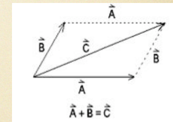
Vectores

- Vector está definido por:
  1. módulo, dirección, y sentido (flecha)
  2. par ordenado (A_x, A_y, A_z)
  3. Suma de vectores a lo largo de ejes perpendiculares $A = A_x\hat{x} + A_y\hat{y}$
- Módulo del vector $|A| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$
- Dirección $\tan\phi = A_y/A_x$

Suma de Vectores

- Construcción de paralelógramo



- Suma por componentes:

  $C_x = A_x + B_x$; $C_y = A_y + B_y$; $C_z = A_z + B_z$

Suma de Vectores

i) Conmutatividad: $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$.

ii) Asociatividad: $\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$.

iii) Existe un vector nulo tal que $\vec{A}+\vec{0}=\vec{A}$.

iv) Para cada vector $\vec{A}$ existe un vector opuesto, que denotaremos por $-\vec{A}$, tal que $\vec{A}+(-\vec{A})=\vec{0}$.

Producto por Escalar

- si vector **B** = α **A** donde α es un número real, entonces el módulo |**B**| = |α| |**A**|, la dirección de **B** es la misma que la de **A**, y el sentido es el mismo si α >0.

Sean α y β dos números reales y $\vec{A}$ y $\vec{B}$ dos vectores, entonces:

i) $\alpha(\vec{A}+\vec{B})=\alpha\vec{A}+\alpha\vec{B}$.

ii) $(\alpha+\beta)\vec{A}=\alpha\vec{A}+\beta\vec{A}$.

iii) $(\alpha\beta)\vec{A}=\alpha(\beta\vec{A})$.

iv) Para todo vector $\vec{A}$ se cumple que $1\,\vec{A}=\vec{A}$.

Producto Punto

Def: $\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta \in \mathcal{R}$

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B} &= \vec{B}\cdot\vec{A}\\ \vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) &= \vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}\end{aligned}$$

$$\hat{x}\cdot\hat{x} = \hat{y}\cdot\hat{y} = \hat{z}\cdot\hat{z} = 1$$
$$\hat{x}\cdot\hat{y} = \hat{y}\cdot\hat{z} = \hat{z}\cdot\hat{x} = 0$$

Vectores Unitarios

- Tienen módulo 1 $\hat{a} = \frac{\vec{A}}{A} = \left(\frac{A_x}{A}, \frac{A_y}{A}\right)$
- Son útiles para definir sistema de coordenadas de vectores unitarios perpendiculares entre si:

$$\hat{x}\perp\hat{y}\perp\hat{z}$$

$$\hat{x}\cdot\hat{x} = \hat{y}\cdot\hat{y} = \hat{z}\cdot\hat{z} = 1$$
$$\hat{x}\cdot\hat{y} = \hat{y}\cdot\hat{z} = \hat{z}\cdot\hat{x} = 0$$

Vectores Unitarios

- Componentes de un vector se pueden expresar como el producto punto con un vector unitario:

$$A_x = \vec{A}\cdot\hat{x}\ ;\ A_y = \vec{A}\cdot\hat{y}\ ;\ A_z = \vec{A}\cdot\hat{z}$$
$$\vec{A} = (\vec{A}\cdot\hat{x})\hat{x} + (\vec{A}\cdot\hat{y})\hat{y} + (\vec{A}\cdot\hat{z})\hat{z}$$

Producto punto en componentes:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

Cinemática en n-dim

- Dado un sistema de coordenadas fijo $\hat{x},\ \hat{y},\ \hat{z}$ (independiente del tiempo)
- definimos el vector **posición** por:
$$\vec{r}(t) \equiv \vec{x}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z}$$
- Como los vectores unitarios son constantes entonces encontramos que la **velocidad** definida vectorialmente como:

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x(t)}{\Delta t}\hat{x} + \frac{\Delta y(t)}{\Delta t}\hat{y} + \frac{\Delta z(t)}{\Delta t}\hat{z}$$
$$= v_x(t)\hat{x} + v_y(t)\hat{y} + v_z(t)\hat{z}$$

Ecuaciones de Mov:

$$\Delta\vec{v}(t) = \vec{a}\Delta t$$
$$\Delta\vec{x}(t) = \vec{v}_i\Delta t + \frac{1}{2}\vec{a}(\Delta t)^2$$

- Proyectiles, caída libre: aceleración es constante, vertical, hacia abajo.

$$\vec{a} = -g\hat{z}$$

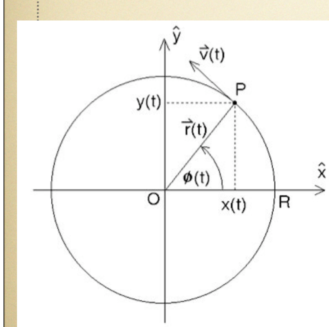
- Plano inclinado: la aceleración efectiva es en la dirección del plano inclinado y hacia abajo, con módulo
$$g_{eff} = g\sin\theta$$

Movimiento Circular

- Si un movimiento está constreñido a un aro circular, entonces su posición queda completamente determinada por un ángulo.
- Def: Movimiento es circular si r=cte.

