Capítulo 2

Cinemática en una dimensión

2.1. Posición, velocidad y aceleración

Cinemática es la descripción del movimiento de un cuerpo sin considerar las causas que lo producen. Más tarde, al estudiar las leyes de Newton, analizaremos el origen del movimiento. Para simplificar la discusión, comenzaremos por estudiar el movimiento de objetos cuya ubicación queda determinada especificando la posición de un solo punto. Este tipo de objeto recibe el nombre de *partícula*. Contrariamente a lo que pudiera pensarse, no es necesario que los objetos sean pequeños para que puedan ser considerados partículas. Por ejemplo, cuando se estudia el movimiento de la tierra en torno al sol, la distancia relevante es la distancia Tierra–sol. En este caso, el tamaño de la Tierra no es importante, pudiéndose tratar como una partícula ubicada en el centro de la tierra.
El movimiento más simple de una partícula se tiene cuando la posición de ésta viene descrita por una única coordenada; por ejemplo, el movimiento de una partícula que se traslada a lo largo de una línea recta. (En el presente capítulo nos restringiremos a este tipo de movimientos.) La elección de un origen divide naturalmente a la recta en dos zonas. En forma arbitraria llamamos a una de ellas el lado positivo y a la otra el lado negativo (ver figura 2.1).

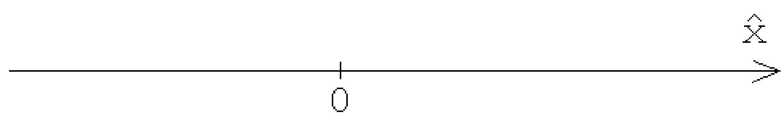

Figura 2.1

La posición de una partícula queda determinada dando simplemente un número (la "coordenada x"). La descripción de su movimiento es completa si conocemos la función $x(t)$ que indica la posición que ocupa en cada instante t.
La diferencia entre la coordenada de una partícula entre dos instantes t_1 y t_2 (con $t_2 > t_1$) se denomina *desplazamiento*:

$$\text{Desplazamiento} \equiv x_2 - x_1 \equiv \Delta x \ .$$

El desplazamiento es una cantidad que tiene signo. Si la coordenada x de la partícula se incrementa durante cierto intervalo de tiempo, entonces el desplazamiento es positivo; si, por el contrario, decrece, el desplazamiento es negativo.
Se define *velocidad media* de una partícula durante el intervalo $[t_1, t_2]$ como la razón entre el desplazamiento y la duración del intervalo de tiempo,

$$\overline{v}(t_1, t_2) = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \ .$$

En un gráfico $x(t)$ en función de t, esta definición corresponde a la tangente del ángulo que forma la recta que une (x_1, t_1) y (x_2, t_2) con el eje del tiempo (ver figura 2.2).

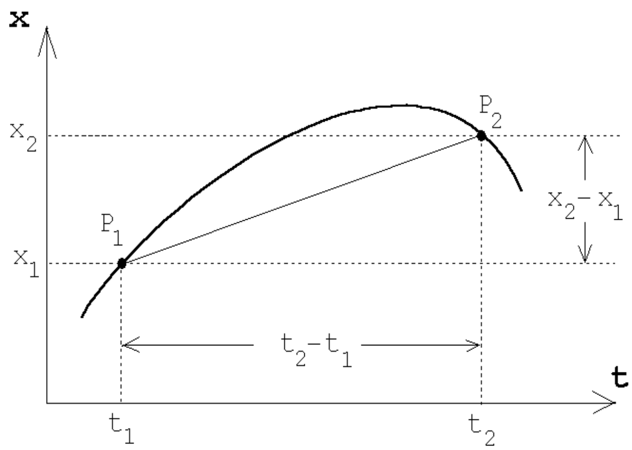

Figura 2.2

La velocidad promedio entrega una información global sobre el movimiento que realiza una partícula en un cierto intervalo de tiempo. Si se desea tener una información más precisa acerca de la velocidad durante el movimiento, es necesario subdividir el intervalo de tiempo original en subintervalos y calcular en cada uno de ellos una velocidad media. Mientras más pequeño es el tamaño de esos subintervalos, más precisa es la información acerca de las variaciones que experimenta la velocidad de la partícula mientras se desplaza. El valor que se mide para la velocidad media en un cierto intervalo de tiempo ε pequeño, donde ε es finito pero tan pequeño como nosotros deseamos, se denomina *velocidad instantánea*.
Para determinar la *velocidad instantánea* de la partícula en un instante t, se evalúa la velocidad promedio durante un intervalo muy pequeño que comienza en t y termina en $t+\varepsilon$, donde ε es un incremento de tiempo infinitesimal (más adelante, al finalizar el cálculo, haremos $\varepsilon \to 0$). Explícitamente:

$$\overline{v}(t, t+\varepsilon) = \frac{x(t+\varepsilon) - x(t)}{\varepsilon} \ .$$

Al hacer $\varepsilon \to 0$, se obtiene la velocidad instantánea de la partícula en el instante t. Esta la denotaremos por $v(t)$ o $\dot{x}(t)$. Se tiene

$$v(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{x(t+\varepsilon) - x(t)}{\varepsilon} = \dot{x}(t) \ . \tag{2.1}$$

Este proceso de límite está ilustrado en la Figura 2.3. Allí se observa cómo cambia el valor de la velocidad media de la partícula en un intervalo $[t, t + \Delta t]$ cuando es evaluada para diferentes valores de Δt. En el caso límite, cuando $\varepsilon \to 0$, se observa que la velocidad instantánea queda representada por la tangente del ángulo (pendiente) que forma la recta tangente a la curva $x(t)$ vs. t con el eje del tiempo.

De aquí en adelante el término *velocidad* siempre se referirá a la velocidad instantánea.

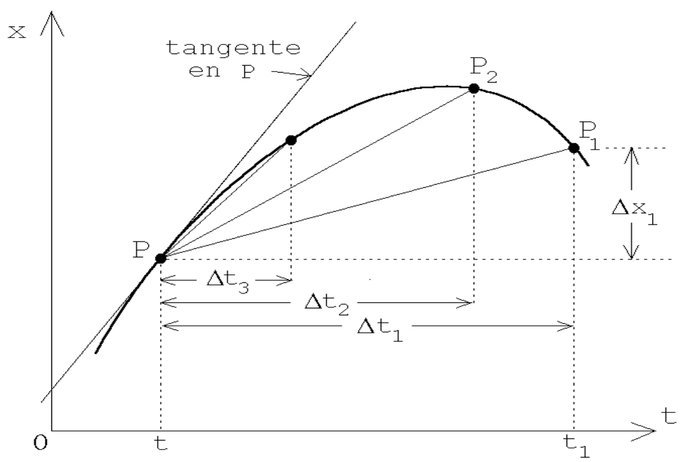

Figura 2.3

Ejemplos:

1. Supongamos que la posición de una partícula viene dada por $x(t) = x_0 + v_0\, t$, con $x_0 = -1$ m y $v_0 = 0{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. El gráfico $x(t)$ en función de t da lugar a la recta que se muestra en la figura 2.4.

   Esa curva corresponde a una partícula que se mueve con velocidad *uniforme*. La inclinación de la recta con respecto al eje del tiempo es una medida de la velocidad de la partícula. Una recta horizontal corresponde a una partícula en reposo mientras que una recta perpendicular al eje del tiempo representa un objeto que tiene velocidad infinita.

   Evaluemos explícitamente la velocidad en un instante t cualquiera. Usando la ecuación (2.1) y la expresión para $x(t)$ de este ejercicio, se obtiene

$$\begin{aligned} v(t) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{x(t+\varepsilon) - x(t)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{[x_0 + v_0 \cdot (t+\varepsilon)] - [x_0 + v_0 \cdot t]}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{v_0 \cdot \varepsilon}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\ v_0 = v_0\ . \end{aligned}$$

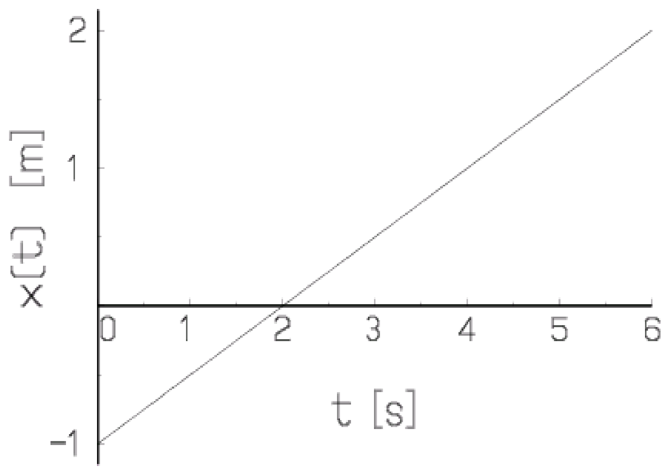

Figura 2.4

Este resultado indica que la expresión para $x(t)$ escrita más arriba efectivamente corresponde al movimiento de una partícula con velocidad constante v_0 (i.e., independiente del tiempo).

2. Supongamos ahora que la posición de una partícula viene dada por

$$z(t) = z_0 - \frac{1}{2}\, g\, t^2 \ ,$$

con $z_0 = 10$ m y $g = 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Al graficar la posición en función del tiempo se encuentra la curva (parábola) mostrada en la figura 2.5.

Evaluemos la velocidad en un instante t cualquiera. Usando la ecuación (2.1), se obtiene

$$\begin{aligned} v(t) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{z(t+\varepsilon)-z(t)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{[z_0 - \frac{1}{2}g\cdot(t+\varepsilon)^2] - [z_0 - \frac{1}{2}g\cdot t^2]}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{-\frac{1}{2}g\cdot\varepsilon\cdot(2t+\varepsilon)}{\varepsilon} = -\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{g\cdot(2t+\varepsilon)}{2} = -g\,t \ . \end{aligned}$$

La figura 2.6 muestra el gráfico de la velocidad instantánea en función del tiempo. Se observa que ésta decrece linealmente a medida que transcurre el tiempo. El signo negativo de la velocidad significa que la partícula se está desplazando en el sentido negativo del eje z.

