

Capítulo 1

Expansiones y Trigonometría

En este primer capítulo se recopilarán algunos resultados de las matemáticas que son básicos para los capítulos que siguen.

1.1. Expansiones y series

Consideremos las expansiones:

$$\begin{aligned}(1+x)^1 &= 1+x \\(1+x)^2 &= 1+2x+x^2 \\(1+x)^3 &= 1+3x+3x^2+x^3 \\(1+x)^4 &= 1+4x+6x^2+4x^3+x^4 \\(1+x)^5 &= 1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5\end{aligned}$$

Generalizando, para un entero n positivo arbitrario, la expansión del binomio $(1+x)^n$ puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n \cdot (n-1)}{2!}x^2 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!}x^3 \\&\quad + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{4!}x^4 + \dots + nx^{(n-1)} + x^n,\end{aligned}\tag{1.1}$$

donde $n! \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$. Por definición $0! \equiv 1$. La expansión 1.1 es válida para cualquier valor de x y cualquier valor de n entero no negativo.

Una expresión análoga también se puede escribir para $(1+x)^\alpha$, donde α es ahora cualquier número real. En efecto, en ese caso

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha \cdot (\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2)}{3!}x^3 \\&\quad + \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdot (\alpha-3)}{4!}x^4 + \dots.\end{aligned}\tag{1.2}$$

Sin embargo, si α no es nulo o un entero positivo, hay una diferencia importante entre las dos expresiones: la expansión (1.1), con n entero no negativo siempre tiene una cantidad finita de términos y se puede usar para cualquier valor de x ; la serie (1.2), por otra parte, posee infinitos términos (sumandos) y sólo se puede usar (en el lenguaje técnico, “converge”) si $|x| < 1$.

Ejemplos:

1. Usando la ecuación (1.2) con $\alpha = -1$ se obtiene la *serie geométrica*

$$(1-x)^{-1} = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots \quad (1.3)$$

Si bien el lado izquierdo está bien definido para cualquier valor de x , el lado derecho sólo da un resultado finito si $|x| < 1$.

Para $x = 1/2$ el lado izquierdo es igual a 2, mientras que el lado derecho da la serie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

que, obviamente, al sumarla, también da 2.

Para $x = 1/10$ el lado izquierdo es igual a $10/9$, mientras que el lado derecho da la serie

$$1 + 0,1 + 0,01 + 0,001 + \dots = 1,1111\dots$$

que es el desarrollo decimal de $10/9$.

2. Evaluemos la suma finita

$$S_N = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^N .$$

Para ello restemos de esta serie la misma serie, pero multiplicada por x , es decir:

$$\begin{aligned} S_N &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^N \\ x S_N &= x + x^2 + x^3 + \dots + x^N + x^{N+1} . \end{aligned}$$

Al restar, al lado izquierdo queda $(1-x) \cdot S_N$, mientras que al lado derecho queda $1 - x^{N+1}$, o sea,

$$(1-x) \cdot S_N = 1 - x^{N+1} .$$

Despejando S_N se obtiene

$$S_N = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x} .$$

Si hacemos N cada vez más grande, es decir lo hacemos tender a infinito, en el lado derecho se tendrá algo finito sólo si $|x| < 1$. En efecto, en ese caso $\lim_{N \rightarrow \infty} x^{N+1} = 0$ y entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} ,$$

resultado consistente con el del ejemplo 1.

3. Escribamos la relación (1.2) para $\alpha = 1/2$. En ese caso se obtiene

$$(1+x)^{1/2} = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \dots$$

La razón por la cual esta expresión es útil es que con frecuencia se requerirá evaluar la raíz de $(1+x)$ para situaciones en que x es un número muy pequeño. En ese caso los términos sucesivos de la serie son cada vez más pequeños y es posible obtener un resultado satisfactorio usando sólo los dos o tres primeros términos del lado derecho. La tabla adjunta muestra un pequeño análisis para $x = 0,1$:

lado izquierdo	lado derecho	# de términos	error
1,04880884817	1,0	1	4,9 %
	1,05	2	0,11 %
	1,04875	3	0,0059 %
	1,0488125	4	0,00037 %

Ejercicio: Verifique que para valores de x más pequeños, la convergencia del resultado de la serie truncada hacia el resultado exacto es aun más rápida.

4. Sea $\alpha \neq 0$ un número real arbitrario y evaluemos $[(1+x)^\alpha - 1]/x$ para valores de x muy pequeños. Observe que para valores de x cada vez más pequeños, tanto el numerador como el denominador tienden a cero. De acuerdo a la ecuación (1.2), para x muy pequeño vale la aproximación

$$(1+x)^\alpha \simeq 1 + \alpha x$$

(o sea, estamos despreciando todos los términos de la serie excepto los dos primeros). Usando esta aproximación se encuentra que (para x muy pequeño)

$$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} \simeq \frac{1 + \alpha x - 1}{x} = \frac{\alpha x}{x} = \alpha .$$

Verifique numéricamente este resultado usando una calculadora.

