apunta hacia el centro de giro. La magnitud de esta fuerza centrípeta es

$$F_{\text{cent}} = mR\omega_0^2 = \frac{mv^2}{R} \ ,$$

donde R es el radio del círculo, ω_0 la velocidad angular y $v = \omega_0 R$ el módulo de la velocidad de la partícula.

4.4. Roce cinético y estático

Si un cuerpo se desliza sobre otro, tarde o temprano se detendrá a menos que exista una fuerza externa que perpetúe el movimiento. La fuerza que se opone al deslizamiento relativo entre los dos cuerpos se denomina *fuerza de roce cinético*. Se origina en la interacción de ambas superficies en contacto.
La fuerza de roce no sólo aparece cuando dos cuerpos están en movimiento relativo, sino que también puede estar presente cuando los dos cuerpos se encuentran en reposo relativo. En efecto, si, por ejemplo, intentamos deslizar una mesa por el piso, notamos que aparece una fuerza que impide que este deslizamiento comience. A esta fuerza se le denomina *fuerza de roce estático*.
También existen otras fuerzas de roce que aparecen en diversas circunstancias (por ejemplo, el *roce rodante*, el *roce viscoso*, etc), sin embargo, en el presente capítulo centraremos nuestro interés en las fuerzas de roce cinético y estático.
Se sabe relativamente poco acerca de ambos y es difícil cuantificarlos porque dependen de la naturaleza de los materiales y de propiedades de la superficie como el pulido, la existencia de óxidos en la interfase, etc. Lo que dificulta aún más la cuantificación de la fuerza de roce es su dependencia de la historia de las superficies: el paso del roce estático al roce dinámico depende de si las superficies se han deslizado previamente o no.
Las fuerzas de roce tienen un origen microscópico. Dos superficies, por suaves que parezcan, a nivel microscópico tienen irregularidades. Estas protuberancias forman, en algunos casos, microsoldaduras, y son el origen de la fuerza adicional que uno debe aplicar para poder iniciar un movimiento relativo entre los cuerpos. Una vez que éstos están en movimiento, estas aristas microscópicas se "enganchan" unas con otras y dan origen al *roce cinético* (también a veces llamado "*roce cinemático*" o *roce dinámico*").

A continuación presentamos algunos resultados fenomenológicos y cualitativos sobre del roce. Estos resultados no son "leyes fundamentales de la naturaleza", sino sólo conclusiones generales que fueron obtenidas después de numerosos estudios experimentales.

Consideremos un bloque de masa M que descansa sobre una superficie, el cual intentamos deslizar aplicando sobre él una fuerza horizontal $\vec{F}$, que incrementamos paulatinamente. Designemos por $\vec{f}$ a la fuerza de roce que aparece debido a la fricción entre las dos superficies y describamos la forma en que típicamente varía esta fuerza.

a) Mientras la fuerza horizontal externa $F = |\vec{F}|$ varía desde 0 hasta un cierto valor $f_e^{(max)}$, el bloque M no se deplazará. Como no hay aceleración, la fuerza neta horizontal sobre el cuerpo debe ser nula, o sea, debe haber otra fuerza horizontal sobre el bloque que exactamente cancele a la fuerza $\vec{F}$. Esta es la fuerza de roce estática $\vec{f}$. Se tiene, por lo tanto, que $\vec{f} = -\vec{F}$.

b) Cuando la fuerza horizontal externa F sobrepasa cierto valor $f_e^{(max)}$, la fuerza de roce no sigue aumentando. Como ahora la componente horizontal de la fuerza neta no es nula, el bloque comenzará a acelerar. Tan pronto como los cuerpos se deslizan con cierta velocidad relativa, la fuerza de roce se vuelve constante, siendo su magnitud algún valor f_c (menor que f_e^{max}) y su sentido opuesto al movimiento relativo.

De ahí en adelante, si se desea mantener el bloque deslizándose con una velocidad constante, debe aplicarse una fuerza horizontal de exactamente la magnitud f_c, en la dirección de movimiento.

Este comportamiento fenomenológico recién descrito, que muestra la fuerza de roce, se muestra en la figura 4.6. Empíricamente se ha observado que, para dos superficies (secas) en contacto, tanto la fuerza de fricción dinámica f_c como el máximo de la fricción estática $f_e^{(max)}$, son proporcionales a la fuerza normal entre ambas superficies, o sea,

$$f_c = \mu_c \, F_N$$

y

$$f_e^{(max)} = \mu_e \, F_N \ .$$

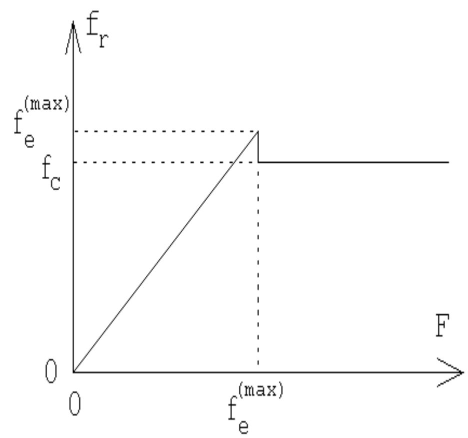


Figura 4.6

$\vec{F}_N$ es la fuerza normal entre las superficies (es decir, perpendicular a la interfase formada por las dos superficies) y μ_c y μ_e son los *coeficientes de fricción*. Los coeficientes de fricción de alguna manera engloban nuestra ignorancia de los distintos parámetros que intervienen en el problema. Siempre se tiene que el coeficiente de roce cinemático es menor al coeficiente de roce dinámico: $\mu_c < \mu_e$. Ambas fuerzas de roce actúan en la dirección paralela a las superficies. El sentido de la fuerza de roce estático es opuesto a la fuerza horizontal neta que actúa sobre el cuerpo, mientras que el sentido de la fuerza de roce dinámico es siempre opuesto al movimiento relativo (y no a la fuerza) entre las dos superficies.

Ilustremos los conceptos anteriores con un ejemplo.

Problema:

Considere el montaje experimental mostrado en la figura 4.7. Supongamos que los coeficientes de fricción estático y cinemático entre la masa M=4 Kg y el plano inclinado son $\mu_e = 0{,}4$ y $\mu_c = 0{,}3$, respectivamente.

¿Qué rango de valores puede tener m para que el sistema se encuentre en equilibrio estático? Si la masa m justo sobrepasa ese máximo, ¿con qué aceleración se moverá el bloque sobre el plano?

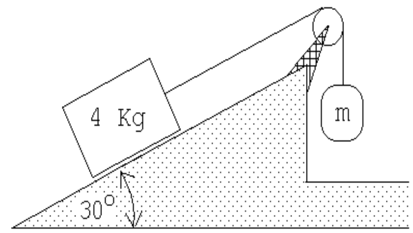


Figura 4.7

Solución:

Resolvamos primero el problema estático. La figura 4.8 muestra el diagrama de cuerpo libre del bloque que se encuentra sobre el plano inclinado. A priori no sabemos en que sentido apunta la fuerza de roce f_r. La hemos dibujado apuntando a lo largo del plano hacia abajo; si después de realizar el cálculo f_r resulta tener un valor negativo entonces la fuerza de roce en realidad apunta en el sentido opuesto al mostrado en la figura. Sea Mg el peso, τ la fuerza ejercida por la tensión de la cuerda y F_N la fuerza normal que ejerce el plano inclinado sobre el bloque. Debido al principio de acción y reacción, F_N también coincide con la magnitud de la fuerza que el bloque ejerce sobre el plano.

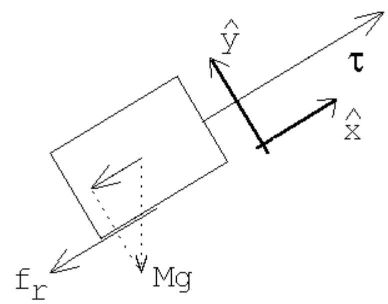


Figura 4.8

Introduzcamos un sistema de coordenadas cartesianas en que el eje $\hat{x}$ es paralelo y el eje $\hat{y}$ normal al plano inclinado (ver figura 4.8). Como el bloque está en reposo, la fuerza neta sobre el bloque debe ser nula, esto es, tanto la fuerza total a lo largo del eje $\hat{x}$ como a lo largo del eje $\hat{y}$. Esto nos da las siguientes ecuaciones:

$$\text{eje } \hat{x}: \qquad \tau - Mg\sin\alpha - f_r = 0$$

$$\text{eje } \hat{y}: \qquad F_N - Mg\cos\alpha = 0 \ ,$$

donde α es el ángulo de elevación del plano inclinado. Como la masa m no acelera, la tensión de la cuerda debe ser $\tau = mg$. Luego, de la primera ecuación se deduce que

$$f_r = mg - Mg\sin\alpha \ .$$

Recordemos que f_r puede ser positivo o negativo: f_r es positivo si $m > M\,\sin\alpha$ y negativo si $m < M\,\sin\alpha$. También se tiene que

$$|f_r| \le \mu_e\, F_N = \mu_e Mg\, \cos\alpha \ .$$

De las ecuaciones anteriores se deduce que

$$\begin{aligned} mg - Mg\sin\alpha &= +f_r \le \mu_e F_N = \mu_e Mg\cos\alpha \qquad \text{si} \quad m > M\sin\alpha \\ -mg + Mg\sin\alpha &= -f_r \le \mu_e F_N = \mu_e Mg\cos\alpha \qquad \text{si} \quad m < M\sin\alpha \ . \end{aligned}$$

o sea el bloque de masa M no se desliza sobre el plano inclinado si

i) para $M \sin\alpha < m$, se cumple que $m \leq M(\mu_e \cos\alpha + \sin\alpha)$,

ii) para $M \sin\alpha > m$, se cumple que $m \geq M(\sin\alpha - \mu_e \cos\alpha)$.