Sin embargo, el módulo de la velocidad de la partícula (magnitud que en algunos textos es denominada *rapidez*) aumenta a medida que transcurre el tiempo:

$$|v(t)| = g\,t \ .$$

El movimiento descrito por la función $z(t)$ de este ejemplo corresponde a la caída libre de una partícula en el campo gravitacional terrestre y desde una altura z_0.

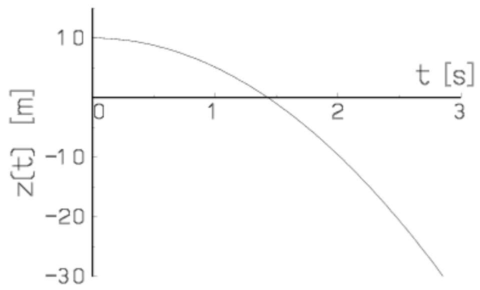

Figura 2.5

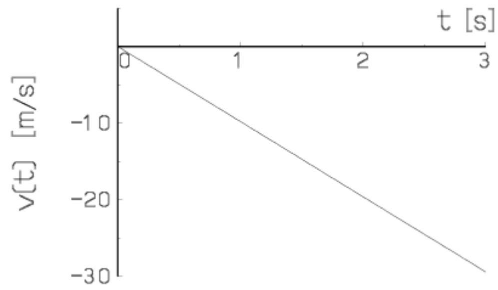

Figura 2.6

Si la velocidad de una partícula cambia a medida que transcurre el tiempo, entonces la partícula tiene una *aceleración*.

La *aceleración media* (o promedio) que tiene la partícula durante el intervalo $[t_1, t_2]$ es igual al cambio de velocidad que ocurre durante el intervalo, dividido por la duración de éste, es decir

$$\overline{a}(t_1, t_2) = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} \ .$$

Para determinar en un instante t la *aceleración instantánea* de la partícula, evaluamos la aceleración promedio durante un intervalo muy pequeño que comienza en t. Sea $[t, t+\varepsilon]$ ese intervalo, donde ε es un tiempo infinitesimal (de hecho, al finalizar el cálculo nuevamente tomaremos $\varepsilon \to 0$). Entonces

$$\overline{a}(t, t+\varepsilon) = \frac{v(t+\varepsilon) - v(t)}{\varepsilon} \ .$$

Al hacer $\varepsilon \to 0$ se obtiene la aceleración instantánea de la partícula (en el instante t). Esta la denotaremos con $a(t)$, $\ddot{x}(t)$ o $\dot{v}(t)$. Se obtiene

$$a(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{v(t+\varepsilon) - v(t)}{\varepsilon} = \ddot{x}(t) = \dot{v}(t) \ . \qquad (2.2)$$

De aquí en adelante el término *aceleración* siempre se referirá a la aceleración instantánea.

Ejemplos:

1. Para el movimiento rectilíneo uniforme, la posición de una partícula viene dada por $x(t) = x_0 + v_0\, t$. Ya hemos visto que, en ese caso, su velocidad es constante e igual a v_0. Demostremos ahora, usando la ecuación (2.2), que en este caso la partícula efectivamente no tiene aceleración. De hecho,

$$a(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{v(t+\varepsilon) - v(t)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{v_0 - v_0}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} 0 = 0 \ .$$

2. En un ejemplo anterior vimos que la posición y velocidad de una partícula que cae libremente bajo la acción de la aceleración de gravedad terrestre están dadas por las siguientes ecuaciones

$$z(t) = z_0 - \frac{1}{2}\, g\, t^2$$

y

$$v(t) = -g\, t\ .$$

Evaluemos la aceleración:

$$\begin{aligned} a(t) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{v(t+\varepsilon) - v(t)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{[-g \cdot (t+\varepsilon)] - (-g \cdot t)]}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{-g \cdot \varepsilon}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0}\, (-g) = -g\ . \end{aligned}$$

El resultado indica que la aceleración es constante y negativa. Eso significa que la partícula acelera en el sentido negativo del eje z.

Generalizando, podemos concluir que cuando el gráfico $v(t)$ en función del tiempo t es una recta, el movimiento de la partícula corresponde a un movimiento uniformemente acelerado. El caso particular en que la recta es horizontal corresponderá a la situación donde la aceleración es nula.

En el gráfico $x(t)$ en función de t, las aceleraciones se manifiestan en la *curvatura* del gráfico. Se dice que un gráfico tiene *curvatura positiva*, si ésta tiene la misma orientación que la curvatura de un pocillo, y *negativa* si la curvatura tiene la orientación de la de un paraguas.

Si en un gráfico $x(t)$ vs. t la curvatura es positiva dentro de un cierto intervalo, entonces también lo será la aceleración en ese intervalo. Por ejemplo, en la figura 2.5 (que corresponde a la caída libre) la curvatura es negativa, luego también lo será la aceleración.

3. Consideremos una partícula de masa m, cuya posición a medida que transcurre el tiempo viene dada por

$$z(t) = A \cos(\omega t)\ ,$$

donde A y ω son constantes. Tal movimiento de la partícula es un movimiento oscilatorio periódico. La amplitud de las oscilaciones es A y el período del movimiento (es decir, el tiempo que debe transcurrir hasta que una configuración se vuelva a repetir) es

$$T = 2\pi/\omega\ .$$

Al inverso de T se le llama *frecuencia*: $\nu = 1/T$. A la magnitud ω se le llama *frecuencia angular*. Se tiene que $\omega = 2\pi\nu$.

Evaluemos la velocidad de la partícula:

$$\begin{aligned}
v(t) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{z(t+\varepsilon)-z(t)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[A\cos(\omega(t+\varepsilon)) - A\cos(\omega t)\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{A}{\varepsilon}\left[\cos(\omega t)\cos(\omega\varepsilon) - \sin(\omega t)\sin(\omega\varepsilon) - \cos(\omega t)\right] \\
&\simeq \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{A}{\varepsilon}\left[\cos(\omega t)\left(1-\frac{\omega^2\varepsilon^2}{2}\right) - \sin(\omega t)\cdot(\omega\varepsilon) - \cos(\omega t)\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{A}{\varepsilon}\left[-\cos(\omega t)\frac{\omega^2\varepsilon^2}{2} - \sin(\omega t)\cdot(\omega\varepsilon)\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} A\left[-\cos(\omega t)\frac{\omega^2\varepsilon}{2} - \omega\cdot\sin(\omega t)\right] \\
&= -A\omega\cdot\sin(\omega t)
\end{aligned}$$

Una vez conocida la velocidad podemos, en forma análoga, calcular la aceleración:

$$\begin{aligned}
a(t) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{v(t+\varepsilon)-v(t)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[-A\omega\ \sin(\omega(t+\varepsilon)) - (-A\omega)\ \sin(\omega t)\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{A\omega}{\varepsilon}\left[\sin(\omega t)\cos(\omega\varepsilon) + \cos(\omega t)\sin(\omega\varepsilon) - \sin(\omega t)\right] \\
&\simeq \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{A\omega}{\varepsilon}\left[\sin(\omega t)\left(1-\frac{\omega^2\varepsilon^2}{2}\right) + \cos(\omega t)\cdot\omega\varepsilon - \sin(\omega t)\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} -A\omega\left[-\sin(\omega t)\frac{\omega^2\varepsilon}{2} + \omega\ \cos(\omega t)\right] \\
&= -A\omega^2\ \cos(\omega t)
\end{aligned}$$

La figura 2.7 muestra la posición, velocidad y aceleración de la partícula en función del tiempo.

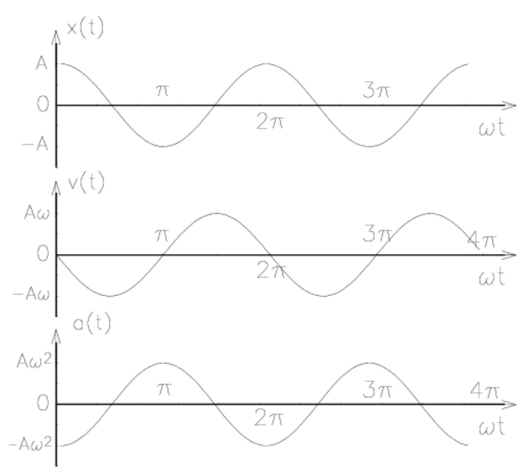

Figura 2.7

Notemos que para todo t, $a(t) = -\omega^2\, z(t)$. El lector ya familiarizado con la ecuaciones de Newton (que analizaremos recién en el capítulo 4) puede establecer una interesante relación con la *Ley de Hooke*. En efecto, al hacer uso de la ecuación de Newton $F = m\,a$, se encuentra que la fuerza neta que actúa sobre la partícula de masa m debe satisfacer la relación

$$F = -(m\omega^2)\, z \ .$$

Denotando a la constante $(m\omega^2)$ por k, se tiene $F = -kz$. Esto nos muestra que la fuerza neta sobre la partícula es proporcional al desplazamiento. El signo negativo indica que la dirección en que actúa la fuerza es opuesta al desplazamiento. Un ejemplo concreto en que aparece una fuerza del tipo $F = -kz$ es una masa m colgando de un resorte. En ese caso k es la constante del resorte y a $F = -kz$ se le llama *Ley de Hooke*.