Algunas aproximaciones que se obtienen a partir de la ecuación (1.2) para $|x|$ pequeño, que se usarán con frecuencia, y conviene tener siempre presentes, son:

$$(1+x)^\alpha \simeq 1 + \alpha x , \tag{1.4}$$

$$\frac{1}{1+x} \simeq 1 - x , \tag{1.5}$$

$$\frac{1}{1-x} \simeq 1 + x , \tag{1.6}$$

$$\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{x}{2} . \tag{1.7}$$

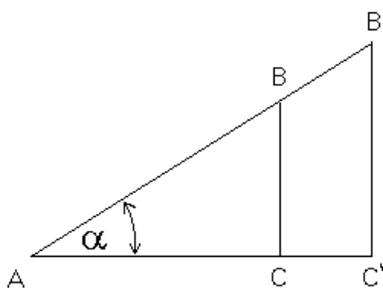


Figura 1.1

Para abreviar la escritura de series, se usa frecuentemente la letra griega *sigma* mayúscula (Σ). Ilustramos el uso de este símbolo con algunos ejemplos:

$$\sum_{j=1}^6 j = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 \quad ,$$

$$\sum_{j=1}^4 j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30 \quad ,$$

$$\sum_{k=-2}^2 j^k = j^{-2} + j^{-1} + 1 + j + j^2 \quad ,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2 \quad .$$

1.2. Elementos de trigonometría

Consideremos los triángulos rectángulos $\triangle (ABC)$ y $\triangle (AB'C')$ mostrados en la figura 1.1. De acuerdo a un teorema de la geometría elemental, la razón (entre trazos) $\overline{AC} : \overline{AB}$ es igual a la razón $\overline{AC'} : \overline{AB'}$, dependiendo ésta sólo del valor del ángulo α . Se ha convenido llamar a tal razón $\cos \alpha$; o sea, en un triángulo rectángulo, el cociente entre el cateto adyacente y la hipotenusa define el *coseno* del ángulo que forman esos dos lados:

$$\cos \alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\text{longitud del lado adyacente}}{\text{longitud de la hipotenusa}} \quad .$$

También el cociente entre el cateto opuesto al ángulo α y la hipotenusa es independiente del tamaño del triángulo rectángulo y sólo depende del valor de α . A esta razón se la llama *seno* del ángulo, teniéndose

$$\sin \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\text{longitud del lado opuesto}}{\text{longitud de la hipotenusa}} \quad .$$

Es útil definir también la función *tangente*:

$$\tan \alpha \equiv \frac{\text{longitud del lado opuesto}}{\text{longitud del lado adyacente}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Evaluemos $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$. Se tiene:

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha &= \left(\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}\right)^2 \\ &= \frac{(\overline{AC})^2 + (\overline{BC})^2}{(\overline{AB})^2}. \end{aligned}$$

Pero, de acuerdo al teorema de Pitágoras, $(\overline{AC})^2 + (\overline{BC})^2 = (\overline{AB})^2$, luego

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 .$$

Dos relaciones trigonométricas importantes son:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \quad (1.8)$$

y

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta . \quad (1.9)$$

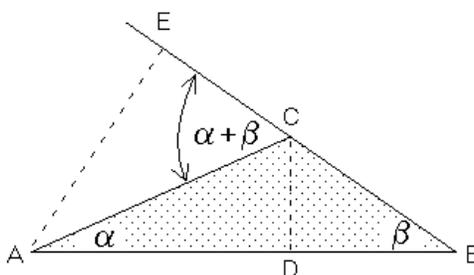


Figura 1.2

Demostremos al menos una de ellas; la primera. Para ello consideremos la figura 1.2. Partiendo del triángulo $\triangle (ABC)$, prolongamos el lado BC y graficamos las alturas CD y AE . Note que el ángulo $\sphericalangle ACE$ resulta ser igual a $\alpha + \beta$. El área de un triángulo es la mitad del producto de su base por la altura. De la figura 1.2, para el área del $\triangle (ABC)$, obtenemos

$$2 \cdot \text{Área} [\triangle (ABC)] = \overline{BC} \cdot \overline{EA} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} .$$

En la última ecuación hemos escrito el producto “base por altura” del triángulo $\Delta(ABC)$ de dos maneras distintas: en la primera igualdad, \overline{BC} es la base y \overline{EA} la altura, mientras que en la segunda, \overline{AB} es la base y \overline{CD} la altura. Partiendo de la última igualdad, dividiendo ambos lados por \overline{AC} y \overline{CB} , se obtiene

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{EA}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{\overline{AC} \cdot \overline{CB}},$$

o sea,

$$\begin{aligned} \frac{\overline{EA}}{\overline{AC}} &= \frac{(\overline{AD} + \overline{DB}) \cdot \overline{CD}}{\overline{AC} \cdot \overline{BC}} \\ &= \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{DB}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}. \end{aligned}$$

Usando las definiciones de *seno* y *coseno*, se deduce finalmente que

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha .$$

Como casos particulares de las ecuaciones (1.8) y (1.9), se encuentra

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \tag{1.10}$$

y

$$\sin(2\alpha) = 2 \cos \alpha \sin \alpha . \tag{1.11}$$

Existen muchas identidades trigonométricas de este tipo que resultan ser útiles para llevar adelante diferentes tipos de cálculos. Dejamos que el lector demuestre las siguientes identidades:

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \left[\frac{\alpha \pm \beta}{2} \right] \cos \left[\frac{\alpha \mp \beta}{2} \right] , \tag{1.12}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left[\frac{\alpha + \beta}{2} \right] \cos \left[\frac{\alpha - \beta}{2} \right] , \tag{1.13}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left[\frac{\alpha + \beta}{2} \right] \sin \left[\frac{\alpha - \beta}{2} \right] , \tag{1.14}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} . \tag{1.15}$$

La definición del *seno* y *coseno* que hemos dado es válida para ángulos α entre 0 y 90 grados. Para definir estas funciones para otros ángulos es conveniente considerar un círculo de radio $R = 1$ centrado en el origen (ver figura 1.3). Por convención, los ángulos se miden desde el eje \hat{x} en el sentido contrario a los punteros del reloj.