Para los valores numéricos del enunciado, el bloque no se deslizará por el plano si 0.61 kg $< m <$ 3.4 kg.

Analicemos ahora lo que sucede si m sobrepasa (en una magnitud infinitesimal) al valor $M\ (\mu_e \cos\alpha + \sin\alpha)$. En ese caso, el bloque comenzará a deslizarse hacia arriba. La fuerza de roce, por lo tanto, será

$$\vec{f_r} = -\mu_c M g \cos\alpha\ \hat{x} \ \ .$$

La fuerza neta sobre el bloque y su aceleración, en la dirección $\hat{x}$, vendrán dados por

$$F_x = \tau - f_r - Mg \sin\alpha = \tau - \mu_c M g \cos\alpha - Mg\sin\alpha \ \ .$$

y

$$a_x = \frac{F_x}{M} = \frac{\tau}{M} - g(\mu_c \cos\alpha + \sin\alpha)\ .$$

Por otra parte, la fuerza neta sobre la masa m y su aceleración en la dirección vertical, serán

$$F' = \tau - mg \ \ .$$

y

$$a' = \frac{F'}{m} = \frac{\tau}{m} - g = -a_x\ .$$

La última igualdad en la ecuación anterior se debe a que la cuerda es inextensible; por consiguiente, cuando el bloque acelera hacia arriba, la masa m acelerará con la misma magnitud, pero hacia abajo. De las ecuaciones anteriores se deduce que

$$a_x = g\left[\frac{\left(\frac{m}{M} - \mu_c\cos\alpha - \sin\alpha\right)}{\frac{m}{M} + 1}\right]\ .$$

Este resultado también lo podemos escribir de otra manera. Recordemos que m sobrepasa en una magnitud infinitesimal al valor $M\ (\mu_e\ \cos\alpha + \sin\alpha)$, luego

$$m = M\ (\mu_e\ \cos\alpha + \sin\alpha)\ ,$$

o sea,

$$\frac{m}{M} = \mu_e\ \cos\alpha + \sin\alpha\ .$$

Sutituyendo esto en la expresión para a_x se obtiene

$$a_x = g\ \frac{(\mu_e - \mu_c)\cos\alpha}{1 + \mu_e\cos\alpha + \sin\alpha}\ .$$

Con los valores numéricos del enunciado se obtiene $a_x \simeq 0{,}047\, g$.
Note que la tensión de la cuerda es distinta en el caso estacionario que en el caso dinámico. En el primer caso es $\tau = mg$, mientras que en el segundo viene dada por $\tau = m(g - a_x)$.

4.5. Problemas

1. Un automóvil de 2000 kg moviéndose a 80 km/h puede llevarse al reposo en 75 m mediante una fuerza de frenado constante:

   a) ¿Cuánto tiempo tardará en detenerse?

   b) ¿Cuál es la fuerza necesaria para detener el coche en esa distancia? ¿Quién o qué ejerce esa fuerza horizontal que detiene al coche?

2. Una carga de 2 toneladas se levanta mediante una grúa.

   a) Inicialmente, durante cierto intervalo de tiempo, la carga sube con una aceleración $a = 1{,}3\ \mathrm{m/s^2}$. ¿Cuál es la tensión del cable que la soporta?

   b) Después de un breve período de aceleración, la carga sigue elevándose con una velocidad constante. ¿Cuál es la tensión del cable en ese caso?

3. Dos bloques unidos por una cuerda que pasa por una polea sin rozamiento, descansan sobre planos lisos como se muestra en la figura 4.9.

   a) ¿En qué sentido se moverá el sistema?

   b) ¿Cuál es la aceleración de los bloques?

   c) ¿Cuál es la tensión de la cuerda?

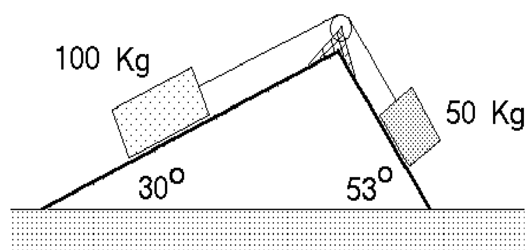


Figura 4.9

4. Una pelota de 2 kg cae libremente llegando, en cierto instante, a tener una rapidez de 6 m/s. ¿Qué fuerza vertical constante se debe aplicar para detenerla en los próximos 5 m? ¿Qué fuerza vertical constante se debe aplicar para detenerla en los próximos 5 s?

5. ¿Qué fuerza $\vec{F}$ debe aplicarse al carro de masa M (ver figura adjunta) para que el carro de masa m_2 no suba ni baje?

   Respuesta: $F = g\,(M + m_1 + m_2)\,\dfrac{m_2}{m_1}$

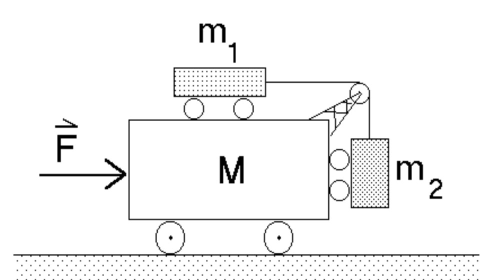


Figura 4.10

6. Considere un péndulo que consiste en una masa m colgada de un hilo de largo ℓ. En presencia de un campo gravitacional constante, al sacar el péndulo de su posición de equilibrio y soltarlo, éste oscilará. Encuentre la aceleración de la masa m en el instante en que el péndulo forma un ángulo θ con la normal.
   Si $\theta \ll 1$, demuestre que

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \omega_0^2\,\theta(t) = 0 \quad ,$$

   con $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$.

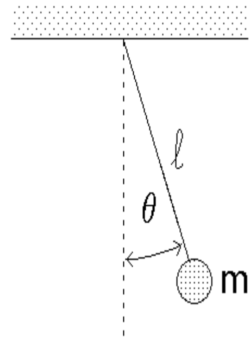


Figura 4.11

7. Considere una masa m adosada a un resorte de constante de restitución k. Sea $x = 0$ la posición de equilibrio del sistema. De acuerdo a la *Ley de Hook*, al desplazar la masa m una distancia x desde su posición de equilibrio, la fuerza ejercida por el resorte sobre la masa es $F = -kx$. Demuestre que

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega_0^2\,x(t) = 0 \ ,$$

   con $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Compare este resultado con el del problema anterior.

8. Un cuerpo de 500 g desliza por un plano inclinado liso. El cuerpo parte del reposo y durante el tercer segundo recorre una distancia de 120 cm. Encuentre el ángulo de inclinación del plano.

9. Una esfera de masa m es mantenida en la posición **A** por dos cuerdas (ver figura 4.12). Sea T_A la tensión de la cuerda indicada. Se corta la cuerda horizontal y el péndulo oscila hasta la posición **B**. ¿Cuál es la razón de las tensiones T_B/T_A ?

   Respuesta: $T_B/T_A = \cos^2\alpha$.

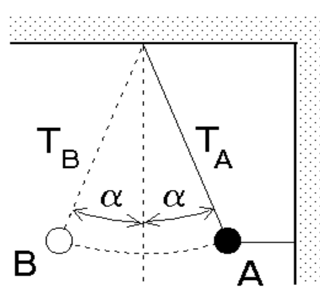


Figura 4.12

10. Considere el montaje mostrado en la figura 4.13, con M=1,650 kg, m=0,150 kg y d_0=4 m. El sistema está en reposo cuando $d = d_0 = 4$ m. ¿Cuánto tiempo transcurrirá antes de que la masa m llegue a la base de M?