4. Una persona levanta un peso P, sujetando una cuerda que pasa por una polea y caminando horizontalmente con velocidad v_0. ¿Cuál es la velocidad del peso P?
   Supongamos que el largo de la cuerda es $2h$ (o sea, cuando la persona está en $x = 0$, el cuerpo P está en el suelo encontrándose la cuerda estirada). Se tiene

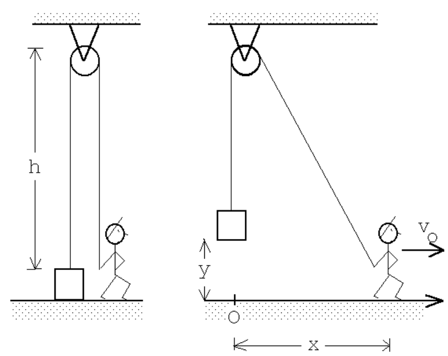

Figura 2.8

$$(h - y) + \sqrt{h^2 + x^2} = 2h \ ,$$

o sea,

$$y(t) = \sqrt{h^2 + x^2(t)} - h = \sqrt{h^2 + v_0^2 t^2} - h \ .$$

Para la velocidad obtenemos

$$\begin{aligned}
\dot{y}(t)=v(t) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{y(t+\varepsilon)-y(t)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left[\left(\sqrt{h^2+v_0^2\,(t+\varepsilon)^2}-h\right)-\left(\sqrt{h^2+v_0^2t^2}-h\right)\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left[\sqrt{(h^2+v_0^2t^2)+(2v_0^2t\varepsilon+v_0^2\varepsilon^2)}-\sqrt{h^2+v_0^2t^2}\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{h^2+v_0^2t^2}\left[\sqrt{1+\frac{2v_0^2t\varepsilon+v_0^2\varepsilon^2}{h^2+v_0^2t^2}}-1\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{h^2+v_0^2t^2}\left[1+\frac{1}{2}\,\frac{2v_0^2t\varepsilon+v_0^2\varepsilon^2}{h^2+v_0^2t^2}-1\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{1}{2}\,\frac{2v_0^2t\varepsilon+v_0^2\varepsilon^2}{\sqrt{h^2+v_0^2t^2}} \\
&= \frac{v_0^2t}{\sqrt{h^2+v_0^2t^2}}
\end{aligned}$$

Ejercicio: Demuestre que la aceleración de P viene dada por:

$$a(t)=\ddot{y}(t)=v_0^2\,\frac{h^2}{\left(h^2+v_0^2t^2\right)^{3/2}}\ .$$

2.2. El camino inverso

En la sección anterior se presentó el procedimiento que permite evaluar, partiendo del conocimiento de la posición en función del tiempo, la velocidad y luego la aceleración. En esta sección analizaremos el camino inverso, es decir, conociendo la aceleración en función del tiempo, calcular la velocidad y posición.

Suponga que la velocidad de una partícula en función del tiempo viene dada por el gráfico mostrado en la figura 2.9.

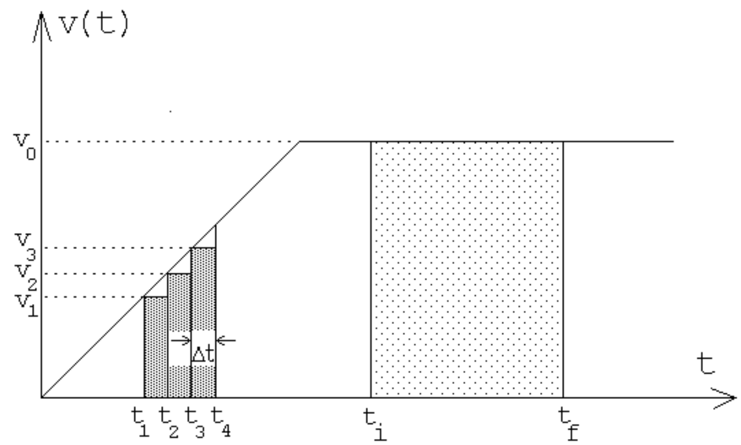

Figura 2.9

¿Cuál será la distancia recorrida por la partícula entre los instantes t_i y t_f? Entre esos dos instantes la velocidad de la partícula es constante (igual a v_0), por lo tanto la distancia recorrida será $x(t_f) - x(t_i) = v_0 \cdot (t_f - t_i)$. Podemos escribir

$$x(t_f) = x(t_i) + v_0 \cdot (t_f - t_i) \quad ,$$

o sea, si una partícula entre dos instantes (inicial y final) se mueve a una velocidad constante, entonces la posición final es igual a la posición inicial más el área de la función $v(t)$ entre los instantes t_i y t_f.
Cuando la función $v(t)$ no es constante la situación es más compleja. Intentemos evaluar la distancia que recorre la partícula entre los instantes t_1 y t_4. Como la velocidad no es constante, tomaremos algunas mediciones intermedias, separadas por un intervalo de tiempo Δt. Entre t_1 y t_2 la distancia recorrida será aproximadamente $v(t_1) \cdot (t_2 - t_1) = v(t_1) \cdot \Delta t$, entre t_2 y t_3 será $v(t_2) \cdot (t_3 - t_2) = v(t_2) \cdot \Delta t$, y finalmente entre t_3 y t_4 será aproximadamente $v(t_3) \cdot (t_4 - t_3) = v(t_3) \cdot \Delta t$. La distancia total recorrida será aproximadamente

$$x(t_4) - x(t_1) \simeq \sum_{j=1}^{3} v(t_j) \cdot \Delta t \quad , \tag{2.3}$$

donde $\Delta t = (t_4 - t_1)/3$. Observe que el lado derecho de la ecuación (2.3) es igual al área de los rectángulos mostrados en la figura 2.10. Evidentemente el resultado anterior es sólo aproximado: hemos tomado 3 mediciones intermedias y hemos supuesto que entre las mediciones la velocidad es constante (igual al valor de la última medición). También es claro que si aumentamos el número de mediciones intermedias obtendremos un resultado más preciso. Para un número muy grande (infinito) de mediciones intermedias, el procedimiento sería exacto; en ese caso el área de los rectángulos sería igual al área entre la función $v(t)$ y el eje $\hat{\mathrm{t}}$. De esta manera hemos encontrado un resultado completamente general:

$$x(t_f) = x(t_i) + (\text{Area entre } v(t) \text{ y el eje } t \text{ entre } t = t_i \text{ y } t_f) \ . \tag{2.4}$$

Otra manera de proceder es la siguiente: dividir el intervalo $[t_i, t_f]$ en muchísimos (infinitos) intervalos de ancho dt. Entonces $v(t) \cdot (dt)$ es igual a la distancia recorrida entre los instantes

t y $t + dt$. Para obtener la distancia recorrida entre t_i y t_f, habrá que sumar todas las contribuciones. Se tiene entonces que

$$x(t_f) = x(t_i) + \int_{t_i}^{t_f} v(t)\, dt \quad . \tag{2.5}$$

El símbolo $\int_{t_i}^{t_f}$ significa "*sume las contribuciones que están detrás del símbolo desde $t = t_i$ hasta $t = t_f$*". Por supuesto que

$$\int_{t_i}^{t_f} v(t)\, dt = (\text{Área delimitada por } v(t) \text{ y el eje } t \text{ entre } t = t_i \text{ y } t_f) \ .$$

Ejemplos:

1. Movimiento uniforme:
   Consideremos una partícula cuya velocidad es constante $v(t) = v_0$ en todo instante. Si la partícula en el instante $t = 0$ se encuentra en x_i, ¿dónde se encontrará en el instante t?

   Usando la ecuación (2.4) se obtiene

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \text{Área entre } v_0 \text{ y el eje } t, \text{ entre } t = 0 \text{ y } t \ . \\ &= x(0) + v_0\, t \end{aligned}$$

2. Movimiento uniformemente acelerado:
   Consideremos una partícula cuya velocidad viene dada por

$$v(t) = v_0 + a_0\, t \ ,$$

   (ver figura 2.10). Observe que v_0 es la velocidad de la partícula en el instante $t = 0$. Al calcular la aceleración se encuentra que

$$a(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{v(t + \varepsilon) - v(t)}{\varepsilon} = a_0 \ ,$$

   o sea, la expresión para la velocidad corresponde a una partícula que en todo instante sufre una aceleración constante a_0.

   Encontremos el desplazamiento entre los instantes $t = 0$ y el instante $t = t_f$. Usando la ecuación (2.4) se obtiene

$$\begin{aligned} x(t_f) &= x(0) + \text{Área entre } v(t) \text{ y el eje } t, \text{ entre } t = 0 \text{ y } t = t_f \\ &= x(0) + v_0\, t_f + \frac{1}{2}(v(t_f) - v_0) \cdot t_f \\ &= x(0) + v_0\, t_f + \frac{1}{2} a_0\, t_f^2 \ . \end{aligned}$$

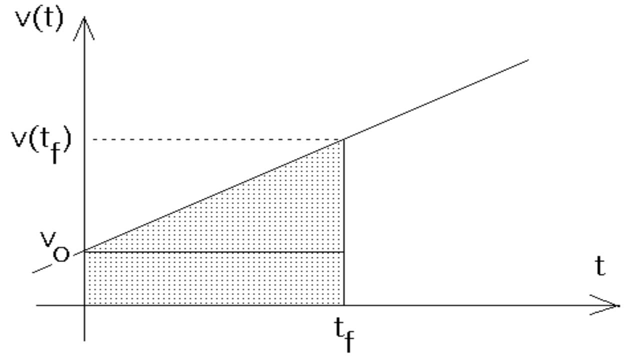

Figura 2.10

Conociendo la posición $x(t)$ de una partícula, siempre es posible determinar su velocidad. El recíproco no es cierto: si se conoce la velocidad $v(t)$ no es posible determinar la posición; lo único que se puede determinar es el desplazamiento entre dos instantes. En otras palabras, si conocemos $v(t)$, debemos conocer además la posición en algún instante para poder determinar $x(t)$.

Las relaciones que permiten obtener la velocidad si se conoce la aceleración $a(t)$, son análogas a las que relacionan la posición con la velocidad:

$$v(t_f) = v(t_i) + \text{Área entre } a(t) \text{ y el eje } t \text{ entre } t = t_i \text{ y } t_f \ . \tag{2.6}$$

o

$$v(t_f) = v(t_i) + \int_{t_i}^{t_f} a(t)\, dt \ . \tag{2.7}$$

Ejemplo: Movimiento uniformemente acelerado.

Suponga que la aceleración de una partícula es constante ($a(t) = a_0$, $\forall t$). Usando (2.6) se deduce que

$$v(t) = v(0) + a_0\, t \ .$$

Haciendo uso del resultado obtenido en el ejemplo anterior se obtiene finalmente que

$$x(t) = x(0) + v(0)\, t + \frac{1}{2} a_0\, t^2 \ .$$

Observe que $x(0)$ y $v(0)$ son la posición y la velocidad de la partícula en el instante $t = 0$.