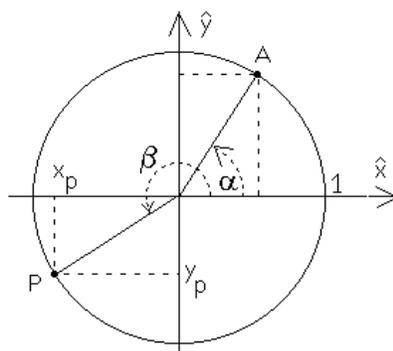


Figura 1.3

Consideremos el punto A sobre el círculo, formando un ángulo α con el eje \hat{x} . Usando el hecho que la hipotenusa vale 1, es fácil convencerse de que las coordenadas x e y del punto A coinciden con los valores de $\cos \alpha$ y $\sin \alpha$, respectivamente.

Es ésta la propiedad que se usa para definir el valor del *seno* y *coseno* para cualquier ángulo β . El procedimiento es el siguiente: i) Encontrar el punto P sobre el círculo que forma un ángulo β con el eje \hat{x} (en la figura 1.3, esto se muestra para $\beta = 210^\circ$); ii) luego, proyectar el punto P sobre los ejes para encontrar x_p e y_p . Entonces $\cos \beta = x_p$ y $\sin \beta = y_p$. Para el caso mostrado en la figura 1.3, $\cos(210^\circ) = -\sqrt{3}/2 = -0,8660\dots$ y $\sin(210^\circ) = -1/2$. Es evidente que, para todos los ángulos θ , siempre se cumple

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1$$

y

$$-1 \leq \sin \theta \leq 1.$$

Podemos graficar las proyecciones del punto P a medida que variamos β . De esta manera se obtiene el gráfico de las funciones *coseno* y *seno* (ver figura 1.4).

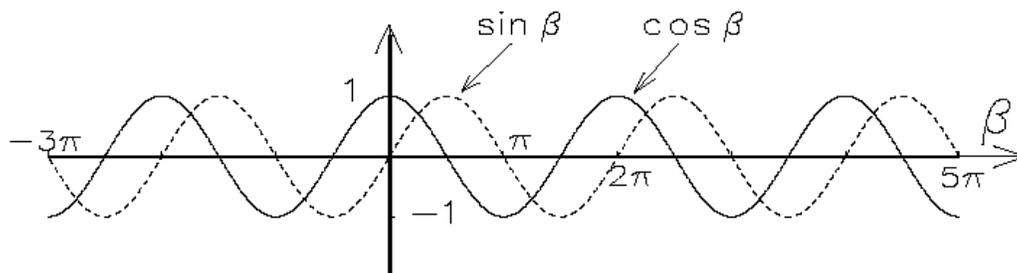


Figura 1.4

Recordemos que los ángulos también pueden ser medidos en *radianes* (unidad adimensional que se abrevia por *rad*). El valor del ángulo α , en radianes, es igual al largo del arco subtendido sobre el círculo unitario desde donde lo cruza el eje \hat{x} hasta el punto A (ver

figura 1.3). De acuerdo a la definición, un ángulo de 360° , o sea, la circunferencia completa, corresponderá a un ángulo igual a 2π rad. El ángulo recto es igual a $\pi/2$. No es difícil verificar que

$$1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} = 57,3^\circ .$$

Para llegar al punto P (figura 1.3) originalmente se recorrió un ángulo β desde el eje \hat{x} positivo. Al continuar y dar una vuelta completa para volver al punto P , habremos recorrido desde el eje \hat{x} un ángulo $2\pi + \beta$. Sucesivas rotaciones nos llevarán nuevamente al punto P , habiéndose recorrido ángulos $4\pi + \beta$, $6\pi + \beta$, etc. Cada vez que, desde el eje \hat{x} positivo, recorremos un ángulo β más un múltiplo de 2π , estaremos en el punto P . Se trata de un movimiento que se repite y se dice que es *periódico* en el ángulo β , con período igual a 2π . Se tiene (ver figura 1.4) que, para cualquier ángulo β ,

$$\cos(\beta + n 2\pi) = \cos \beta$$

y

$$\sin(\beta + n 2\pi) = \sin \beta ,$$

donde n es un entero. Note que, cuando el ángulo se expresa en radianes, se cumplen las siguientes relaciones:

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$$

$$\sin(\pi/2 - \theta) = \cos \theta$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$$

$$\cos(\pi/2 - \theta) = \sin \theta$$

$$\cos(\theta + \pi/2) = -\sin \theta$$

$$\sin(\theta + \pi/2) = \cos \theta .$$

Cuando el argumento (en radianes) de una función trigonométrica es muy pequeño, ésta puede aproximarse con una expresión simple. En efecto, consideremos el triángulo rectángulo ABC mostrado en la figura 1.5. A medida que θ decrece, el cateto opuesto a se hace cada vez más parecido al arco de círculo s con centro en A .