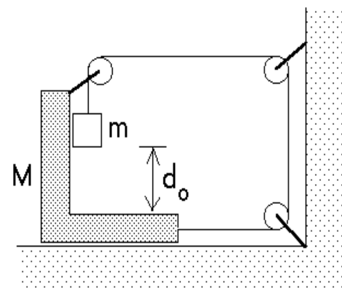


Figura 4.13

11. Un objeto se encuentra sobre un plano liso sin roce y es sometido a una fuerza $\vec{F}$ que varía en función del tiempo de acuerdo al gráfico que se acompaña. Si la masa del objeto es m, obtenga y grafique las siguientes magnitudes:

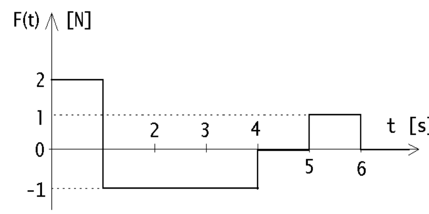


Figura 4.14

   a) Aceleración del objeto en función del tiempo.

   b) Velocidad del objeto, si éste parte del reposo.

   c) Posición del objeto en función del tiempo.

12. Una pesa calibrada en Newtons se coloca sobre una plataforma móvil y se hace deslizar con una rapidez constante de 14 [m/s] sobre un terreno ondulado (ver figura 4.15). Sobre la pesa se coloca una caja que pesa 500 [N].

   a) Cuando la plataforma pasa sobre la cresta de una colina con radio de curvatura de 100 [m], ¿cuál es la lectura de la pesa?

   b) Cuando la plataforma pasa por la parte inferior de una hondonada con radio de curvatura de 80 [m], ¿cuál es la lectura de la pesa?

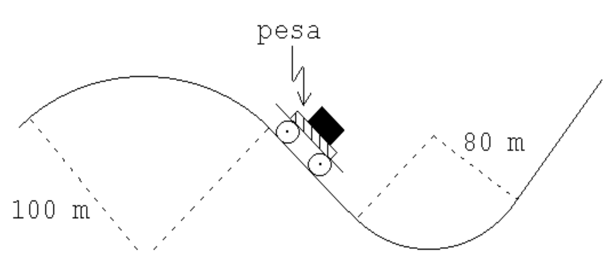


Figura 4.15

Respuesta: (parte b) $\simeq$ 625 [N].

13. Un bloque de masa M es tirado hacia una muralla vertical mediante el uso de una cuerda y poleas como se muestra en la figura. El bloque se desliza sin roce sobre la superficie. La fuerza con que se tira la cuerda es F, el largo de la cuerda es $2L$ y la separación inicial entre el bloque y la muralla es L. Determine el tiempo que transcurre hasta que se encuentren la punta de la cuerda y el bloque.

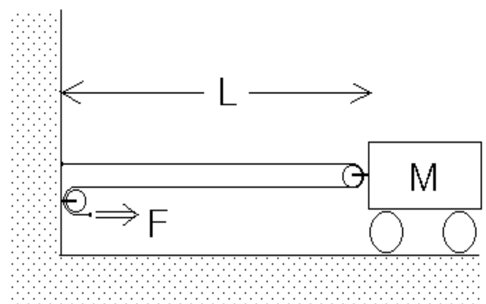


Figura 4.16

14. Un plato cónico de ángulo característico α gira uniformemente entorno a su eje, el cual se mantiene en posición vertical. Una piedrecilla de masa m rota solidariamente con el plato. Suponiendo que no hay roce entre la piedrecilla y la superficie del plato, calcule el radio de la órbita circular que describe la piedrecilla.

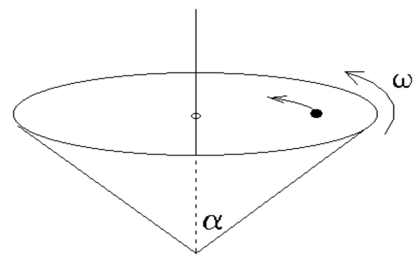


Figura 4.17

15. Una persona se para sobre una balanza dentro del ascensor y observa que ésta registra un peso igual a un 70 % de su peso normal. Si el ascensor y el pasajero tienen masas M y m respectivamente, calcule la tensión a la que está sometido el cable que sujeta el ascensor. Compare esta tensión con la que se produciría si el ascensor acelera con la misma magnitud pero en sentido opuesto.

16. Considere el montaje mostrado en la figura 4.18. Suponga que las masas de la polea y del hilo, así como el rozamiento son despreciables. Se conocen las masas m, M y el ángulo de la cuña. Encuentre la aceleración de la cuña.

Respuesta: $$a = \frac{mg\sin\alpha}{M + 2m(1-\cos\alpha)}\,.$$

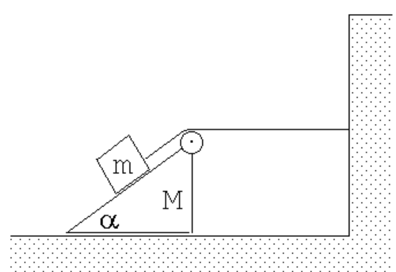


Figura 4.18

17. Dos masas m y M se encuentran unidas por una cuerda de masa despreciable y largo ℓ. En estas condiciones ambas realizan un movimiento circular uniforme (en un plano horizontal) en torno al así llamado *centro de masas* del sistema. Suponga que el período del movimiento rotatorio es T. Encuentre la distancia entre la masa m y el centro de giro (para resolver esta parte del problema no es necesario conocer la definición de centro de masas). Calcule la tensión de la cuerda que une ambas masas.

Respuesta:

$$\tau = \frac{mM}{m+M}\,\ell\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 .$$

18. Una cuña lisa de masa M se desliza bajo la acción de una fuerza horizontal F. Sobre ella se coloca un bloque de masa m.

    a) Dibuje todas las fuerzas que actúan sobre cada una de las masas.

    b) Determine el valor de F para que el bloque más pequeño no resbale sobre la cuña.

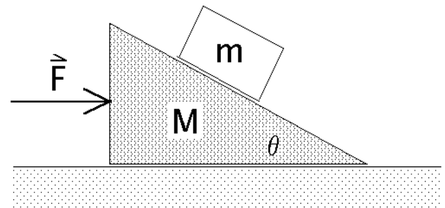


Figura 4.19

19. Dos bloques idénticos y de masa m posan sobre una superficie horizontal pulida. Uno de ellos es tirado mediante una cuerda en cuyo extremo libre se aplica una fuerza horizontal igual a Mg. El otro bloque es también tirado horizontalmente mediante una cuerda pero en cuyo extremo libre cuelga una bola de masa M. Determine cual de los bloques se mueve más rápido si ambos parten del reposo simultáneamente.

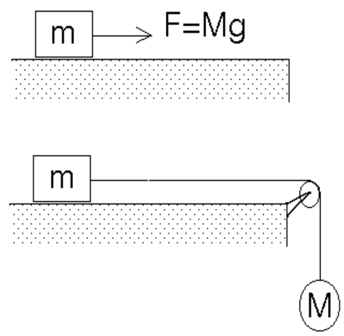


Figura 4.20

20. Un pintor que pesa 900 Newtons trabaja en una silla colgante en un edificio de altura. Al terminar su turno debe volver al último piso para bajar a la calle. Para subir con la silla tira de la cuerda de tal forma que la fuerza que él ejerce sobre el asiento de la silla es de 500 Newtons. La silla misma pesa 300 Newtons.

    a) ¿Cuál es la aceleración del pintor y de la silla?

    b) ¿Cuál es la fuerza total sobre el soporte de la polea?

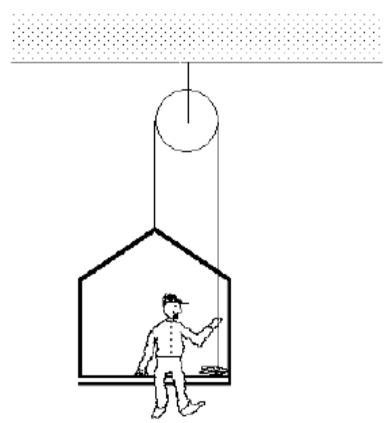


Figura 4.21

Respuestas: a) $a = 2g/3$; b) $F_{tot} = 2000\tilde{\text{N}}$.

21. Considere el montaje mostrado en la figura 4.22. La masa del cuerpo # 1 es $n = 4$ veces mayor que la del cuerpo # 2. Suponga que las masas de las poleas y de los hilos, así como el rozamiento son despreciables por su pequeñez. Cuando el cuerpo # 2 se suelta, la masa # 1 se encuentra a una altura h. ¿Cuál es la aceleración de la masa # 2 mientras m_1 baja? ¿Cuál es la altura máxima del suelo H a la que subirá la masa # 2? (¡La altura máxima no es $2h$!)

Respuesta: $H = 6hn/(n + 4)$.

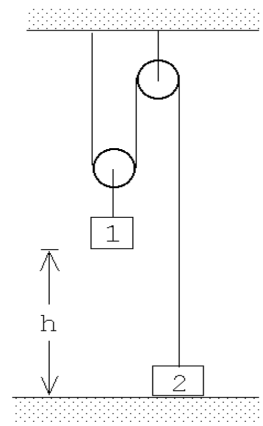


Figura 4.22

22. Una masa m se encuentra apoyada sobre una cuña de masa M y ángulo de elevación α. La cuña se puede desplazar horizontalmente sin roce sobre un plano. Dos guías restringen el movimiento de la masa m de manera que sea sólo en dirección vertical. No hay roce entre la masa m y la cuña como tampoco entre las guías y la masa m.