2.3. Máximos y mínimos

Considere una función $f(t)$ suave (o sea, sin saltos ni puntas). Ya sabemos (ver último problema de la sección anterior) que $\dot{f}(t)$ está relacionado con la pendiente de las tangentes de la función $f(t)$. Observemos que para valores de t en los cuales $\dot{f}(t) = 0$, la función $f(t)$ tiene un máximo o mínimo (local). También podemos invertir la argumentación: encontrar los máximos y mínimos de una función $f(z)$ es equivalente a encontrar los ceros de la función *derivada*

$$g(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(z+\varepsilon) - f(z)}{\varepsilon} \ .$$

Ejemplo: Suponga que un agricultor tiene L metros de malla para construir un corral rectangular. El agricultor desea aprovechar una muralla de piedra (recta) para obtener un corral mayor. ¿Qué dimensiones deberá tener el corral para que su área sea máxima?

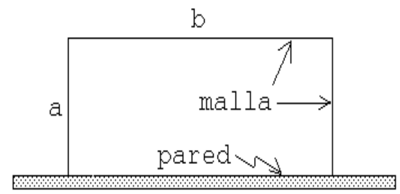

Figura 2.11

Solución: Sean a y b los largos del gallinero (ver figura 2.11). El largo de la malla es $L = 2a + b$, mientras que el área del gallinero es $A = a \cdot b$. Despejando b de la primera ecuación y sustituyéndolo en la segunda se obtiene:

$$A = a \cdot (L - 2a) \ .$$

El área es una función de a. Tanto para $a = 0$ como para $a = L/2$ se tiene que $A = 0$. Para algún valor intermedio el área del gallinero será máxima. Para resolver el problema debemos encontrar el máximo de la función $f(a) = a \cdot (L - 2a)$. Para ello encontremos los ceros de la función derivada

$$g(a) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(a+\varepsilon) - f(a)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[(a+\varepsilon) \cdot (L - 2(a+\varepsilon)) - a \cdot (L - 2a) \right] = L - 4a \ .$$

La función $g(a)$ tiene un (único) cero para $a = L/4$. Luego para ese valor de a el área del gallinero será máxima.

2.4. Problemas

1. Suponga que la altura de cierto proyectil en función del tiempo viene dada por la relación $z(t) = -a_0 \cdot (t - t_0)^2 + z_0$, con $z_0 = 125$ m, $t_0 = 5$ s y $a_0 = 5$ m/s^2.
   a) Grafique la altura del proyectil en función del tiempo desde $t = 0$ hasta $t = 12$ s.
   b) ¿En qué instante choca el proyectil contra el suelo?
   c) Encuentre gráficamente la velocidad instantánea (es decir, mida las pendientes de las tangentes) en los instantes t=0 s, t=2 s, t=4 s, t=6 s, t=8 s y t=10 s. Grafique su resultado.

2. Un conductor maneja su coche 10 km a una velocidad de 90 km/h y luego otros 10 km a 70 km/h. ¿Cuál es la rapidez promedio durante el trayecto de 20 km?
   (La respuesta no es 80 km/h.)

3. La figura 2.12 muestra la posición de una partícula en función del tiempo. Encuentre la velocidad promedio durante los siguientes intervalos de tiempo:

   a) $0 \text{ s} < t < 4 \text{ s}$

   b) $7 \text{ s} < t < 10 \text{ s}$

   c) $0 \text{ s} < t < 13 \text{ s}$ (Respuesta: $\langle v \rangle = -0{,}154$ m/s)

   d) $10\ s < t < 13\ s$

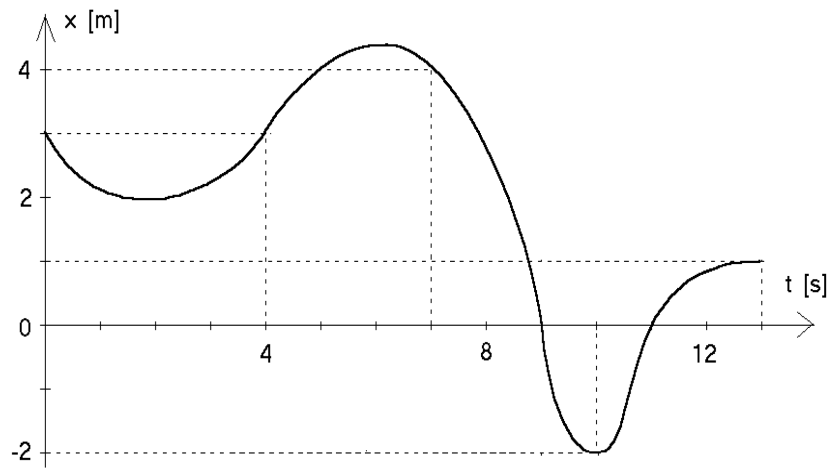

Figura 2.12

4. La figura 2.13 muestra la posición de una partícula en función del tiempo. ¿En qué instantes o en qué intervalos de tiempo

   a) la velocidad (instantánea) es cero?

   b) la velocidad es positiva?

   c) la velocidad es negativa?

   d) el módulo de la velocidad es máximo?

   e) la velocidad es constante?

   f) la aceleración es negativa?

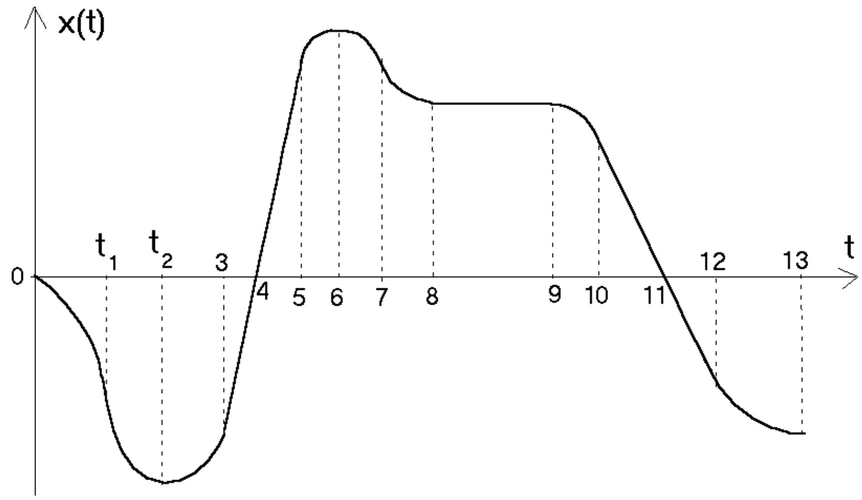

Figura 2.13

5. Suponga que la posición de una partícula en función del tiempo (medido en segundos) viene dada por

$$z(t) = \frac{t}{1+t^2} \ \ [\mathrm{m}]$$

 a) Grafique $z(t)$ en el intervalo de tiempo -4 s $< t < +4$ s.

 b) Encuentre la velocidad instantánea en función del tiempo evaluando

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} \quad .$$

 Grafique $v(t)$.

6. La figura 2.14 muestra la posición de una partícula en función del tiempo.

 a) Encuentre la velocidad promedio en el intervalo de tiempo 2 s $< t <$ 10 s.

 b) Encuentre la velocidad instantánea para $t = 10$ s.

 c) ¿En qué instante o instantes la velocidad (instantánea) de la partícula es nula?

 d) ¿En qué instante la rapidez es máxima?

 e) ¿En qué instante la aceleración es nula?

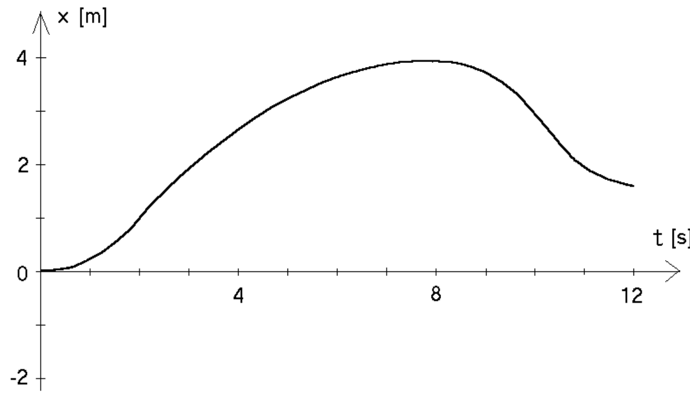

Figura 2.14

7. Suponga que la posición de una partícula en función del tiempo (medido en segundos) viene dada por

$$z(t) = t - 4\cos t \ \ [\mathrm{m}]$$

a) Grafique $z(t)$ en el intervalo de tiempo $0 < t < +6$ s.

b) A partir del gráfico responda las siguientes preguntas:

1) ¿En qué instante la velocidad es nula?
2) ¿En qué instantes la partícula se encuentra en el origen?
3) ¿En qué intervalos de tiempo la velocidad es negativa?
4) ¿En qué intervalos de tiempo la aceleración es positiva?

c) Encuentre la velocidad instantánea en función del tiempo evaluando

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} \quad .$$

d) Grafique $v(t)$ encontrada en la parte anterior. A partir del gráfico responda las siguientes preguntas:

1) ¿En qué instante la velocidad es nula?
2) ¿En qué intervalos de tiempo la velocidad es negativa?
3) ¿En qué intervalos de tiempo la aceleración es positiva?

(Compare las respuestas con las de la parte b)).

8. La figura 2.15 muestra la velocidad de una partícula en función del tiempo.

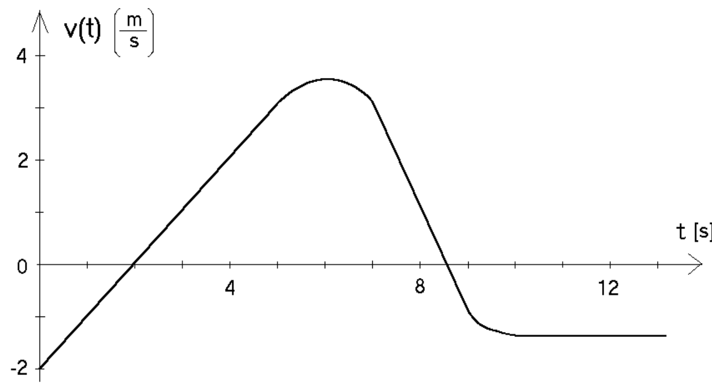

Figura 2.15

¿En qué instantes o en qué intervalos de tiempo:

a) La velocidad es cero?

b) La velocidad es constante?

c) La velocidad es positiva?

d) La aceleración es nula?

e) La aceleración es positiva?

f) El módulo de la velocidad es máximo?

g) El módulo de la aceleración es máximo?

h) ¿Cuál es la distancia que recorre la partícula entre $t = 2$ s y $t = 4$ s?

i) Si en el instante $t = 0$ la partícula se encuentra en el origen (es decir, si $s(0) = 0$), haga un gráfico aproximado del desplazamiento $s(t)$.

j) Haga un gráfico aproximado de $s(t)$ si $s(0) = -4$ m.

