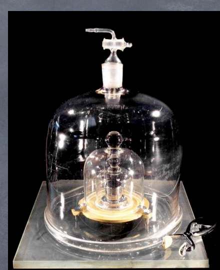
1. Análisis Cuantitativo

- Unidades, estimaciones numéricas, análisis dimensional
- Matemáticas básicas: Funciones, trigonometría
- Aproximaciones
- Funciones de una variable y derivadas

Unidades Físicas (SI)

Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Corriente eléctrica	Ampere	A
Temperatura	Kelvin	K
Cantidad de sustancia	mol	mol
Intensidad de luminosidad	candela	cd

Masa:



1 kg es la masa de un bloque (de platino e iridio) guardado en la "Oficina Internacional de Pesos y Medidas", Francia.

Tiempo:

- 1 s es el tiempo que requiere un átomo de Cesio-133 para realizar 9,192,631,770 vibraciones correspondientes a la transición hiperfina entre los dos niveles de su estado fundamental.

Longitud

- 1 m es la distancia recorrida por la luz en el vacío en 1/299,792,458 s
  - La velocidad de la luz en el vacío es 299,792,458 m/s (exactos).
  - El metro patrón en París dejó de ser la definición de longitud.

Constantes Fundamentales

- Velocidad de la luz en el vacío: c=299,792,458 m/s
- Constante de Gravitación: $G=6.6792\times10^{-11}$ $m^3kg^{-1}s^{-2}$
- Constante de Planck: $h=6.62607\times10^{-34}$ J s
- Constante de Boltzmann: $k=1.38\times10^{-23}$ J/K

Prefixes for Powers of Ten

Power	Prefix	Abbreviation
10^{-24}	yocto	y
10^{-21}	zepto	z
10^{-18}	atto	a
10^{-15}	femto	f
10^{-12}	pico	p
10^{-9}	nano	n
10^{-6}	micro	μ
10^{-3}	milli	m
10^{-2}	centi	c
10^{-1}	deci	d
10^{3}	kilo	k
10^{6}	mega	M
10^{9}	giga	G
10^{12}	tera	T
10^{15}	peta	P
10^{18}	exa	E
10^{21}	zetta	Z
10^{24}	yotta	Y

Órdenes de Magnitud: tiempo

- Vibraciones electrónicas $\approx 10^{-9}$ s
- Pulso promedio humano $\approx 1/60$ s $\approx 10^{-2}$ s
- 1 día = 86400 s $\approx 10^5$ s
- 1 año = $3.1536\text{x}10^7$ s $\approx 3\text{x}10^7$ s
- Edad de la Tierra $\approx 5\text{x}10^9$ año

Órdenes de Magnitud: masa

- masa electrón $\approx 9\text{x}10^{-31}$ kg
- masa protón $\approx 10^{-27}$ kg
- masa partícula de polvo $\approx 10^{-9}$ kg
- ser humano $\approx 10^2$ kg
- masa Tierra $\approx 6\text{x}10^{24}$ kg
- masa Sol $\approx 2\text{x}10^{30}$ kg

Órdenes de Magnitud

- Núcleo atómico $\approx 10^{-15}$ m = 1 Fermi
- Radio atómico $\approx 10^{-10}$ m = 1 Angstrom
- Ser humano $\approx$ 1 m
- Radio Tierra ≈ 6371 km $\approx 6\text{x}10^6$ m $\approx 10^4$ m
- Distancia Tierra-Sol $\approx 1.5\text{x}10^{11}$ m
- Distancia estrella cercana $\approx 10^{17}$ m
- Tamaño universo $\approx 10^{26}$ m

Órdenes de Magnitud

- Densidad del agua = 1 gr/cm^3 = 10^3 kg/m^3
- densidad rocas $\approx 4\ \rho_{agua}$
- densidad Mercurio $\rho_{Hg} \approx 13.6 \times \rho_{agua}$
- $\rho_{madera} < \rho_{agua}$
- $\rho_{aire} \approx 10^{-3}\ \rho_{agua}$

Conversión de Unidades

- La clave es multiplicar por 1:

  Ej. 1 milla = 1.6 km, luego

  1 = 1.6 km/mi = 0.625 mi/km

  60 mi/hr = 60 mi/hr x 1.6 km/mi

  = 96 km/hr

Análisis Dimensional

- Consiste en encontrar expresiones a través de la combinación de variables probables del problema tal que se obtenga las unidades adecuadas.
- Ej. La combinación más sencilla entre una longitud (l) y una aceleración (g) con unidades de tiempo es $(l/g)^{1/2}$ luego sospechamos que el período de un péndulo se puede expresar como $P = k\,(l/g)^{1/2}$