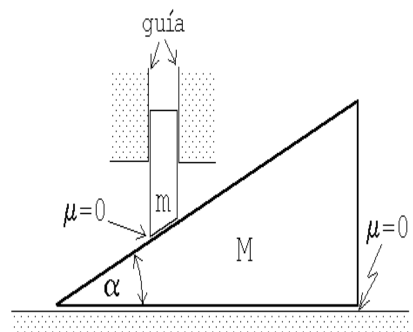


Figura 4.23

a) Encuentre la relación que existe entre la aceleración vertical a_m de la masa m y la aceleración horizontal a_M de la cuña.

b) Haga los diagramas de cuerpo libre de la masa m y de la cuña M.

c) Encuentre la aceleración a_M de la cuña.

d) Si entre la cuña y el suelo hay roce ¿cuánto es el valor mínimo que debe valer el coeficiente de roce estático μ_e para que la cuña no acelere?

23. Considere dos masas M y m unidas por un hilo que pasa por una polea ideal tal como se muestra en la figura adjunta. Inicialmente la masa M se sujeta con un hilo auxiliar (que no se muestra en la figura) y el sistema se encuentra en reposo. En cierto instante el hilo auxiliar se corta. Demuestre que la aceleración de la masa M es (con el eje $\hat{z}$ apuntando hacia arriba):

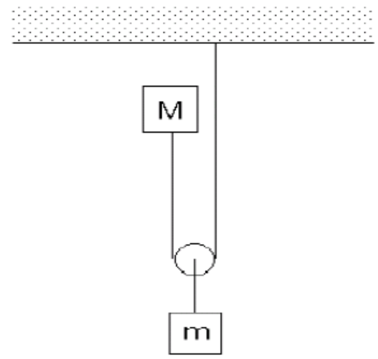


Figura 4.24

$$\vec{a} = -\frac{4M + 2m}{4M + m} g\hat{z} \ .$$

Demuestre que esta expresión da el valor correcto en los límites $M \gg m$ y $m \gg M$.

24. Dos objetos 1 y 2, de igual masa, están atados a los extremos de una cuerda ideal de largo L. El conjunto descansa sobre un disco que gira en un plano horizontal con velocidad angular constante, en torno a su centro (ver figura). Suponga que no existe fricción entre el disco y el objeto 1, pero existe fricción entre el objeto 2 y la superficie del disco. Los coeficientes de fricción estético y cinético entre la masa 2 y el disco son μ_e y μ_c, respectivamente.

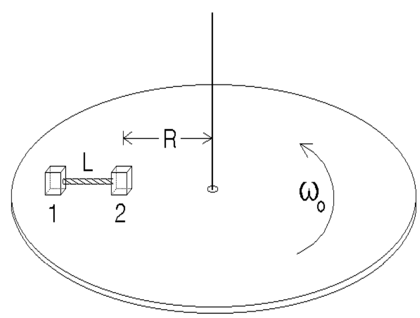


Figura 4.25

Se observa que cuando el disco gira con velocidad angular ω_0, la cuerda se mantiene tensa y alineada en la dirección radial. En esta condición el objeto 2 está en reposo a una distancia R del eje de rotación. Cuando la velocidad angular es mayor que ω_0 el objeto 2 (y también el 1) resbala sobre el disco. Calcule el valor de ω_0.

25. Tal como el campo gravitacional ejerce sobre una masa m una fuerza, un campo eléctrico $\vec{E}$ ejerce una fuerza sobre una carga q. Esta última viene dada por

$$\vec{F} = q\,\vec{E}\ .$$

(En el sistema internacional de unidades SI, la unidad para la carga es el *Coulomb* [C] y la del campo eléctrico *Volt/metro= Newton/Coulomb*, siendo las abreviaciones [V/m]=[N/C]. Un campo de 1 [V/m] ejerce sobre una carga de 1 [C] una fuerza de 1 [N].)

Considere un electrón, inicialmente en reposo, que es acelerado entre dos placas (un condensador) separadas por una distancia de 1 cm. En el espacio entre las dos placas hay un campo eléctrico de 900 Volt/cm.

a) ¿Cuál es su velocidad terminal (la velocidad con que emerge del primer condensador)?

b) Suponga ahora que el electrón de la parte a), después de ser acelerado y emerger (por un pequeño agujero) del espacio entre las dos placas, ingresa a una región de largo $L = 3cm$ en que existe un campo eléctrico transversal de magnitud $|\vec{E}_\perp| =$ 30 Volt/cm. ¿Cuál será el ángulo de deflexión θ con que emergerá el electrón del segundo condensador? (Ver figura 4.26). (En este problema Usted puede despreciar la interacción gravitatoria, es decir, puede suponer que $g = 0$. La carga de un electrón (universalmente denotada con la letra e) es $e = -1,60 \cdot 10^{-19}$ [C] y su masa $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ [Kg].)

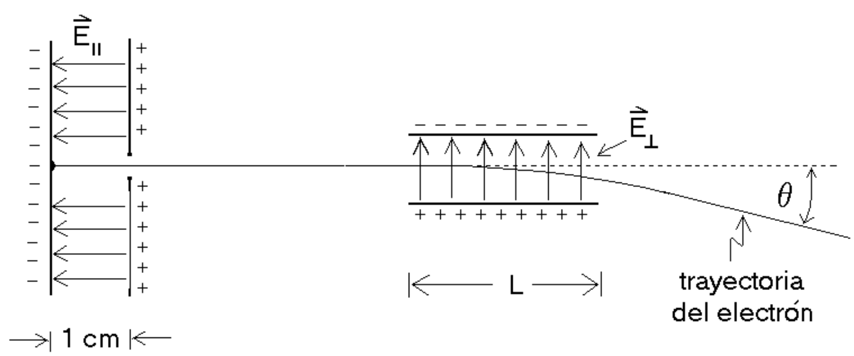


Figura 4.26

26. Un pulso de iones de Cs^+ (simplemente ionizados) que han sido acelerados desde el reposo por un campo eléctrico de 1 (statvolt/cm) a lo largo de 0,33 cm, tarda un tiempo $\Delta t = 87 \cdot 10^{-9}$ s para recorrer 1 mm después del proceso de aceleración (ver figura 4.27).

a) Encuentre la masa del Cs^+.

b) Si en lugar de Cs^+ se realiza el experimento con deuterones, ¿cuánto sería el tiempo de travesía Δt ?

c) Suponiendo que los protones y los neutrones tienen la misma masa, encuentre la masa de un neutrón.

d) Con este dispositivo experimental, ¿será posible distinguir entre deuterones y partículas α ?

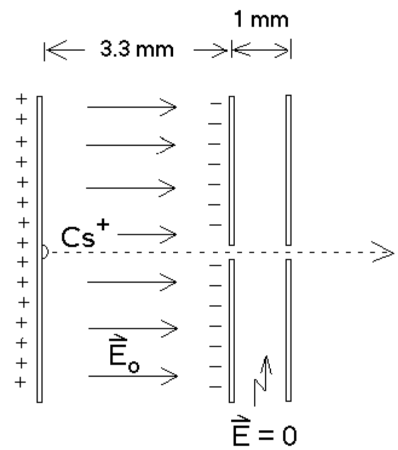


Figura 4.27

(Un deuterón es un núcleo atómico formado por un protón y un neutrón; una partícula α es equivalente a un núcleo de un átomo de He y consiste en dos protones y dos neutrones. El núcleo de cesio consta de 58 protones y 84 neutrones, el ión Cs^+ corresponde a un átomo de cesio que ha perdido un electrón).

27. Considere una carga q que en el instante $t = 0$ se encuentra en el origen y en reposo. A partir de $t = 0$ se le aplica un campo eléctrico alterno de la forma

$$\vec{E} = E_0 \sin(\omega t)\,\hat{x} \quad .$$

Encuentre la *ecuación diferencial* que describe el movimiento de la carga y encuentre la expresión más general para la posición $x(t)$.

28. Un bloque de masa M sube por un plano inclinado cuyo ángulo de elevación es α. Los coeficientes de roce estático y cinético entre la masa M y el plano son μ_e y μ_c, respectivamente.

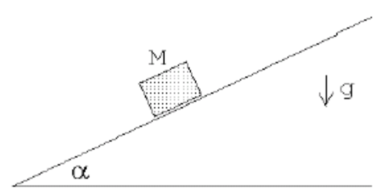


Figura 4.28

a) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el bloque, si parte con velocidad v_0 desde la base del plano?

b) ¿Qué condición debe satisfacerse para que el bloque vuelva a descender?

c) En caso de cumplirse la condición anterior, ¿con qué velocidad llegará a la base del plano inclinado?