Respuestas: a) En $t = 2$ s y $t = 8{,}5$ s; b) A partir de $t = 10$ s, se podría decir también que en el instante $t = 6$ s la velocidad es constante; c) Entre $t = 2$ s y $t = 8{,}5$ s; d) Misma respuesta de la parte b); e) Entre $t = 0$ s y $t = 6$ s; f) En $t = 6$ s; g) Entre $t = 7$ s y $t = 9$ s; h) Entre $t = 2$ s y $t = 4$ s la velocidad media es de 1 m/s, luego la distancia recorrida es de 2 m (note que esto coincide con el área bajo la curva).

9. La figura 2.16 muestra la aceleración de una partícula en función del tiempo.

   a) Si en el instante $t = 0$ s la partícula está en reposo, encuentre la velocidad de la partícula en cada instante. ¡Grafique!

   b) Calcule el tamaño de las áreas I, II y III. ¿Qué unidades tienen? ¿Qué relación hay entre estas áreas y la parte a) de este problema?

   c) Repita lo hecho en la parte a), pero suponiendo que en el instante $t = 0$ la partícula tiene una velocidad $v_0 = -8$ m/s. ¡Grafique!

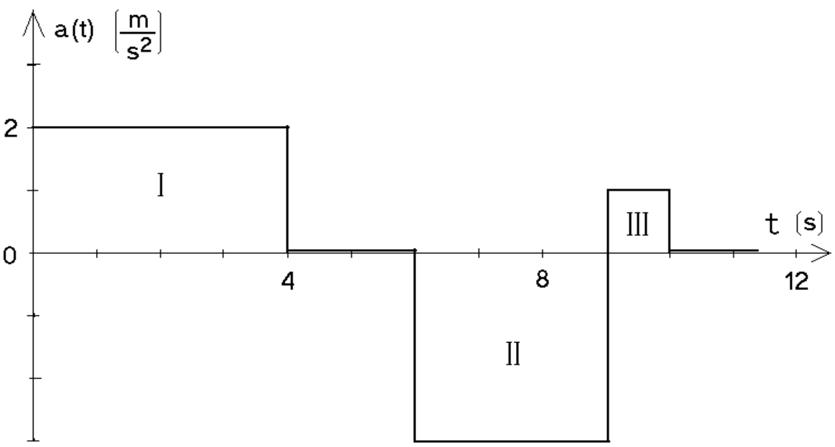

Figura 2.16

10. En cada una de las siguientes expresiones para la posición $s(t)$ de una partícula, encuentre una expresión analítica para la velocidad instantánea:

    a) $s(t) = at^2 + bt + c$

    b) $s(t) = at^\alpha$

    c) $s(t) = a\cos(\omega t + \beta)$

    En las ecuaciones anteriores a, b, c, ω, α y β son constantes.

11. Para cada una de las siguientes expresiones para la aceleración $a(t)$ de una partícula (a en m/s^2 y t en s), encuentre la expresión más general para la velocidad $v(t)$ y la posición $x(t)$.

    a) $a(t) = a_0$

    b) $a(t) = a_0 \cos(\omega t)$

    En las expresiones anteriores, a_0 y ω son constantes.

12. Un observador suelta una piedra desde el techo de un edificio. El sonido de la piedra chocando contra el suelo se escucha después de $t_0 = 6$ s.

    a) Si la velocidad del sonido es $c = 340$ m/s, encuentre la altura del edificio. (Ignore los efectos del roce del aire, que en la práctica, para este problema, no son despreciables.)

    b) Demuestre que si $gt_0/c \ll 1$, entonces la altura del edificio viene aproximadamente dada por
    $$h = \frac{1}{2}gt_0^2\left(1 - \frac{gt_0}{c}\right) .$$

13. Dos trenes A y B, inicialmente separados por una distancia de 13 km, viajan hacia su encuentro a una velocidad de 30 km/h. Desde A parte una paloma mensajera que llega al tren B 10 minutos después. Calcule la velocidad con que vuela la paloma respecto al tren A. Resuelva el problema en forma gráfica y luego en forma analítica.

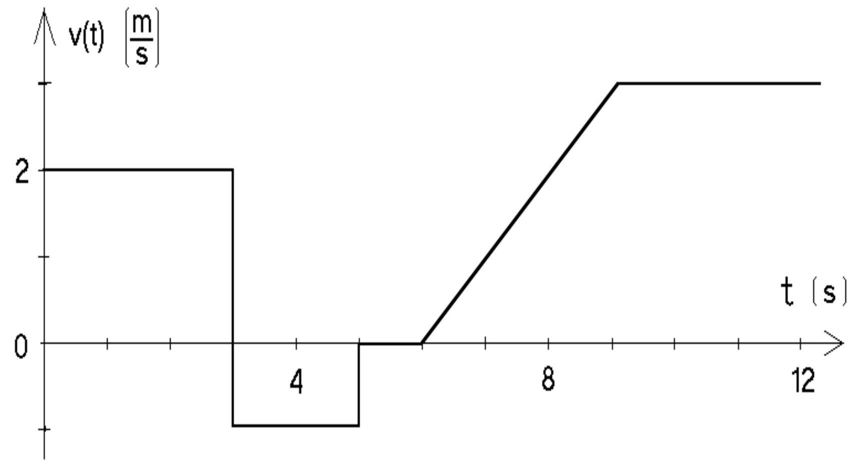

Figura 2.17

14. La figura 2.17 muestra la velocidad de una partícula en función del tiempo.

    a) Si en el instante $t = 0$ s la partícula se encuentra en el origen (es decir, $x(0) = 0$), encuentre la posición de la partícula en cada instante. Grafique.

    b) Repita lo hecho en la parte a), pero suponiendo que en el instante $t = 0$ se tiene $x(0) = -3$ m.

15. Desde un puente de 60 m de altura se deja caer una piedra. Una segunda piedra se arroja verticalmente hacia abajo 1 s más tarde. Ambas piedras llegan al suelo simultáneamente. ¿Cuál fue la velocidad inicial de la segunda piedra? (Desprecie el roce del aire.)

16. Un cohete se dispara verticalmente, subiendo con aceleración constante de 20 m/s^2 respecto a la plataforma de lanzamiento durante 1 minuto. En ese momento se agota su combustible y continúa moviéndose sólo bajo la acción de la aceleración de gravedad.

    a) ¿Cuál es la máxima altura que alcanza?

    b) ¿Cuál es el tiempo transcurrido desde que despega hasta volver a caer sobre la plataforma?

    c) Grafique la posición y velocidad en función del tiempo.

17. Panchito deja caer una pelota desde una altura h. La pelota, cada vez que choca contra el suelo, rebota con una rapidez igual a aquélla con la cual llegó al suelo multiplicada por α, donde α es una constante $0 < \alpha < 1$. Encuentre:

a) La altura que alcanza la pelota después del primer rebote.

b) La altura que alcanza después del segundo rebote.

c) La altura que alcanza después del k-ésimo rebote.

d) La distancia total recorrida desde que se soltó la pelota hasta el k-ésimo rebote.

e) La distancia total recorrida por la pelota hasta que se detiene (tome $k \longrightarrow \infty$ en la expresión anterior).

Respuestas: c) $\alpha^{2k}h$; d) $h + 2h\alpha^2 \frac{\alpha^{2(k-1)}-1}{\alpha^2-1}$.

18. Un automovilista pasa a exceso de velocidad frente a un retén policial. 5 minutos más tarde sale en su persecusión un policía motorizado a una velocidad de 120 km/h. Después de 40 minutos, el policía da alcance al infractor. ¿Cuál era la velocidad del infractor?

19. Consideremos el movimiento de una esfera en un medio viscoso (en ausencia de fuerzas gravitacionales). La aceleración que sufre la esfera es proporcional a su velocidad, pero en dirección contraria, es decir $\vec{a}(t) = -\eta\vec{v}(t)$, donde η es una constante. Supongamos que $\eta = 0{,}01\ \mathrm{s}^{-1}$ y la velocidad inicial de la esfera es $|\vec{v}_0| = 50$ m/s. Encuentre numéricamente la distancia $s(t)$ recorrida por la esfera y grafíquela. Para resolver el problema note que, si Δ es un pequeño intervalo de tiempo, entonces

$$\begin{cases} v(t+\Delta) \simeq v(t) + a(t)\,\Delta \\ s(t+\Delta) \simeq s(t) + v(t)\,\Delta \end{cases} .$$

20. Considere dos varillas muy largas: una fija horizontalmente y la otra formando un ángulo ϕ constante con la primera, y moviéndose verticalmente con rapidez v_0 constante (ver figura 2.18). Determine la velocidad con que se mueve el punto de intersección de las dos varillas (tal punto de intersección no corresponde al movimiento de algún objeto físico real).

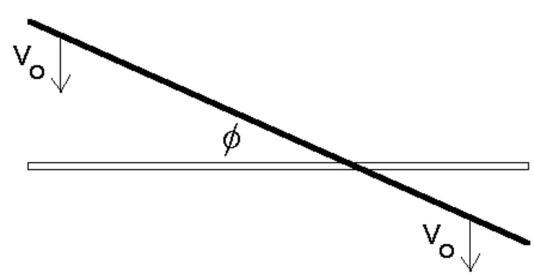

Figura 2.18

21. Un pasajero corre con velocidad de 4 m/s para alcanzar un tren. Cuando está a una distancia d de la portezuela más próxima, el tren comienza a moverse con una aceleración constante a=0.4 m/s^2, alejándose del pasajero.

a) Si d=12 m y el pasajero sigue corriendo, ¿alcanzará a subirse al tren?

b) Haga un gráfico de la función $x_t(t)$ del tren. En el mismo gráfico dibuje la función $x_p(t)$ correspondiente al pasajero para diversos valores de la distancia de separación d. Encuentre el valor crítico d_c para el cual el pasajero alcanza apenas el tren.

c) Para la separación crítica d_c, ¿cuál es la velocidad del tren cuando el pasajero lo alcanza?