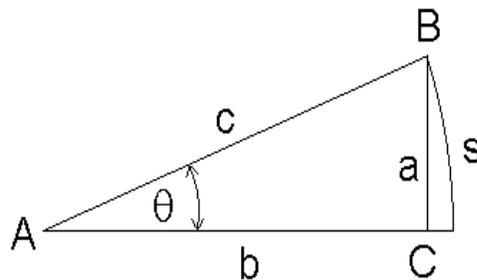


Figura 1.5

Usando la definición de la función seno se tiene

$$\sin \theta = \frac{a}{c} \simeq \frac{s}{c} .$$

Pero el cociente s/c es precisamente el ángulo α en radianes, luego, para ángulos pequeños (y éstos expresados en *radianes*)

$$\sin \alpha \simeq \alpha . \quad (1.16)$$

Sabemos que

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha .$$

Luego, para ángulos pequeños

$$\cos^2 \alpha \simeq 1 - \alpha^2 ,$$

o sea,

$$\cos \alpha \simeq \sqrt{1 - \alpha^2} \simeq 1 - \frac{1}{2}\alpha^2 . \quad (1.17)$$

Ejemplo:

Evalúe, usando una calculadora, las funciones $\sin \theta$ y $\cos \theta$ para $\theta = 5^\circ$. Compare los valores obtenidos con aquéllos que resultan de usar las expresiones aproximadas escritas más arriba. Ingresando el valor $\theta = 5^\circ = 5 \cdot 2\pi/360$ rad en una calculadora, obtenemos:

$$\sin 5^\circ = 0,0871557$$

y

$$\cos 5^\circ = 0,9961947 .$$

Si ahora hacemos uso de las expresiones aproximadas, obtenemos

$$\sin 5^\circ \simeq \frac{5 \cdot 2\pi}{360} = 0,087266$$

y

$$\cos 5^\circ = 1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5 \cdot 2\pi}{360} \right)^2 = 0,9961923$$

Note que los valores aproximados difieren poco de los obtenidos con la calculadora. Para el coseno el error es inferior al 0,003 %.

Cabe destacar que las funciones $\sin \theta$ y $\cos \theta$ pueden ser expresadas como una suma infinita de términos proporcionales a diferentes potencias del ángulo θ (expresado en radianes):

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots , \quad (1.18)$$

y

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots ,$$

donde $n! \equiv n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Para $|\theta| \ll 1$, estas series convergen rápidamente, lo que permite representar las funciones *seno* y *coseno* con pocos términos.

Ejemplo:

Representemos en un mismo gráfico, para el intervalo $t \in [-\pi, 2\pi]$, las siguientes cinco funciones:

- i) $f_0(t) = \cos t$
- ii) $f_1(t) = 1$
- iii) $f_2(t) = 1 - t^2/2!$
- iv) $f_3(t) = 1 - t^2/2! + t^4/4!$
- v) $f_4(t) = 1 - t^2/2! + t^4/4! - t^6/6!$

Observe que de acuerdo a la ecuación (1.18), las funciones $f_1(t)$, $f_2(t)$, etc., para t pequeño son aproximaciones cada vez mejores de $f_0(t) = \cos t$. Este comportamiento se observa claramente en la figura 1.6 (página siguiente) donde se han graficado las diversas funciones.

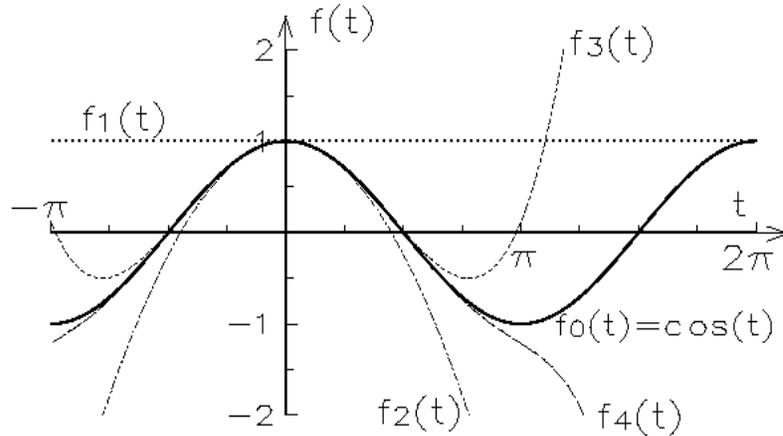


Figura 1.6

Funciones trigonométricas inversas

En ocasiones, lo que se conoce es $x = \cos \alpha$ y lo que se desea conocer es el ángulo α . Esta operación inversa se denota por

$$\alpha = \arccos(x).$$

Es importante darse cuenta de que esta “función” inversa, llamada *arccoseno*, es una *función multivaluada*, o sea, que la respuesta no es única. Hay varios ángulos α distintos para los cuales el coseno del ángulo tiene el mismo valor. Las calculadoras, al evaluar las

funciones trigonométricas inversas, sólo dan la solución que está en el intervalo $[0, \pi]$ para el *arcocoseno* y el intervalo $[-\pi/2, +\pi/2]$ para la función *arcoseno* y la función *arcotangente*. En ocasiones la solución entregada por la calculadora no es la físicamente aceptable, en cuyo caso uno debe preocuparse de encontrar la solución correcta (en el lenguaje técnico: *elegir la rama adecuada*). Algo similar ocurre cuando uno extrae raíces: puede ocurrir que la raíz de 9 de interés físico sea -3 y no la solución que entrega la calculadora (que es $+3$).