29. Una masa de 100 kg se empuja a lo largo de una superficie en la cual el roce es despreciable mediante una fuerza $\vec{F}$, de modo que su aceleración es de 6 m/s^2 (ver figura). Una masa de 20 kg desliza a lo largo de la parte superior de la masa de 100 kg y tiene una aceleración de 4 m/s^2 (por lo tanto desliza hacia atrás respecto a la masa de 100 kg).

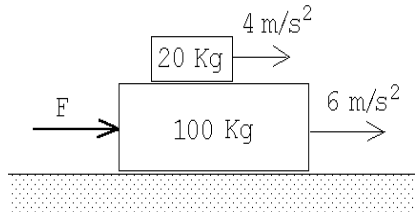


Figura 4.29

   a) ¿Qué fuerza de rozamiento ejerce la masa de 100 kg sobre la masa de 20 kg?

   b) ¿Cuál es la fuerza neta sobre la masa de 100 kg? ¿Cuál es la fuerza $\vec{F}$?

   c) Una vez que la masa de 20 kg se cae de la masa de 100 kg, ¿cuál es la aceleración de la masa de 100 kg?

30. Sea μ el coeficiente de roce estático entre la masa m y el carro. ¿Cuál es la fuerza mínima que debe aplicarse al carro para que la masa m no caiga?
Respuesta: $F^{min} = (M + m)g/\mu$.

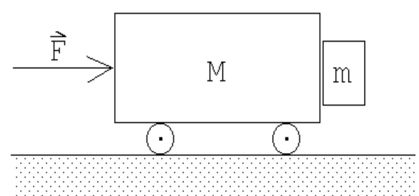


Figura 4.30

31. Las masas A y B son de 10 y 5 Kg respectivamente. El coeficiente de roce de A con la mesa es $\mu = 0{,}2$. Encuentre el mínimo valor de la masa C que impide el movimiento de A. Encuentre la aceleración de A si se saca C.

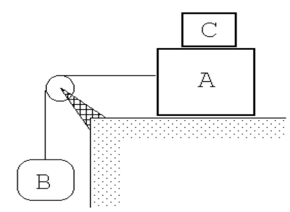


Figura 4.31

32. Una carretera está peraltada de modo que un automóvil, desplazándose a 80 Km/h, puede tomar la curva de 30 m de radio, incluso si existe una capa de hielo equivalente a un coeficiente de fricción aproximadamente cero.

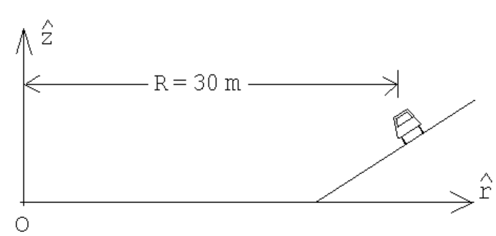
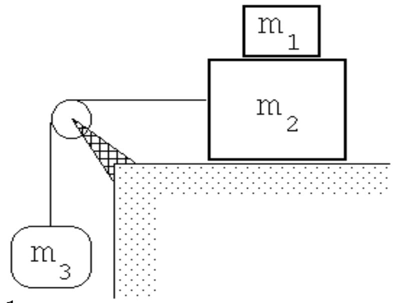


Figura 4.32

Determinar el intervalo de velocidades a que un automóvil puede tomar esta curva sin patinar, si los coeficientes de fricción estática y cinemática, entre la carretera y las ruedas, son $\mu_e = 0{,}3$ y $\mu_c = 0{,}26$, respectivamente.

33. ¿Cuál es el máximo valor que puede tener m_3 para que m_1 no se caiga si el coeficiente de fricción estático entre m_1 y m_2 es μ_e, y el de fricción cinemática entre m_2 y la mesa es μ_c?
Respuesta:



$$m_3^{max} = \begin{cases} (m_1 + m_2)\,\frac{\mu_c+\mu_e}{1-\mu_e} & \text{si} \quad \mu_e < 1 \\ \infty & \text{si} \quad \mu_e > 1 \end{cases} .$$

Figura 4.33

34. Un bloque de masa M, inicialmente en reposo, resbala por un plano inclinado cuyo ángulo de elevación es θ. Después de recorrer una distancia D el cuerpo lleva una velocidad igual al 50 % de la velocidad que habría adquirido en ausencia de roce. Encuentre una expresión para el coeficiente de roce cinemático μ entre el plano y el bloque.

35. Sea μ_c el coeficiente de roce cinético entre un escobillón, cuya masa es m, y el piso. Un hombre ejerce una fuerza $\vec{F}$ a lo largo del palo del escobillón. Encuentre $|\vec{F}|$ en función de θ. ¿Existe una solución para todo θ entre 0° y 90°? (El barrendero avanza con velocidad uniforme.)

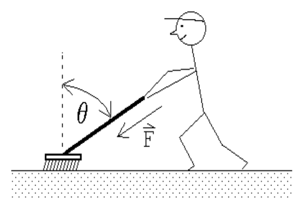


Figura 4.34

36. Una partícula de masa M descansa sobre un plano inclinado que forma un ángulo α con la horizontal. Si el coeficiente de roce estático es μ_e, encuentre la mínima fuerza horizontal $\vec{F}_{min}$ transversal a la pendiente del plano, que se requiere para que la partícula comience a moverse.

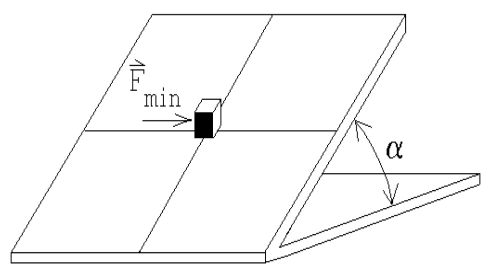


Figura 4.35

Respuesta:

$$F_{min} = \begin{cases} Mg\,\sqrt{\mu_e^2 \cos^2\alpha - \sin^2\alpha} & \text{si} \quad \mu_e > \tan\alpha \\ 0 & \text{si} \quad \mu_e < \tan\alpha \end{cases} .$$

37. Considere un paquete, de masa m, que se mueve sin roce y con rapidez v_0 sobre una superficie de hielo. En cierto instante el paquete entra en contacto con el tablero horizontal de un trineo de masa M, que a su vez puede deslizarse sin roce sobre el hielo.

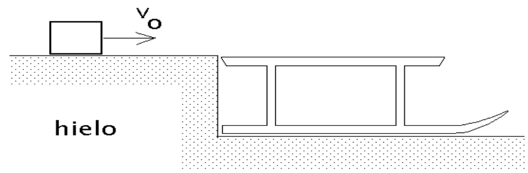


Figura 4.36

Suponga que el coeficiente de roce entre el paquete y el trineo es μ y que el paquete se desliza sobre el trineo hasta finalmente quedar en reposo con respecto a éste.

a) Una vez que el paquete queda en reposo con respecto al trineo, ¿cuál es la velocidad del trineo?

b) ¿Cuánto tiempo demora el paquete en quedar en reposo con respecto al trineo?

c) Evalúe el momento lineal del paquete antes de que entre en contacto con el trineo y compárelo con el momento lineal del conjunto (trineo más paquete) una vez que el paquete está en reposo respecto al trineo.

(El momento lineal de un objeto es el producto de su masa y velocidad).

38. Con dos bloques A y B se arman las configuraciones I y II que se indican en la figura adjunta. Suponga que las cuerdas y poleas tienen masas despreciables y el coeficiente de roce μ es constante y es el mismo entre todas las superficies en contacto. El valor de las fuerzas aplicadas F_I y F_{II} es tal que el bloque A se mueve con velocidad constante en ambas situaciones. Calcule el cuociente entre el módulo de F_I y F_{II}.

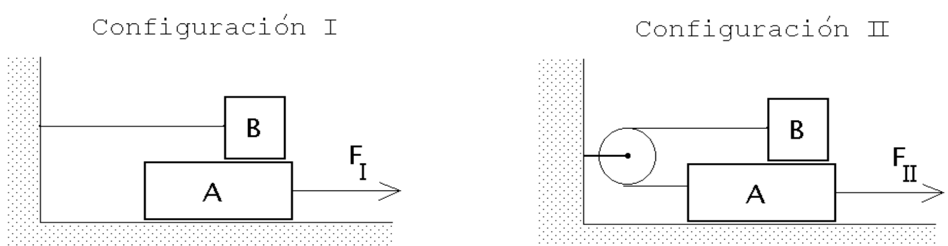


Figura 4.37

39. Considere un cuerpo que cae en la atmósfera. El aire se opone al movimiento con una fuerza que es proporcional al cuadrado de la velocidad, es decir

$$\vec{F}_{roce} = -kv\vec{v} \quad , \qquad\qquad v = |\vec{v}| \; .$$

Encuentre la velocidad terminal.

40. Cuando un cuerpo cae en un líquido y el flujo es laminar (es decir, no es turbulento), el fluído se opone al movimiento con una fuerza que es proporcional a la velocidad, es decir

$$\vec{F}_{roce} = -\eta\vec{v} \quad , \qquad\qquad v = |\vec{v}| \; .$$

Encuentre la velocidad terminal. (El coeficiente η depende del fluído y de la forma del objeto).