22. Desde un edificio se lanza una piedra A con una velocidad inicial vertical hacia abajo $v_0 = 30$ m/s. Desde el suelo, al pie del edificio y en el mismo instante, se lanza una piedra B hacia arriba. Las dos piedras chocan a una altura $h = 30$ m, siendo en ese instante la rapidez de ambas piedras la misma. Encuentre el tiempo que transcurre entre el lanzamiento y la colisión. (Use para g el valor 10 m/s^2.)

    Respuesta: $t = \sqrt{3} - 1$ s.

23. Considere un avión de pasajeros cuya velocidad de aterrizaje es de unos 400 km/h. Suponga que la desaceleración del avión es uniforme. Encuentre el valor que debe tener ésta para que el avión llegue al reposo en una pista de 1200 m.
    Respuesta: a =5,15 m/s^2

24. ¿Cuál será la forma del cilindro de máximo volumen que puede ser inscrito en una esfera de radio R?

25. En Paine un agricultor tiene la posibilidad de realizar una (y sólo una) exportación de sandías de su plantación. Al comienzo de la temporada el precio es bueno, pero la producción no es grande. En efecto, al comienzo tiene 6 toneladas para vender y el precio es de $40,000/ton. . Por cada día que demore la exportación puede exportar 0.5 toneladas adicionales; sin embargo, el precio disminuye en aproximadamente $800/ton. ¿Cuánto tiempo debería esperar para realizar la exportación si desea maximizar las entradas?

    Respuesta: 19 días.

26. A partir de un tronco de 27 cm de diámetro se desea aserrar una viga de sección rectangular que tenga la mayor resistencia posible. La resistencia de una viga horizontal apoyada en sus extremos, en primera aproximación, es proporcional al ancho y proporcional al cuadrado de su altura. ¿Cuáles serán las dimensiones de la viga?

27. Un salvavidas ubicado en el punto A en una playa debe socorrer a un nadador ubicado en el punto B (ver figura 2.19). La velocidad con que puede correr el salvavidas en la arena es v_1 y la velocidad con que avanza en el agua es v_2. Sea P el lugar óptimo en el cual el salvavidas debe ingresar al agua para que tarde el menor tiempo posible en el trayecto de A a B. Demuestre que en ese caso se satisface

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2} \ .$$

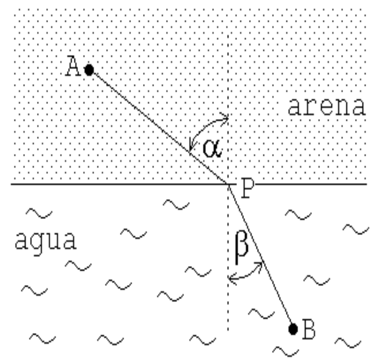

Figura 2.19

Notemos que esta expresión es análoga a la ley de Snell para la refracción de un rayo de luz.

28. ¿Qué dimensiones (interiores) tiene un recipiente cilíndrico, cuya capacidad es de un litro, si la forma se ha elegido de tal manera que en su confección se use la menor cantidad de material posible?

29. Considere cierto objeto A que se mueve a lo largo del eje $\hat{x}$ tal como se describe a continuación:

i) En el instante $t = 0$ se encuentra en $x_0 = -4$ [m] y su velocidad es $v_0 = 2$ [m/s].

ii) Durante los primeros cuatro segundos la velocidad permanece constante.

iii) A partir del instante $t = 4$ [s], el objeto frena uniformemente hasta quedar con la mitad de la velocidad. Durante este proceso de frenado la partícula avanza 3 [m].

iv) Luego mantiene esa velocidad durante 2 [s].

v) Luego la partícula acelera (en sentido negativo) con una aceleración constante $a_0 = -2$ [m/s^2] hasta que la velocidad sea $v_1 = -3$ [m/s].

vi) A continuación se desplaza con la velocidad v_1 hasta llegar a dos metros del punto de partida.

vii) Finalmente la partícula A frena uniformemente hasta quedar en reposo en el punto de partida ($x_0 = -4$ [m]).

a) Haga un gráfico detallado de $x(t)$ y $v(t)$.

b) Encuentre la velocidad media de la partícula A entre los instantes $t = 6$ [s] y $t = 13$ [s].

c) ¿En qué instante el alejamiento desde el punto de partida es máximo y cuánto es ese alejamiento?

d) Un segundo móvil B parte en $t = 0$ desde el origen y se deplaza con velocidad constante $v_B = 1$ [m/s] a lo largo de la misma recta que A. Suponga que cuando los dos móviles se encuentran por primera vez, B se detiene. ¿En qué instante volverán a encontrarse?

30. Un malabarista desea hacer piruetas manteniendo en forma rotativa, con una mano, tres manzanas en el aire. Si el malabarista desea hacer lanzamientos cada 0,5 s, determine la altura a la cual usted le aconsejaría lanzar cada manzana.

31. Desde la altura H con respecto al piso se deja caer un macetero. En ese instante, y desde el primer piso, un ascensor acelera hacia arriba con aceleración αg, $(\alpha < 1)$. Si el ascensor tiene una altura h, $(h < H)$ y parte del reposo, calcule el tiempo que demora el macetero en pasar desde el techo al piso del mismo. Para no hacer trágica la situación, suponga que la trayectoria (recta) del macetero pasa al lado del ascensor.

32. Dos móviles A y B (puntuales) están restringidos a moverse sobre el eje x de cierto sistema de coordenadas. Inicialmente A se desplaza a 10 m/s, mientras que B se encuentra en reposo en el origen del sistema de coordenadas. En $t = 0$ cuando A se encuentra en $x_A = 100$ m, el móvil B comienza a ser uniformemente acelerado en la dirección positiva del eje x con aceleración $a_1 = 1$ m/s^2. Este movimiento continúa hasta que B se encuentra a 22 m de A. Entonces B deja de acelerar y simultáneamente envía un mensaje al móvil A, que demora 0,5 s en llagar a destino. Tan pronto A recibe el mensaje, se detiene.

    a) ¿Cuál es la velocidad c con que se propaga el mensaje entre A y B? Suponga que la velocidad con que viaja el mensaje es constante.

    b) ¿Cuál es la velocidad de B en el instante en que envía el mensaje?

    c) ¿Cuál es el desplazamiento de B entre $t = 0$ y el instante en que choca con A?

    d) ¿Cuál es la velocidad media de B entre $t = 0$ y el instante en que choca con A?

2.5. Solución a algunos de los problemas

Solución al problema 19

Sea x la dirección a lo largo de la cual ocurre el movimiento y denotemos, respectivamente, con $s(t)$, $v(t)$ y $a(t)$ a la posición , velocidad y aceleración que tiene la partícula en el instante t. Las condiciones iniciales son $s(0) = 0$ y $v(0) = 50$ m/s.

Conociendo $s(0)$, $v(0)$ podemos encontrar $a(0)$. En efecto $a(0) = -\eta v(0)$.

Usando las expresiones

$$\left\{ \begin{array}{l} v(t+\Delta) \simeq v(t) + a(t)\,\Delta \\ s(t+\Delta) \simeq s(t) + v(t)\,\Delta \end{array} \right. \qquad (*) \quad .$$

y eligiendo cierto valor pequeño para Δ, podemos encontrar $s(\Delta)$ y $v(\Delta)$.

Conociendo $s(\Delta)$ y $v(\Delta)$ podemos encontrar $a(\Delta)$. En efecto $a(\Delta) = -\eta v(\Delta)$.

Usando nuevamente las relaciones (*) (pero ahora con $t = \Delta$), podemos encontrar $s(2\Delta)$ y $v(2\Delta)$, y a partir del último también $a(2\Delta)$. Etc...

Todo el proceso anterior se puede automatizar. En la próxima página se presenta un programa en QUICKBASIC (para un PC compatible) que resuelve numéricamente el problema y grafica los resultados en la pantalla del computador.