Para la función *arcocoseno* la calculadora, al evaluar $\alpha = \arccos(x)$ con $|x| \leq 1$, siempre dará la respuesta α que se ubica en el intervalo $[0, \pi]$ (si está usando la calculadora en radianes) o en el intervalo $[0, 180^\circ]$ si la calculadora está calculando en grados.

Ejercicio: Sea $|x| \leq 1$ cierto valor dado y suponga que deseamos encontrar todos los ángulos γ (en radianes) para los cuales $\cos \gamma = x$. Suponga además que hemos, de alguna manera, encontrado una solución $\gamma = \alpha_0$ (por ejemplo, el ángulo que muestra la calculadora al evaluar $\arccos(x)$). Demuestre que todas las demás soluciones a nuestro problema vienen dadas por $\gamma = \alpha_0 + j \cdot 2\pi$ y $\gamma = -\alpha_0 + j \cdot 2\pi$, con j cualquier valor entero.

Para la función *arcoseno* la calculadora, al evaluar $\alpha = \arcsin(x)$ con $|x| \leq 1$, siempre dará la respuesta α que se ubica en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ (si está usando la calculadora en radianes) o en el intervalo $[-90^\circ, +90^\circ]$ si la calculadora está calculando en grados.

Ejercicio: Sea $|x| \leq 1$ cierto valor dado y suponga que deseamos encontrar todos los ángulos γ (en radianes) para los cuales $\sin \gamma = x$. Suponga además que hemos, de alguna manera, encontrado una solución $\gamma = \alpha_0$ (por ejemplo, el ángulo que muestra la calculadora al evaluar $\arcsin(x)$). Demuestre que todas las demás soluciones a nuestro problema vienen dadas por $\gamma = \alpha_0 + j \cdot 2\pi$ y $\gamma = (\pi - \alpha_0) + j \cdot 2\pi$, con j cualquier valor entero.

Por ser frecuentemente fuente de errores reiteramos lo dicho unos párrafos antes: al evaluar funciones trigonométricas inversas la solución entregada por la calculadora **no** es siempre la físicamente aceptable. El alumno debe asegurarse de que la respuesta mostrada por la calculadora efectivamente resuelve completamente su problema, en caso contrario, debe analizar si alguna de las otras soluciones, que se obtuvieron en los dos ejercicios anteriores, sirve.

1.3. Problemas

1. Evalúe las siguientes sumatorias

$$\text{a) } S = \sum_{\substack{n=1,2 \\ m=1,2,3}} n^m$$

$$\text{b) } S = \sum_{j=-3, \dots, 8} 1$$

c)
$$S = \sum_{j=0}^N j$$

d)
$$S = \sum_{\substack{i,j=1,\dots,4 \\ i>j}} \frac{1}{|i-j|}$$

Respuestas: a) 17 , b) 12 , c) $N(N+1)/2$, d) 13/3

2. Encuentre una expresión para $[(x + \Delta)^\beta - x^\beta]/\Delta$, en el *límite* en que Δ tiende a cero. En otras palabras, Δ tiene un valor finito pero pequeñísimo (tan pequeño como se quiera); al final del cálculo se permite poner $\Delta = 0$.

Usando una notación y un lenguaje más técnico, el enunciado de este problema sería:

Evalúe
$$f(x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} [(x + \Delta)^\beta - x^\beta] .$$

Respuesta: $f(x) = \beta x^{\beta-1}$.

3. Evalúe
$$\frac{\cos(x + \varepsilon) - \cos x}{\varepsilon} \quad \text{para } |\varepsilon| \ll 1 .$$

Respuesta: $-\sin x$.

4. Represente en forma cuidadosa, en un **mismo** gráfico, para el intervalo $t \in [-1, 1]$, las siguientes cuatro funciones:

a) $f_0(t) = 1/(1-t)$

b) $f_1(t) = 1+t$

c) $f_2(t) = 1+t+t^2$

d) $f_3(t) = 1+t+t^2+t^3$

Observe que, de acuerdo a la ecuación (1.3), $f_1(t)$, $f_2(t)$ y $f_3(t)$ son sucesivamente aproximaciones cada vez mejores (para t pequeño) de la función $f_0(t)$.

5. Demuestre las siguientes relaciones trigonométricas:

(a)
$$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$$

$$(b) \quad \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$(c) \quad \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right).$$

6. Sea r el radio del círculo circunscrito de un pentágono regular (ver figura 1.7).

- ¿Cuánto mide el ángulo interior β (en radianes)?
- Determine el largo del lado s en función de r .
- Determine el área del pentágono.