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$$

Movimiento Circular Uniforme



$$d\theta \equiv \frac{d\vec{r}}{r} = \frac{ds}{r}$$
$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \text{const.}$$
$$v_t = |\vec{v}| = \omega r$$
$$a_c = \omega^2 r = \frac{v_t^2}{r} = \text{const.}$$

Movimiento Circular Uniforme

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t$$

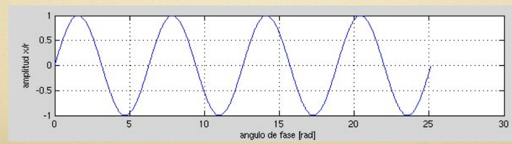
$$x(t) = r\cos\theta(t) = r\cos(\theta_0 + \omega t)$$
$$y(t) = r\sin\theta(t) = r\sin(\theta_0 + \omega t)$$

Las componentes x(t) e y(t) varían en forma periódica con período $P_x = P_y = 2\pi/\omega$

def: Frecuencia $f = \dfrac{1}{P} = \dfrac{\omega}{2\pi}$

MCU

- R es la amplitud del movimiento en x
- $\theta(t)$ es la fase del movimiento
- θ_0 es la constante de fase
- Período $T=2\pi/\omega$



MCU

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} \\
&= r\cos\theta(t)\hat{x} + r\sin\theta(t)\hat{y} \\
\vec{v}(t) &= v_x(t)\hat{x} + v_y(t)\hat{y} \\
&= -r\omega\sin\theta(t)\hat{x} + r\omega\cos\theta(t)\hat{y} \\
\vec{a}(t) &= a_x(t)\hat{x} + a_y(t)\hat{y} \\
&= -r\omega^2\cos\theta(t)\hat{x} - r\omega^2\sin\theta(t)\hat{y} \\
&= -\omega^2\vec{r}
\end{aligned}$$

MCU

$$|\vec{r}| = r \ , \ |\vec{v}_t| = \omega r \ , \ |\vec{a}_c| = \omega^2 r$$

$$\vec{r}\cdot\vec{v} = 0$$

Solución de Problemas:

1. Establecer el Sistema de Coordenadas a usar. Visualizar el problema.
2. Definir el vector aceleración(t).
3. Establecer las condiciones iniciales y/o finales del movimiento (posición, velocidad).
4. Escribir las ecuaciones de movimiento (vectorial y luego por componentes).
5. Escribir las condiciones que deben imponer para encontrar la solución.

1. Sist. de Coordenadas

- Elegir origen desde donde sea fácil definir ángulos, y donde las condiciones iniciales (o finales) sean particularmenter sencillas de expresar.
- Las condiciones iniciales, incluyendo los signos quedan definidos por el sistema de coordenadas. La pregunta del problema también queda definida por el sistema de coordenadas.

2. Cond. Iniciales

- $t_i=0$? Casi siempre es conveniente.
- Fijarse en particular en la dirección y sentido (signo) de la aceleración, en caso de no ser nula.
- Posición inicial en el origen del sistema de coordenadas o no? Conocida o desconocida?
- Velocidad inicial nula o no? Conocida o desconocida?

3. Ecs. de Movimiento

- Vectores x(t), v(t), a(t) que dan lugar a las ecuaciones para la posición [x(t), y(t),z(t)] y velocidad $[v_x(t),v_y(t),v_z(t)]$.
- Incluir explícitamente las condiciones iniciales para t, x, v.

4. Condiciones del problema

- En el caso más sencillo son de la forma: calcular x o v en el tiempo t_1. Típicamente son de la forma cuando $x=x_1$, $v=v_1$.
- Cuando se pide un ángulo en general corresponde a condiciones sobre las velocidades: $v_y/v_x = \tan\alpha$.
- Notar que el número de condiciones a imponer debe ser igual al número de incógnitas a resolver. A menudo hay incógnitas no explícitas en el enunciado, por ejemplo el tiempo.

5. Problemas por partes.

- Los problemas tienen más de una parte sólo si:

1. Cambia la aceleración, por ejemplo al pasar de un plano inclinado a otro.
2. Hay rebotes o alguna situación similar.

- En este tipo de problemas se utilizan las condiciones “finales” de una parte como (o para determinar) condición inicial para la que sigue.