Dimensiones Físicas

- velocidad = $L\ T^{-1}$
- aceleración = $L\ T^{-2}$
- momentum = $M\ L\ T^{-1}$
- fuerza = $M\ L\ T^{-2}$ = Newton [N]
- presión = fuerza /área = $M\ L^{-1}\ T^{-2}$ = Pascal [Pa]
- energía = trabajo = $M\ L^{2}\ T^{-2}$ = Joule [J]
- potencia = energía/tiempo = $M\ L^{2}\ T^{-3}$ = Watt [W]
- acción = energía x tiempo = momentum x distancia

Dimensiones Matemáticas

- área = L^2
- volumen = L^3
- ángulo = adimensional = [rad]
- pendiente = adimensional = dy/dx

Análisis Dimensional

- En general se busca reemplazar las unidades de cada variable elevadas a exponentes racionales y luego se equiparan unidades a cada lado de la ecuación.

$c_s = P^a\, \rho^b$ e igualando dimensiones:

$L/T = (M/LT^2)^a\,(M/L^3)^b$

$a = -b = 1/2$

Análisis Dimensional

En cualquier ecuación física con varios términos, cada término debe tener las mismas unidades, si t representa el tiempo y h una distancia, ¿qué unidades deben tener v y a en la siguiente ecuación?

$$h = vt + at^2$$

Ejercicio:

- Utilizando las constantes físicas G, c, h encontrar cantidades con unidades de largo, masa, y tiempo. Estas cantidades son conocidas como longitud, masa, y tiempo de Planck.

Constantes Fundamentales

- Velocidad de la luz en el vacío: c=299,792,458 m/s
- Constante de Gravitación: $G=6.6792\times10^{-11}$ $m^3kg^{-1}s^{-2}$
- Constante de Planck: $h=6.62607\times10^{-34}$ J s
- Constante de Boltzmann: $k=1.38\times10^{-23}$ J/K

Ángulos

- def: ángulo = tamaño/distancia
  - NO tiene unidades (dimensiones), se utiliza el radián para recordarnos que nos referimos a cantidades angulares
  - radian = longitud de arco de circunsferencia / radio; $0 \longrightarrow 2\pi$
  - tamaño = ángulo x distancia
    - tamaño y distancia tienen las mismas unidades y el ángulo se mide en rad

Precisión numérica

- Cualquier cálculo con medidas físicas debe mantener el número de cifras significativas.
- Si R_{tierra}= 6371 km y c= 299,792,458 m/s entonces $T=2R/c = 4.250\times10^{-2}$ s y no 4.25027000×10^{-2} s.
- Calcular el área de una habitación con lados 12.71m y 3.46m

Aproximaciones Matemáticas

- Resolver rápidamente la ecuación

$$x^2 + 85000x + 1 = 0$$

$$x_\pm = \frac{-85000 \pm \sqrt{85000^2 - 4}}{2}$$

$$x_- x_+ = c/a$$

Aproximación de Funciones

- A menudo es útil aproximar funciones complejas por otras funciones más sencillas en algun intervalo del dominio de la función original.
- Una función se puede aproximar por:
  - Polinomios o series de potencias
  - Funciones racionales
  - series de funciones seno y coseno

Ejemplos este curso:

$$\sin\theta \sim \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \quad \text{si} \quad |\theta| << 1$$

$$\cos\theta \sim 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} \quad \text{si} \quad |\theta| << 1$$

$$(1+x)^\alpha \sim 1 + \alpha x \quad \text{si} \quad |x| << 1$$

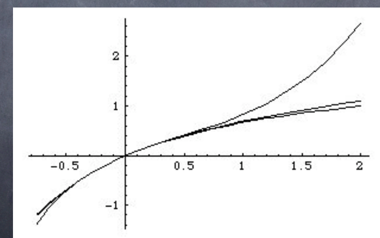
Otros Ejemplos

- La función tangente se puede aproximar como una serie de potencias, pero los coeficientes no siguen ninguna regla sencilla, luego sólo sirve para |x|<<1

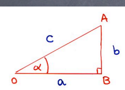
$$\tan x \sim x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots$$

Otros Ejemplos:

$$\ln(1+x) \sim x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \sim \frac{2x}{2+x}$$



Trigonometría Básica

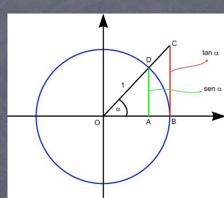


sen α ≡ $\frac{|AB|}{|OA|} = \frac{b}{c}$

cos α ≡ $\frac{|OB|}{|OA|} = \frac{a}{c}$

PROPIEDADES

- $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
- $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{sen}\,\alpha$

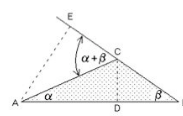


$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Trigonometría Básica

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\,\cos\beta + \sin\beta\,\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta\,.$$



$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\sin(2\alpha) = 2\cos\alpha\,\sin\alpha\ .$$