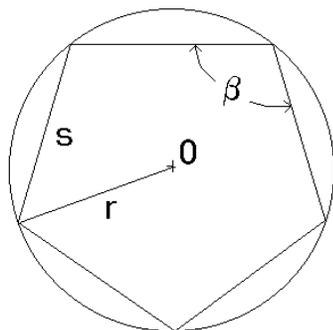


Figura 1.7

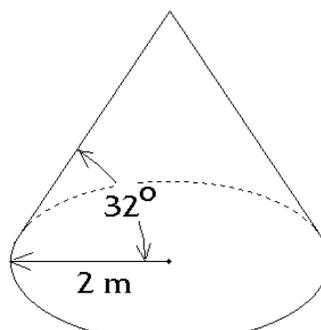


Figura 1.8

Respuestas: a) $\beta = 3\pi/5$ radianes ; c) área = $\frac{5}{2} r^2 \sin(2\pi/5)$.

- Una camionada de arena seca se descarga formando un cono de 4 metros de diámetro. Si la densidad de la arena seca es $\rho = 1.7 \text{ g/cm}^3$ y el ángulo del cono (ver figura 1.8) es de $\theta = 32^\circ$, calcule la masa de la arena (en toneladas).
- Encuentre todos los valores de x en el intervalo $[-5, +5]$ (cuando no se especifica nada se asume que las unidades son radianes) para los cuales se cumple la relación

$$\sin x \tan x = -\frac{3}{2}.$$

Respuesta: $x = -4\pi/3, -2\pi/3, 2\pi/3, 4\pi/3$.

- Represente en un mismo gráfico, para t en el intervalo $[-\pi, 2\pi]$, las siguientes cuatro funciones:

$$a) \quad f_0(t) = \sin t$$

$$b) \quad f_1(t) = t$$

- c) $f_2(t) = t - t^3/3!$
 d) $f_3(t) = t - t^3/3! + t^5/5!$

Aquí nuevamente $f_1(t)$, $f_2(t)$ y $f_3(t)$ son sucesivamente aproximaciones cada vez mejores (para t pequeño) de la función $f_0(t)$.

10. Al incidir luz sobre una interfase, por ejemplo, al pasar del aire al vidrio o viceversa, ésta generalmente sufre un cambio de dirección (ver figura 1.9). Este fenómeno se conoce con el nombre de *refracción* de la luz. La ecuación que describe este fenómeno es la *Ley de Snell*:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_{\text{aire}}}{v_{\text{vidrio}}},$$

donde v_{aire} y v_{vidrio} corresponden a la velocidad de la luz en el aire y el vidrio, respectivamente. (Para el vidrio común se tiene $v_{\text{aire}}/v_{\text{vidrio}} \simeq 1,5$.)

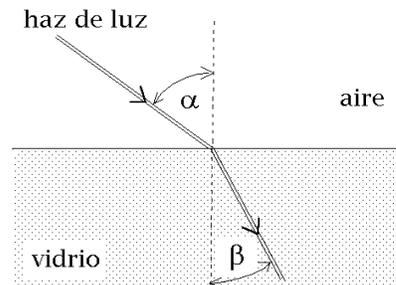


Figura 1.9

- a) Supongamos que un haz de luz incide sobre un vidrio de 2 cm de espesor, con un ángulo de incidencia $\alpha = 40^\circ$. Encuentre la distancia d por la cual el haz de luz emergente se encontrará paralelamente desplazado respecto al haz incidente (ver figura 1.10).
- b) Considere ahora un haz de luz incidiendo sobre un prisma en la forma que se muestra en la figura 1.11. Encuentre el ángulo β para $\alpha = 20^\circ$, 40° , 50° y 70° . ¿Para qué ángulo $\alpha = \alpha_0$ se obtiene $\beta = 90^\circ$? Para $\alpha > \alpha_0$ el haz de luz es reflejado especularmente (como si fuese un espejo) por la superficie interior del prisma, fenómeno conocido con el nombre de *reflexión total*.

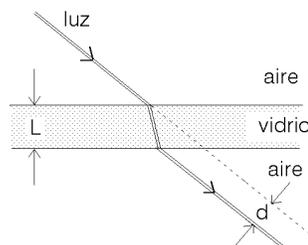


Figura 1.10

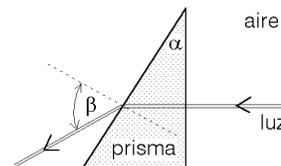


Figura 1.11

11. La figura 1.12 adjunta indica la diferencia entre un *día sideral* y un *día solar*. Para facilitar la explicación supongamos que es posible observar las estrellas durante el día. (Por supuesto que las estrellas están allí y de hecho los radioastrónomos observan algunas de ellas.)

Para un observador en el Ecuador, el día solar es el período que transcurre entre dos pasos consecutivos del sol por el zenit (posición del sol justo sobre nuestras cabezas). El día sideral consiste en el mismo fenómeno pero que ahora ocurre con una estrella muy lejana. La diferencia entre ambas definiciones se debe a la traslación de la tierra alrededor del sol. Determine el valor del ángulo α que se muestra en la figura y calcule la diferencia entre el día sideral y el día solar en segundos.