41. Sea μ el coeficiente de roce cinemático que actúa entre las superficies de la masa m y las cuñas (ver figura adjunta). Entre las cuñas y el suelo el roce es nulo. Suponga que el valor del roce μ es tal que el sistema no se encuentra en equilibrio (es decir, las cuñas se separan y el bloque baja). Sea θ el ángulo, M la masa de las cuñas y m la masa del bloque. Determine la aceleración del bloque m.

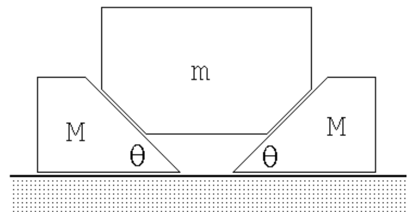


Figura 4.38

42. Sobre un plano inclinado liso, que forma un ángulo θ con la horizontal, se desliza un bloque partiendo del reposo. Después de recorrer una distancia D, el bloque entra en un tramo rugoso. El bloque se detiene luego de recorrer una distancia D en dicho tramo. Calcule el coeficiente de roce cinético entre el bloque y la superficie rugosa.

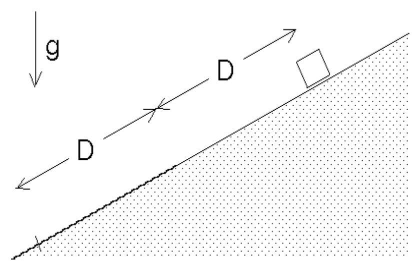


Figura 4.39

4.6. Solución a algunos de los problemas

Solución al problema 12a

Al pasar la plataforma por la cresta de la colina hay dos fuerzas actuando sobre la caja:

i) El peso, $\vec{W} = -Mg\hat{z}$. (Hemos elegido al eje $\hat{z}$ apuntando hacia arriba, M es la masa de la caja.)

ii) La reacción de la pesa sobre la caja: $\vec{F}_r = F_r\hat{z}$.

La fuerza neta es, por lo tanto,

$$\vec{F}_{\text{neta}} = (F_r - Mg)\,\hat{z}\ .$$

Por otra parte, sabemos que la caja está realizando un movimiento circular de radio R con rapidez constante, o sea, hay una fuerza neta sobre la caja que act'ua hacia el centro del círculo (la fuerza centrípeta), que es

$$\vec{F}_{\text{cent}} = -\frac{Mv^2}{R}\,\hat{z}\ .$$

La fuerza centrípeta y la fuerza neta deben ser iguales, es decir, se tiene que

$$F_r - Mg = -\frac{Mv^2}{R} \ .$$

Despejando F_r se obtiene

$$\begin{aligned} F_r &= Mg\left(1 - \frac{v^2}{gR}\right) \\ &= 500\text{N}\left(1 - \frac{14^2}{9,81 \cdot 100}\right) \simeq 400 \text{ N} \ . \end{aligned}$$

Solución al problema 16

Observe primero que, al moverse la cuña hacia la derecha, el bloque m se moverá en diagonal (hacia la derecha y hacia abajo). Sea $\vec{r}_m$ el vector de traslación de m cuando la cuña se traslada en una magnitud s. Se tiene (ver figura 4.40) que

$$\vec{r}_m = s(1 - \cos\alpha)\,\hat{x} - s\sin\alpha\;\hat{y} \ .$$

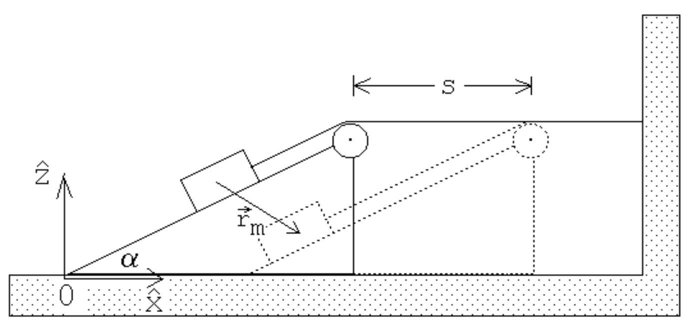


Figura 4.40

Por supuesto que la aceleración de la cuña M y del bloque m están relacionados. Si la aceleración de la cuña es

$$\ddot{\vec{r}}_M = a\,\hat{x} \ ,$$

entonces

$$\ddot{\vec{r}}_m = a\,(1 - cos\alpha)\,\hat{x} - a\,\sin\alpha\;\hat{z} \ . \tag{4.3}$$

Sea τ la tensión de la cuerda y $\vec{R}$ la fuerza que la cuña ejerce sobre el bloque m. Debido a que no hay roce entre las superfiecies, esta fuerza de reacción $\vec{R}$ es normal al plano inclinado.

La figura 4.41 muestra el diagrama de cuerpo libre para la masa m. Las componentes horizontal y vertical de la fuerza neta que actúa sobre el bloque m son

$$F_x^{(\mathrm{m})} = \tau\cos\alpha - R\sin\alpha \qquad (4.4)$$

y

$$F_z^{(\mathrm{m})} = -mg + \tau\sin\alpha + R\cos\alpha\ , \qquad (4.5)$$

respectivamente.

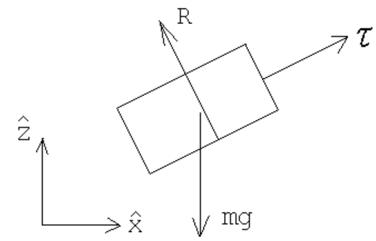


Figura 4.41

Usando la segunda ley de Newton y las ecuaciones (4.3), (4.4) y (4.5), se encuentran las relaciones

$$\tau\cos\alpha - R\sin\alpha = m\,a\,(1 - cos\alpha) \qquad (4.6)$$

y

$$-mg + \tau\sin\alpha + R\cos\alpha = -m\,a\,\sin\alpha \qquad (4.7)$$

Sobre la cuña actúan 4 fuerzas:

i) El peso $-Mg\hat{z}$.

ii) Una fuerza (de reacción) $\vec{\tilde{R}}$ que el suelo ejerce sobre la cuña. Esta fuerza, cuya magnitud no nos interesará, actúa en la dirección $+\hat{z}$.

iii) Una fuerza que el bloque m ejerce sobre la cuña. Por el principio de acción esta fuerza es $-\vec{R}$, o sea, las componentes horizontal y vertical son $R\sin\alpha$ y $-R\cos\alpha$, respectivamente.

iv) La fuerza ejercida por la roldana sobre la cuña (que es igual a la fuerza ejercida por la cuerda sobre la roldana). De la figura 4.42 se deduce que la fuerza total que ejerce la cuerda sobre la roldana es

$$\vec{F}_c = \tau(1-\cos\alpha)\hat{x} - \tau\sin\alpha\hat{z}\ .$$

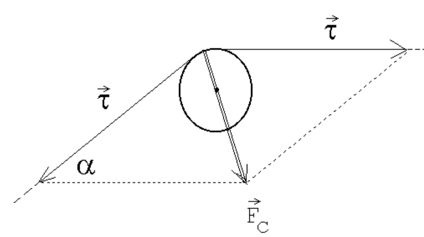


Figura 4.42

La cuña sólo se mueve a lo largo de la horizontal; por eso sólo nos interesa esa componente de la fuerza neta. Usando la segunda ley de Newton se obtiene

$$R\sin\alpha + \tau(1-\cos\alpha) = Ma\ . \qquad (4.8)$$

Las tres ecuaciones de movimiento (4.6), (4.7) y (4.8) con las tres incógnitas a, τ y R, permiten resolver el problema. Sumando (4.6) y (4.8) se obtiene

$$\tau = ma(1\cos\alpha) + Ma \qquad (4.9)$$

Multiplicando (4.6) por $\cos\alpha$ y (4.7) por $\sin\alpha$ y sumando ambas ecuaciones se obtiene

$$\tau = mg\sin\alpha + ma(\cos\alpha - 1) \tag{4.10}$$

De (4.9) y (4.10) se deduce finalmente que

$$a = \frac{mg\sin\alpha}{M + 2m(1-\cos\alpha)} \ .$$

Solución al problema 22

La relación entre las aceleraciones es $a_m = a_M \tan\alpha$. Los diagramas de cuerpo libre de la masa m y de la cuña se muestran en la figura 4.43. F_N es la fuerza entre la masa m y la cuña.

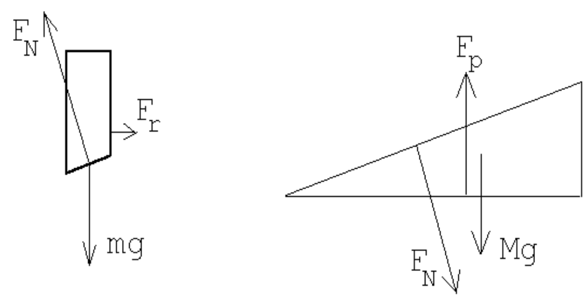


Figura 4.43

Debido a que no hay roce esta fuerza es normal al plano incliado de la cuña. F_r es la fuerza que la guía ejerce sobre el bloque m (tal fuerza es perpendicular a la guía.) F_p es la fuerza que el piso ejerce sobre la cuña; en ausencia de roce esta fuerza es perpendicular al piso.