Al resolver numéricamente el problema, repita el cálculo con distintos valores de Δ y observe como el resultado no depende de este parámetro cuando Δ es lo suficientemente chico. También repita el cálculo para distintos valores de η y analice como este parámetro afecta al resultado.

```
CLS                                 'LIMPIA PANTALLA
SCREEN 12                           'ELIGE SUPERVGA COLOR
VIEW (160, 20)-(580,310)            'DEFINE AREA DE TRABAJO
TMIN = 0                            'MINIMO DE ABSISA
TMAX = 500                          'MAXIMI DE ABSISA
YMIN = 0                            'MINIMO DE ORDENADA
YMAX = 6000                         'MAXIMO DE ORDENADA
WINDOW (TMIN, YMIN)-(TMAX, YMAX)    'fIJA VALORES ANTERIORES
LINE (TMIN, YMIN)-(TMAX, YMAX), , B 'GRAFICA EJES (CAJA)
FOR I = 0 TO 6
YP = I * 1000                       'EVALUA POSICION DE TIC
PSET (TMIN, YP)                     'POSICIONA EL LAPIZ EN ORDENADA (IZQ)
DRAW ‘‘R8"                          'GRAFICA TIC
PSET (TMAX - 10, YP)                'POSICIONA EL LAPIZ EN ORDENADA (DER)
DRAW ‘‘R8"                          'GRAFICA TIC
NEXT I
LOCATE 2, 17                        'POSICIONA LAPIZ
PRINT "60"                          'IMPRIME 60 EN ORDENADA IZQUIERDA
LOCATE 2, 74                        'POSICIONA LAPIZ
PRINT YMAX                          'IMPRIME EN ORDENADA DERECHA
LOCATE 2, 18                        'POSICIONA LAPIZ
PRINT "0"                           'IMPRIME
LOCATE 20, 74                       'POSICIONA LAPIZ
PRINT YMIN                          'IMPRIME
LOCATE 11, 17                       'POSICIONA LAPIZ
PRINT "30"                          'IMPRIME
LOCATE 11, 76                       'POSICIONA LAPIZ
PRINT "X"                           'IMPRIME LEYENDA DE ORDENADA DERECHA
LOCATE 2, 13                        'POSICIONA LAPIZ
PRINT "V"                           'IMPRIME LEYENDA DE ORDENADA IZQUIERDA
FOR I = 0 TO 10
XP = TMIN + I * (TMAX - TMIN) / 10  'EVALUA POSICION DE TICS DE ABSISA
PSET (XP, YMIN)                     'POSICIONA LAPIZ
DRAW Ü5"                            'GRAFICA TIC
NEXT I
LOCATE 21, 20                       'POSICIONA LAPIZ
PRINT TMIN                          'IMPRIME
LOCATE 21, 71                       'POSICIONA LAPIZ
PRINT TMAX                          'IMPRIME
LOCATE 23, 44                       'POSICIONA LAPIZ
PRINT "TIEMPO"                      'IMPRIME LEYENDA DE ABSISA
DT = 1                              'SE ELIGE DT
T = 0                               'TIEMPO INICIAL
X = 0                               'POSICION INICIAL
V = 40                              'VELOCIDAD INICIAL
ETA = 0.01                          'SE FIJA PARAMETRO DE FRICCION
TF = 500                            'TIEMPO FINAL
LOCATE 1, 36                        'POSICIONA LAPIZ
PRINT "DT="; DT; "ETA="; ETA;       'IMPRIME TITULO
                                    'EL CALCULO EMPIEZA AQUI !!
10  T = T + DT                      'SE INCREMENTA EL TIEMPO
IF T >TF THEN STOP                  'SI T>TF EL CALCULO TERMINA
A = -ETA * V                        'EVALUACION DE LA ACELERACION
X = X + V * DT                      'NUEVA POSICION
V = V + A * DT                      'NUEVA VELOCIDAD
PSET (T, X), 12                     'GRAFICA PUNTO (T,X)
PSET (T, V * 100), 14               'GRAFICA PUNTO (T,V)
GOTO 10
```

Solución al problema 27

Los tiempos t_1, que el salvavidas tarda para correr de A a P y t_2, que tarda para nadar de P a B vienen dados por

$$t_1 = \frac{\sqrt{x^2 + z_a^2}}{v_1} \; .$$

y

$$t_2 = \frac{\sqrt{(L-x)^2 + z_b^2}}{v_1} \; .$$

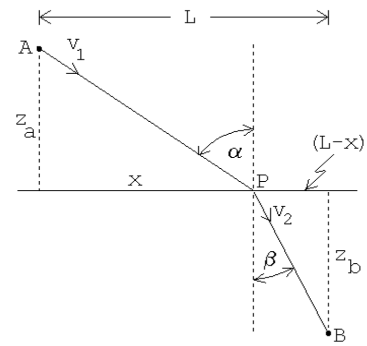

Figura 2.20

Por lo tanto, el tiempo total que tarda en ir de A a B es

$$T = \frac{\sqrt{x^2 + z_a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(L-x)^2 + z_b^2}}{v_1} \; .$$

En la expresión anterior L, z_a y z_b son fijos; el valor de x se debe determinar de manera que T sea mínimo.
Encontrar el mínimo de T en función de x es equivalente a encontrar los ceros de la función derivada dT/dx:

$$\frac{dT(x)}{dx} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{T(x+\varepsilon) - T(x)}{\varepsilon} = \frac{x}{v_1 \sqrt{x^2 + z_a^2}} - \frac{(L-x)}{v_2 \sqrt{(L-x)^2 + z_b^2}} \; .$$

La derivada tiene ceros si

$$\frac{x}{v_1 \sqrt{x^2 + z_a^2}} = \frac{(L-x)}{v_2 \sqrt{(L-x)^2 + z_b^2}} \; .$$

Pero

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + z_a^2}} = \sin\alpha$$

y

$$\frac{(L-x)}{\sqrt{(L-x)^2 + z_b^2}} = \sin\beta \; ,$$

luego, $T(x)$ tiene un extremo en función de x cuando

$$\frac{\sin\alpha}{v_1} = \frac{\sin\beta}{v_2} \; .$$

No es difícil convencerse que tal extremo corresponde a un mínimo (y no a un máximo).

Solución al problema 29

a) Implícitamente supondremos que las distancias estarán expresadas en metros, el tiempo en segundos, las velocidades en m/s y las aceleraciones en m/s^2. De acuerdo al enunciado se tiene:
Punto de partida: $x(0) = -4$, $v(0) = 2$

Entre $t = 0$ y 4, $v(t) = 2$, lo que corresponde a una línea horizontal en el gráfico v en función de t (ver figura 2.21).

Entre $t = 0$ y 4 se tiene una recta con pendiente 2, en el gráfico $x(t)$ en función de t (ver figura 2.22). La posición en $t = 4$ es $x(4) = x(0) + v_0 \cdot 4 = -4 + 2 \cdot 4 = 4$.

A partir de $t = 4$, en el gráfico v en función de t, la velocidad estará representada por una recta hasta llegar a $v_0/2 = 1$. Durante el proceso de frenado que tarda hasta cierto instante $\tilde{t}$, la partícula avanza 3 metros, o sea, el área bajo la curva $v(t)$ entre $t = 4$ y $\tilde{t}$ debe ser 3. No es difícil darse cuenta de que $\tilde{t}$ debe ser 6.

La aceleración entre $t = 4$ y $t = 6$ es $a_1 = -0{,}5$ (es la pendiente en el gráfico 2.21).

De acuerdo al enunciado, la partícula avanza 3 metros durante el frenado, o sea, $x(6) = x(4) + 3 = 7$. El gráfico de $x(t)$, entre $t = 4$ y $t = \tilde{t} = 6$ será parabólico con curvatura negativa. Otra forma de encontrar la posición en $t = 6$ es usando la expresión $x(6) = x(4) + v(4) \cdot (6 - 4) + 0{,}5\, a_1 \cdot (6 - 4)^2$, o sea, $x(6) = 4 + 2 \cdot 2 - 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 2^2 = 7$.

De $t = 6$ hasta $t = 8$ (durante 2 segundos) la velocidad se mantiene constante. El gráfico de $v(t)$ es una recta horizontal con velocidad 1.

El área bajo el gráfico $v(t)$ entre $t = 6$ y 8 nos da la distancia que A avanza en ese intervalo. Tal área es 2, luego $x(8) = 7 + 2 = 9$. Durante este intervalo $x(t)$ es representado por una recta (velocidad constante).

Se tiene que $v(8) = 1$. La partícula desacelera con aceleración $a_0 = -2$ hasta que la velocidad sea -3. Se observa inmediatamente que para ello debe desacelerar durante 2 segundos. Entonces $v(10) = v(8) + a_0 \cdot (10 - 8) = 1 - 2 \cdot (10 - 8) = 1 - 4 = -3$. Entre $t = 8$ y 10 el gráfico de $v(t)$ es una recta (aceleración constante).

Podemos encontrar la posición de la partícula en $t = 10$: $x(10) = x(8) + v(8) \cdot (10 - 8) + 0{,}5\, a_1 \cdot (10 - 8)^2$, o sea, $x(10) = 9 + 1 \cdot 2 + 0{,}5 \cdot (-2) \cdot 2^2 = 7$.

En $t = 10$ la partícula se encuentra en $x(10) = 7$ y su velocidad es $v(10) = -3$. La partícula sigue a velocidad constante hasta llegar a dos metros del punto de partida (o sea, hasta llegar a -2 metros). La partícula, por lo tanto, deberá recorrer 9 metros. Con $v_1 = -3$ [m/s] tardará para ello 3 segundos. O sea, entre $t = 10$ y $t = 13$ la velocidad será constante (linea horizontal) en el gráfico v en función de t.

A partir de $t = 13$ la partícula frena uniformemente hasta quedar en reposo en el punto de partida. El gráfico de $v(t)$ es por lo tanto una recta hasta cero. El área bajo la curva entre $t = 13$ y el instante en que queda en reposo debe ser -3 (la partícula A debe recorrer aún dos metros hacia la izquierda para llegar al punto de partida). Es claro que para ello tardará 4/3 segundos.

Entre $t = 13$ y $t = 14,\overline{3}$, la partícula recorre -2 metros. El gráfico de $x(t)$ es una parábola curvada hacia arriba que llega a $t = 14,\overline{3}$ con pendiente nula.