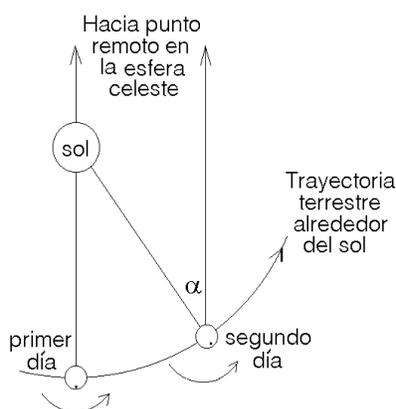


Figura 1.12

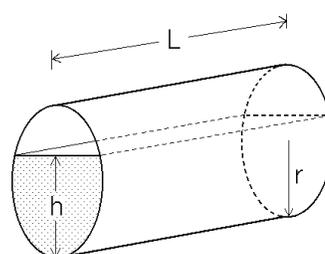


Figura 1.13

12. Un tambor de 50 cm de radio y 1.5 m de largo se encuentra “acostado” y lleno con parafina hasta una altura $h = 60$ cm (ver figura 1.13). ¿Cuántos litros de parafina hay en el tambor?
13. La esfericidad de la tierra fue postulada por Pitágoras y confirmada por Aristóteles al observar la forma circular de la sombra que proyecta la tierra en la superficie de la luna durante un eclipse lunar.

El primer cálculo que se conoce del radio de la tierra se debe a Eratóstenes (276 A.C.–194 A.C.), quien a la fecha estaba a cargo del Museo de Alejandría. El método que usó se basó en observar el ángulo con que inciden los rayos solares sobre la superficie de la tierra, el mismo día y a la misma hora, en dos lugares separados entre sí por una gran distancia. Los lugares elegidos fueron Siena (S) (hoy Asuán) y Alejandría (A).

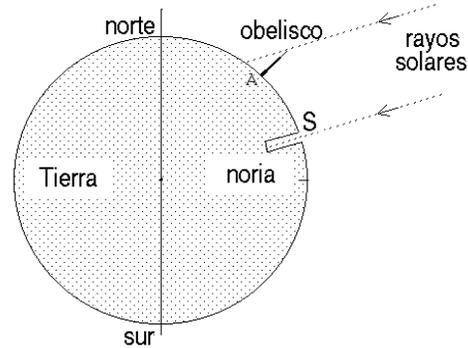


Figura 1.14

Eratóstenes sabía que al mediodía del 22 de junio el Sol caía verticalmente en Siena, pues la luz se reflejaba directamente en el fondo de una noria. El mismo día, a la misma hora, midió la sombra que proyectaba en Alejandría un alto obelisco, que le indicó que los rayos solares formaban un ángulo de $7,2^\circ$ con la vertical (ver figura 1.14).

Dado que el sol está a gran distancia de la tierra se puede suponer que los rayos que llegan a ambas ciudades son paralelos. Eso quiere decir que la separación angular entre Siena y Alejandría medida con respecto al centro de la tierra es también $7,2^\circ$. Sabiendo que la distancia entre Siena y Alejandría (arco de círculo) es de aproximadamente 800 km, estime el radio de la tierra.

Respuesta: Radio ~ 6100 km. (El resultado que obtuvo Eratóstenes en su época fue incorrecto, debido a la imprecisión con que estimó la distancia entre los dos lugares.)

14. Una persona ubicada en el punto P observa dos montañas que la rodean, una a la derecha y la otra a la izquierda. Sean α y β los ángulos de elevación, respectivamente (ver figura 1.15). Si la montaña de la izquierda tiene una altura h y la separación entre las proyecciones de las cimas sobre el nivel de la superficie terrestre es D , calcule la altura del otro monte.

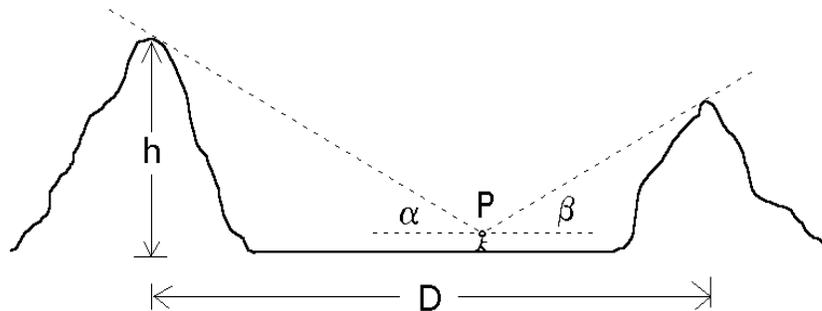


Figura 1.15

15. En el año 1752 los astrónomos Landale y Lacaille determinaron en Berlín (B) y en la ciudad del Cabo (C), a la misma hora, el ángulo entre la normal y la recta entre su

posición y un punto predeterminado del borde de la luna. Los ángulos que determinaron fueron $\beta = 32,08^\circ$ en Berlín y $\gamma = 55,72^\circ$ en El Cabo. Ambas ciudades se ubican en el mismo meridiano y se encuentran en las latitudes $\lambda_B = 52,52^\circ$ y $\lambda_C = -33,93^\circ$, respectivamente (ver figura 1.16). Usando para el radio terrestre el valor de 6370 km, determine la distancia entre la tierra y la luna.