Las ecuaciones de movimiento para la masa m y la cuña son:

$$mg - F_N\,\cos\alpha = ma_m$$

y

$$F_N\,\sin\alpha = Ma_M \ .$$

Usando la relación entre las aceleraciones a_m y a_M, podemos despejar a_M, obteniéndose

$$a_M = g\,\frac{m\,\tan\alpha}{M + m\,\tan^2\alpha} \ .$$

Si, debido al roce entre el suelo y la cuña el sistema está en equilibrio, entonces la suma de las fuerzas sobre m debe ser nula. Esto permite evaluar F_N de inmediato:

$$F_N\,\cos\alpha = mg \ .$$

Al diagrama de cuerpo libre de la cuña hay que agregar una fuerza de roce f_r horizontal (apuntando hacia la izquierda). Que la suma de las fuerzas horizontales sobre la cuña sean nulas nos da la relación

$$F_N\,\sin\alpha = f_r \ ,$$

o sea,

$$mg\,\tan\alpha = f_r\ .$$

Por otra parte, la fuerza de roce debe satisfacer la relación

$$f_r \le \mu_e\,F_p = \mu_e(Mg + F_N\,\cos\alpha) = \mu_e\,(M+m)g\ .$$

De las relaciones anteriores se desprende que

$$mg\,\tan\alpha = \mu_e^{\rm min}\,(M+m)\,g\ ,$$

o sea,

$$\mu_e^{\rm min} = \frac{m}{m+M}\ \tan\alpha\ .$$

Solución al problema 24

Del hecho que la velocidad angular es constante y las masas 1 y 2 siguen trayectorias circulares, se deduce que la fuerza neta que actúa sobre ellas es

$$\vec{F}_1 = -m\omega_0^2\,(R+L)\,\hat{r}$$

y

$$\vec{F}_2 = -m\omega_0^2\,R\,\hat{r}\ ,$$

respectivamente. Aquí m es la masa de cada una de partículas y $\hat{r}$ es un vector unitario que apunta en la dirección radial.
La única fuerza radial real que actúa sobre la masa 1 es la que ejerce la cuerda, luego

$$\tau = m\,\omega_0^2\,(R+L)\ ,$$

donde τ es la tensión de la cuerda.
Sobre la partícula 2 actúan dos fuerzas radiales: la tensión de la cuerda $\tau\hat{r}$ y la fuerza de roce $-f_r\,\hat{r}$. Se tiene

$$\tau - f_r = -m\omega_0^2 R$$

o sea,

$$f_r = \tau + m\omega_0^2 R = m\omega_0^2\,(2R+L)\ .$$

Para que las masas no se deslicen la fuerza de roce debe satisfacer la desigualdad $f_r \le \mu_e mg$.
De las dos últimas ecuaciones se deduce que

$$m\omega_0^2\,(2R+L) \le \mu_e mg\ .$$

La velocidad angular límite a partir de la cual las masas comienzan a deslizarse es, por lo tanto,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\mu_e g}{2R+L}}\ .$$

Solución al problema 26

Sea M la masa, a la aceleración y t_* el tiempo que tardan las partículas de Cs^+ en atravesar el *condensador*. La carga de cada ión de cesio es $q = -e$, donde $e = -1,60 \cdot 10^{-19}$ [C] es la carga de un electrón (ver problema 25). Durante el proceso de aceleración, la fuerza que actúa sobre cada ión es $F = qE_0$. Usando la segunda ley de Newton se obtiene que $q\,E_0 = Ma$. La aceleración del átomo de cesio (mientras se mueve al interior del condensador) es, por lo tanto, $a = q/(ME_0)$. El movimiento es uniformemente acelerado.
Durante el intervalo de tiempo $[0, t_*]$ el ión alcanza a recorrer una distancia

$$s_1 = \frac{1}{2} a t_*^2 = 0,33 \ \text{cm},$$

siendo la velocidad con que emerge del condensador $v_1 = at_*$. A continuación los iones de cesio atraviesan con esa velocidad constante una región de ancho $s_2 = 0,1$ cm, tardando para ello un tiempo $\Delta t = 87 \cdot 10^{-9}$ s. Se tiene que

$$v_1\,\Delta t = at_*\,\Delta t = s_2 \ ,$$

o sea

$$t_* = \frac{s_2}{a\Delta t} \ .$$

Por otra parte

$$t_*^2 = \frac{2s_1}{a} \ .$$

Eliminando t_* de las dos últimas ecuaciones se encuentra

$$a = \frac{s_2^2}{2s_1(\Delta t)^2} \ .$$

Igualando las dos expresiones que tenemos para la aceleración podemos despejar M (la masa de cada ión de cesio):

$$M = \frac{2|e|E_0 s_1(\Delta t)^2}{s_2^2} = 2,4 \cdot 10^{-25} \ \text{Kg} \ .$$

Cada ión de Cs^+ está formado por 58 protones, 84 neutrones y 57 electrones. La masa de los electrones es despreciable frente al de los protones y neutrones y por consiguiente, lo ignoraremos. La masa de un neutrón es muy parecida a la de un protón y, en primera aproximación, podemos suponer que son iguales. En lo que a masa respecta, el ión de cesio lo podemos pensar como un aglomerado de 58+84=142 nucleones. (Nucleones es el nombre genérico que se le da a los protones y neutrones). Dividiendo la masa del ión de cesio por 142 se encuentra que la masa de un nucleón es aproximadamente $1{,}69 \cdot 10^{-27}$ Kg, valor que difiere en $\sim 1\,\%$ del valor medido usando otros métodos.

Al acelerar deuterones (un protón + un neutrón) en lugar de iones de cesio, sólo cambia la masa ya que, igual que en el caso del cesio, la carga neta del deuterón es $+|e|$ (o sea, la fuerza que actúa sobre la partícula acelerada en ambos casos es la misma). El tiempo de travesía Δt es proporcional a $\sqrt{M}$ luego, al usar deuterones en lugar de iones de cesio, el tiempo de travesía será

$$\Delta t_d = \Delta t_{Cs} \sqrt{\frac{142}{2}} \simeq 10^{-8} \ \ s \ .$$

El dispositivo experimental no es capaz de distinguir entre deuterones y partículas α. La partícula α (2 protones + 2 neutrones) tiene el doble de la masa del deuterón y también el doble de la carga neta. Estas dos modificaciones se cancelen en cuanto a la aceleración respecta, siendo por consiguiente ambas iguales.

Solución al problema 27

La fuerza que actúa sobre la carga (ver problema 25) es

$$\vec{F}(t) = q\vec{E}(t) = E_0 \sin(\omega t)\, \hat{x} \ .$$

Usando la segunda ley de Newton obtenemos las *ecuaciones de movimiento*:

$$m\, \ddot{x}(t) = qE_0 \sin(\omega t)$$

$$m\, \ddot{y}(t) = 0$$

y

$$m\, \ddot{z}(t) = 0 \ .$$

De las dos últimas, usando las condiciones iniciales se deduce que

$$y(t) = z(t) = 0 \ \ \forall t \ ,$$

o sea, el movimiento sólo ocurre a lo largo del eje x.

Integremos la primera ecuación de movimiento. Se tiene

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \dot{x}(0) + \int_0^t \frac{qE_0}{m} \sin(\omega t)\, dt \\ &= 0 - \frac{qE_0}{m\omega} \cos(\omega t) \Big|_0^t \\ &= \frac{qE_0}{m\omega} \left(1 - \cos(\omega t)\right) \ . \end{aligned}$$

La posición de la carga en función del tiempo se obtiene integrando la última ecuación:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \frac{qE_0}{m\omega} \int_0^t \left(1 - \cos(\omega t)\right) dt \\ &= 0 + \frac{qE_0}{m\omega} \left(t - \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \right) \Big|_0^t \\ &= \frac{qE_0}{m\omega^2} \left(\omega t - \sin(\omega t)\right) \ . \end{aligned}$$

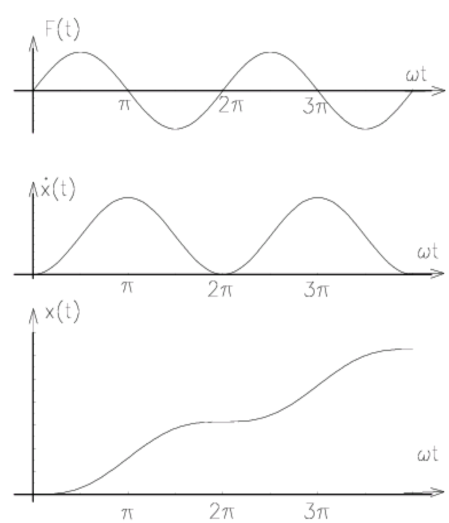


Figura 4.44

La figura 4.44 muestra un gráfico de la fuerza, la velocidad y la posición de la carga en función del tiempo.