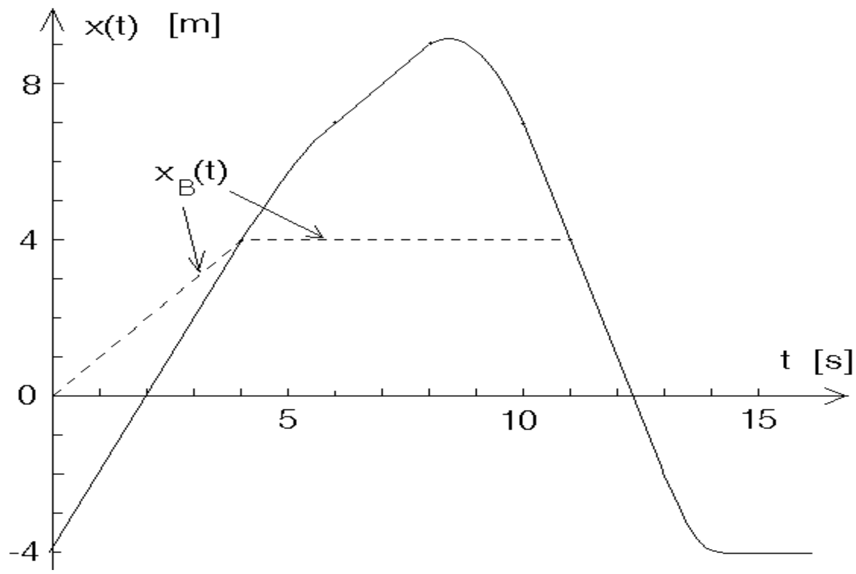

Figura 2.21

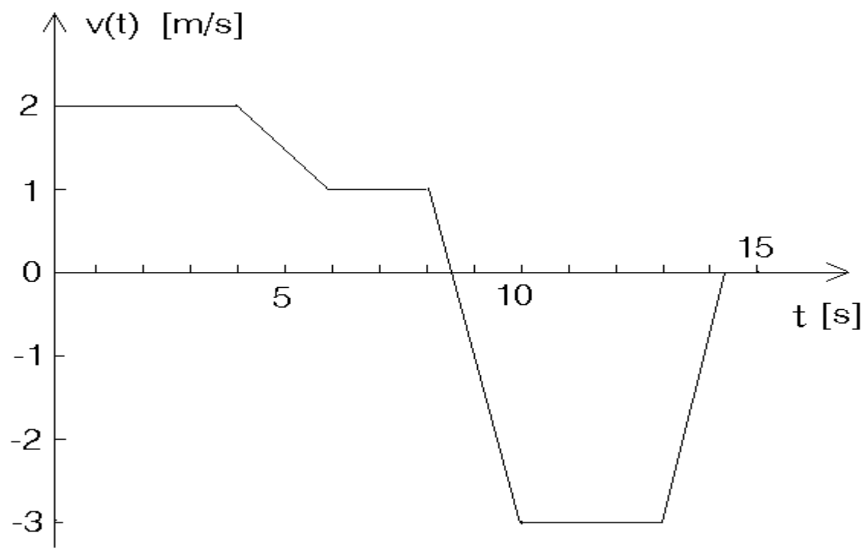

Figura 2.22

b) En $t = 6$ y $t = 13$ la partícula A se encuentra en $x(6) = 7$ y $x(13) = -2$, respectivamente. La velocidad media entre esos dos instantes es

$$\overline{v} = \frac{(-2) - 7}{13 - 6} = -9/7 \text{ m/s} .$$

c) En $t = 8$ la velocidad es 1 m/s. A partir de ese instante la partícula acelera con aceleración $a_0 = -2$, o sea, tarda 0.5 s para quedar temporalmente en reposo. En ese instante (8,5 s) ocurre el alejamiento máximo. Se tiene

$$\begin{aligned} x(8,5) &= x(8) + v(8) \cdot (8,5 - 8) + \frac{1}{2} a_0 \cdot (8,5 - 8)^2 \\ &= 9 + 1 \cdot 0,5 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0,5^2 = 9,25 \text{ [m]} . \end{aligned}$$

d) Graficando $x_B(t)$ en la figura 2.21 se encuentra que los dos móviles se vuelven a encontrar en el instante $t = 11$ s.

Solución al problema 30

Cada manzana debe tardar $t_0 = 3 \cdot 0,5 = 1,5$ segundos en subir y bajar. Al lanzar un objeto con velocidad v_0 hacia arriba tarda un tiempo v_0/g hasta llegar arriba y un tiempo igual hasta volver al punto de partida. Tenemos

$$t_0 = \frac{2v_0}{g} = 1,5 \ \text{[s]} .$$

Esta ecuación nos permite evaluar la velocidad con que se debe lanzar la manzana, $v_0 = t_0 g/2$.
La altura a la que llega es un objeto lanzado con velocidad v_0 es $h = v_0^2/(2g)$. Combinando las dos últimas ecuaciones se encuentra para h la expresión

$$h = \frac{1}{8} g t_0^2 .$$

Con $g \simeq 10$ [m/s^2] se encuentra $h \simeq 3$ metros.

Solución al problema 32

a) Cuando B envía el mensaje se encuentra a 22 m de A. El mensaje tarda $1/2$ s en llegar a su destino. Durante ese intervalo el móvil A seguirá moviéndose desplazándose $10 \cdot 0,5 = 5$ metros. El mensaje deberá recorrer en 0,5 s una distancia de (22+5)=27 metros. La velocidad del mensaje será $c = 27/0,5 = 54$ [m/s].

b) Las ecuaciones de movimiento de los móviles, para $0 < t$ y el instante en que B envía el mensaje (llamémoslo t_1), son

$$x_A(t) = x_A(0) + v_A(0)t = 100 + 10 \cdot t$$

$$x_B(t) = \frac{1}{2} a_1 t^2 = \frac{1}{2} t^2$$

$$v_A(t) = v_A(0) = 100$$

$$v_B(t) = a_1 t = t \ .$$

(En las expresiones anteriores estamos suponiendo que los tiempos están dados en segundos, las distancias en metros, las velocidades en [m/s] y las aceleraciones en [m/s^2].)

Sabemos que en $t = t_1$ la separación entre A y B es de 22 metros, o sea,

$$x_A(t_1) - x_B(t_1) = 100 + 10\,t_1 - \frac{1}{2}\,t_1^2 = 22 \ .$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática para t_1 se encuentra que $t_1 = 10 \pm 16$. En el contexto del problema sólo la solución positiva tiene sentido, o sea, $t_1 = 26$ [s].

La velocidad de B en el instante t_1 es $v_B(t_1) = 26$ [m/s].

c) Desde que B envía el mensaje hasta chocar con A, el móvil B debe recorrer una distancia de 22+5=27 metros. En el instante t_1 se encuentra a $x_B(t_1) = (26)^2/2 = 338$ m del origen. La distancia total que B debe recorrer desde que parte del origen hasta que choca con A es (338+27)=365 m.

d) Desde que B envía el mensaje hasta chocar con A, el móvil B debe recorrer una distancia de 22+5=27 metros. Como su velocidad (a partir de t_1) es de 26 m/s, tardará 27/26 segundos. El tiempo total, desde que B parte del origen hasta que choca con A es (26+27/26) s. Para la velocidad media de B se encuentra

$$\overline{v} = \frac{365}{26 + \frac{27}{26}} \simeq 13,5 \ \ \text{[m/s]} \ .$$

2.6. Elementos del cálculo infinitesimal e integral

A continuación se presenta un resumen de algunos resultados del cálculo que se usarán extensivamente en lo que sigue. Se dejará para los cursos de matemáticas la demostración rigurosa de los resultados. Supondremos implícitamente que las funciones que se usan más abajo tienen todas las propiedades necesarias para que los teoremas planteados sean válidos (por ejemplo, sean funciones continuas, derivables, acotadas, etc.).

Sean $f(t)$ y $g(t)$ dos funciones y α un número (real o complejo). La función *derivada* $df(t)/dt$, relacionada con la pendiente de la función $f(t)$, por definición es

$$\frac{df(t)}{dt} = \dot{f}(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \ [f(t+\varepsilon) - f(t)] \ .$$

Propiedades:

a) $$\frac{d(\alpha f(t))}{dt} = \alpha \ \dot{f}(t) \ .$$

b) $$\frac{d(f(t) + g(t))}{dt} = \dot{f}(t) + \dot{g}(t) \ .$$

c) $$\frac{d(f(t)\,g(t))}{dt} = \dot{f}(t) \ g(t) + f(t) \ \dot{g}(t) \ .$$

d) $$\frac{df(g(t))}{dt} = \dot{f}(g(t))\ \dot{g}(t)\ .$$

Demostración de c):
De la definición de la *derivada* se deduce que, para ε muy pequeño

$$f(t+\varepsilon) = f(t) + \varepsilon\ \dot{f}(t)\ . \qquad (*)$$

Con esta relación, y una análoga para la función $g(t)$, se deduce que

$$\begin{aligned}
\frac{d(f(t)\,g(t))}{dt} &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[f(t+\varepsilon)\,g(t+\varepsilon) - f(t)\,g(t)\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[(f(t)+\varepsilon\,\dot{f}(t))\ (g(t)+\varepsilon\,\dot{g}(t)) - f(t)\,g(t)\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[\varepsilon\,\dot{f}(t)\,g(t) + \varepsilon\,f(t)\,\dot{g}(t) + \varepsilon^2\,\dot{f}(t)\,\dot{g}(t)\right] \\
&= \dot{f}(t)\,g(t) + f(t)\,\dot{g}(t)\ .
\end{aligned}$$

Demostración de d):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} f(g(t)) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\ \left[f(g(t+\varepsilon)) - f(g(t))\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\ \left[f(g(t)+\varepsilon\,\dot{g}(t)) - f(g(t))\right]
\end{aligned}$$

Pero, usando nuevamente la ecuación $(*)$, se tiene

$$f(g+\varepsilon\,\dot{g}) = f(g) + (\varepsilon\,\dot{g})\,\dot{f}(g)\ ,$$

luego

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} f(g(t)) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\ \left[f(g(t)) + \varepsilon\,\dot{g}(t)\,\dot{f}(g(t)) - f(g(t))\right] \\
&= \dot{f}(g(t))\,\dot{g}(t)\ .
\end{aligned}$$

En un gráfico de la función $f(t)$ en función de t, la expresión (*integral*)

$$A = \int_a^b f(t)\ dt$$

representa al área delimitado por la función $f(t)$ y el eje t entre $t=a$ y $t=b$ (ver figura).

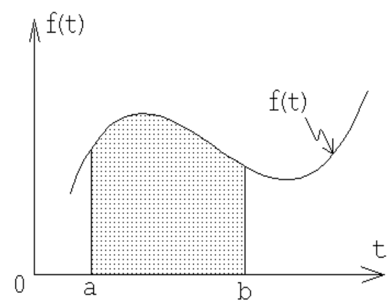

Figura 2.23

Propiedades:

a) $$\int_a^b \alpha\, f(t)\; dt = \alpha \int_a^b f(t)\; dt\ .$$

b) $$\int_a^b [\, f(t) + g(t)\,]\;\; dt = \int_a^b f(t)\; dt + \int_a^b g(t)\; dt\ .$$

c) $$\int_a^b f(t)\; dt = \int_a^c f(t)\; dt + \int_c^b f(t)\; dt\ .$$

En muchos casos es posible evaluar la integral A analíticamente. Para ello, se debe encontrar una función $F(t)$ tal que su derivada sea la función que aparece tras el símbolo integral, o sea, tal que $dF(t)/dt = f(t)$. Entonces

$$A = \int_a^b f(t)\; dt = F(t)\Big|_a^b = F(a) - F(b)\ .$$