Solución al problema 32

De acuerdo con el enunciado, si la rapidez del coche es $v_0 = 80$ km/h, no actuará ninguna fuerza de roce. Como la trayectoria del automóvil es circular, se tiene que el movimiento es acelerado y, por lo tanto, sobre el coche actúa una fuerza neta hacia el centro de giro 0 (la fuerza centrípeta):

$$\vec{F}_c = -\frac{mv_0^2}{R}\,\hat{r} \ .$$

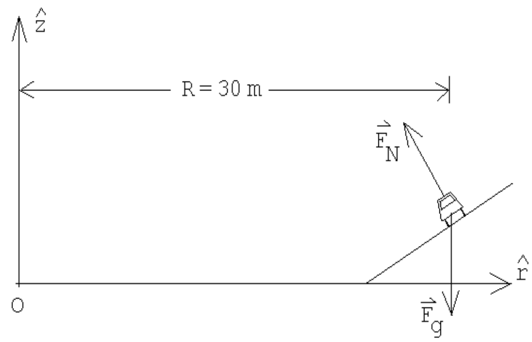


Figura 4.45

Las fuerzas "reales" que actúan sobre el auto (y cuya suma dan origen a la fuerza centrípeta) son la fuerza de gravedad

$$\vec{F}_g = -mg\,\hat{z}$$

y la fuerza normal que la carretera ejerce sobre el coche:

$$\vec{F}_N = F_N\,\cos\theta\,\hat{z} - F_N\,\sin\theta\,\hat{r} \ .$$

Por supesto que

$$\vec{F}_c = \vec{F}_g + \vec{F}_N \ ,$$

o sea,

$$-\frac{mv_0^2}{R}\,\hat{r} = -mg\,\hat{z} + F_N\,\cos\theta\,\hat{z} - F_N\,\sin\theta\,\hat{r} \ .$$

Igualando las componentes se deduce que

$$F_N\,\cos\theta = mg$$

y

$$F_N\,\sin\theta = \frac{mv_0^2}{R} \ .$$

Tomando el cuociente entre estas ecuaciones se encuentra una expresión que nos permite encontrar el ángulo del peralte de la cerretera θ:

$$\tan\theta = \frac{v_0^2}{Rg} \ .$$

Sea v_1 la máxima velocidad que el automóvil puede tener sin que se deslize lateralmente por la carretera. Si el automóvil avanza von rapidez v_1, entonces además de la fuerza de gravedad y la fuerza normal, actuará también una fuerza de roce estática $\vec{F}_r$:

$$\vec{F}_r = -F_r\,\cos\theta\,\hat{r} - F_r\,\sin\theta\,\hat{z} \ .$$

Cuando el automóvil avanza con velocidad máxima v_1, el valor de la fuerza de roce tomará el valor máximo posible $F_r = \mu_e F_N$. (observe que el coeficiente de roce que debe usarse es el estático y no el cinemático). Se tiene

$$\vec{F}_c = -\frac{mv_1^2}{R}\,\hat{r} = -mg\hat{z} + F_N\,\cos\theta\,\hat{z} - F_N\,\sin\theta\,\hat{r} - F_r\,\cos\theta\,\hat{r} - F_r\,\sin\theta\,\hat{z}\ ,$$

o sea

$$-\frac{mv_1^2}{R} = -F_N\,\sin\theta - F_r\,\cos\theta$$

y

$$0 = -mg + F_N\,\cos\theta - F_r\,\sin\theta\ .$$

Con $F_r = \mu_e F_N$ se encuentra

$$\frac{mv_1^2}{R} = F_N\,(\sin\theta + \mu_e\,\cos\theta)$$

y

$$mg = F_N\,(\cos\theta - \mu_e\,\sin\theta)\ .$$

Eliminando F_N y despajando v_1 de las dos últimas ecuaciones se obtiende finalmente

$$v_1^2 = Rg\left(\frac{v_0^2 + Rg\mu_e}{Rg - \mu_e v_0^2}\right)\ .$$

Este resultado es válido mientras $Rg > \mu_e v_0^2$. Cuando $Rg < \mu_e v_0^2$, el coche nunca se deslizará lateralmente hacia afuera y la velocidad máxima a la que se puede transitar por la carretera, en ese caso, es infinita.

Sea v_2 la mínima velocidad con que se puede transitar sobre la carretera sin deslizarse lateralmente hacia el interior. El análisis en este caso es análogo al anterior, excepto que la fuerza de roce estática ahora actúa en la dirección opuesta. Para v_2 se encuentra

$$v_2^2 = Rg\left(\frac{v_0^2 - Rg\mu_e}{Rg + \mu_e v_0^2}\right)\ .$$

Este resultado es válido mientras $Rg\mu_e < v_0^2$. Cuando $Rg\mu_e > v_0^2$, el coche nunca se deslizará lateralmente hacia el interior, pudiendo permanecer incluso en reposo (siendo, en ese caso, $v_2 = 0$).

Para los valores numéricos del enunciado las velocidades máxima y mínima con que se puede transitar por la carretera son $v_1 = 123$ km/h y $v_2 = 59$ km/h.

Solución al problema 39

Sea v_* la velocidad terminal que un cuerpo adquiere al caer en la atmósfera. Al caer con la velocidad terminal el cuerpo se moverá con velocidad constante. O sea, la aceleración y la fuerza neta sobre el cuerpo deben ser nulas. Las únicas fuerzas que actúan sobre el cuerpo son la fuerza de gravedad $\vec{F}_g = -mg\hat{z}$ y la fuerza de roce $\vec{F}_{roce} = -kv_* \, \vec{v}_* = kv_*^2 \, \hat{z}$. Se tiene

$$\vec{F}_g + \vec{F}_{roce} = -mg\hat{z} + kv_*^2 \, \hat{z} = 0 \ ,$$

o sea,

$$v_* = \sqrt{\frac{mg}{k}} \ .$$

Solución al problema 41

Denotemos por $\vec{a} = -a \, \hat{z}$ la aceleración del bloque m. Las fuerzas verticales sobre el bloque m nos dan la ecuación de movimiento

$$-mg + 2F_N \, \cos\theta + 2F_r \, \sin\theta = -ma \ .$$

Como los bloques están en movimiento relativo, la fuerza de roce es de origen cinemático y se tiene que

$$F_r = \mu F_N \ .$$

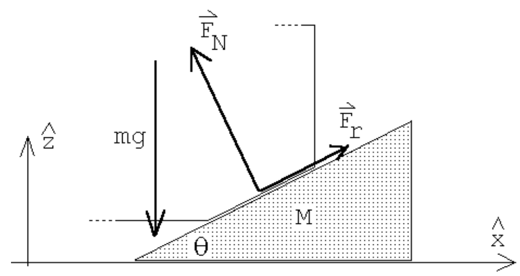


Figura 4.46

La fuerza que el bloque m ejerce sobre la cuña viene dada por $-\vec{F}_N - \vec{F}_r$. La componente horizontal de esta fuerza nos entrega la ecuación de movimiento

$$-F_r \cos\theta + F_N \, \sin\theta = Mb$$

donde b es la magnitud de la aceleración de las cuñas. Las dos aceleraciones no son independientes sino que están relacionadas por

$$\frac{a}{b} = \tan\theta \ .$$

Tenemos cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. Despejando la aceleración a obtenemos

$$a = g \ \left(1 + 2\frac{M}{m} \cdot \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{\cos\theta + \mu\sin\theta}{\sin\theta - \mu\cos\theta} \right)^{-1} \ .$$

Para $\mu = \tan\theta$, la aceleración es nula.

Solución al problema 42

Durante el primer tramo de largo D la partícula acelera uniformemente y después *desacelera* uniformemente quedando en reposo después de recorrer otro tramo de largo D. Es evidente que la aceleración durante el segundo tramo debe tener la misma magnitud que en el primero, siendo el signo el opuesto. En otras palabras, la fuerza neta F_1 que actúa sobre la masa en el tramo 1 debe ser la opuesta de la fuerza neta en el tramo 2, F_2.

En el primer tramo la única fuerza a lo largo del plano inclinado es la componente en esa dirección del peso, esto es, $F_1 = mg\sin\theta$.
En el segundo tramo aparece adicionalmente la fuerza de roce f_r. Esta, para dar una fuerza neta $F_2 = -F_1$ debe ser

$$f_r = -2\;F_1 = -2mg\sin\theta\;.$$

Por otra parte, la fuerza de roce (cinemática) es

$$f_r = -\mu_c\;mg\cos\theta\;.$$

Igualando las dos expresiones para f_r y despejando μ_c se obtiene, finalmente,

$$\mu = 2\tan\theta\;.$$