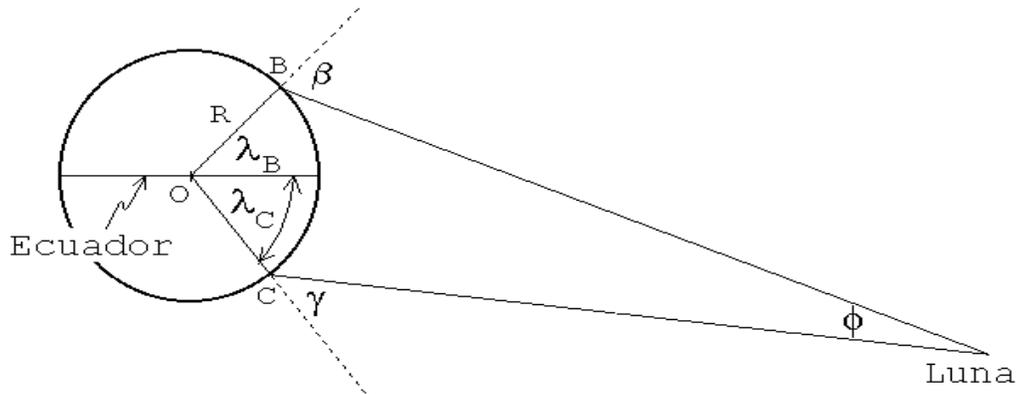


Figura 1.16

16. Encuentre el ángulo entre dos diagonales de un cubo.
17. a) **Teorema del seno.** Demuestre que en un triángulo cualquiera se cumplen las siguientes relaciones:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} ,$$

donde α , β y γ son los ángulos interiores del triángulo y a , b y c los lados opuestos a cada uno de estos ángulos.

- b) **Teorema del coseno.** Demuestre que en un triángulo cualquiera se cumplen las siguientes relaciones:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

y

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cb \cos \alpha$$

18. Determine el largo mínimo que debe tener una cadena para unir dos poleas de radios R y r , separadas por una distancia D (ver figura 1.17).

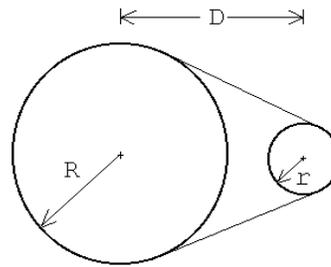


Figura 1.17

Respuesta:

$$L = 2(R - r) \arcsin\left(\frac{R - r}{D}\right) + 2\sqrt{D^2 - (R - r)^2} + \pi(r + R).$$

19. Un tetraedro regular es la figura geométrica que se obtiene al formar una pirámide con cuatro triángulos equiláteros idénticos. Encuentre el ángulo entre dos de sus caras.
20. La altura de un edificio se puede determinar midiendo su *ángulo de elevación* y la distancia a la que uno se encuentra del edificio. Suponga que el instrumento que tiene a disposición le permite medir ángulos con un error de $\pm 1^\circ$. Determine el menor error porcentual con que, con tal instrumento, usted puede medir la altura de un edificio.

21. Dos observadores A y B miden ángulos de elevación de un avión que los sobrevuela a una altura constante. En cierto instante los ángulos medidos por A y B son $\alpha = 60^\circ$ y $\beta = 40^\circ$, respectivamente. Diez segundos más tarde, A mide un ángulo de elevación $\gamma = 110^\circ$ (ver figura 1.18). La separación entre A y B es $D = 1$ km. ¿A qué altura vuela el avión? ¿Cuál es su velocidad?

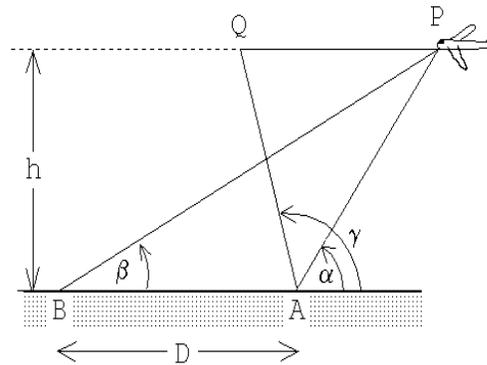


Figura 1.18

22. Grafique, usando un computador, la función $f(t) = \cos(\pi t) + \cos(0,9\pi t)$ para $t \in [0, 40]$ y observe el fenómeno de *pulsaciones*.
23. ¿Para qué latitud el paralelo terrestre tiene $1/3$ de la longitud del Ecuador?

24. Una cuneta de forma angular está caracterizada por los ángulos α y β respecto a la horizontal. Una bola de acero de radio R posa sobre la cuneta, ver figura 1.19. Determine el nivel mínimo de agua, medido desde el punto más bajo de la cuneta, necesario para cubrir la bola completamente.

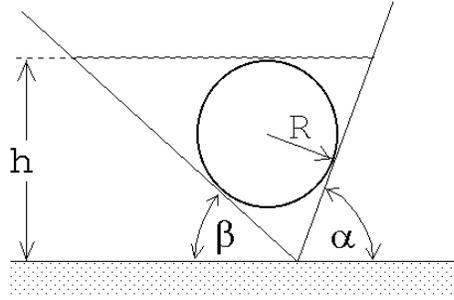


Figura 1.19

25. Son las 12 del día. Determine en cuánto rato más se vuelven a juntar los punteros del reloj.
26. a) Calcule la razón entre las áreas del círculo y del triángulo equilátero que lo circunscribe (ver figura 1.20a).
 b) Haga el mismo cálculo anterior pero para el caso en que el triángulo contenga $n(n + 1)/2$ discos de radio R dispuestos como se muestra en la figura 1.20b.

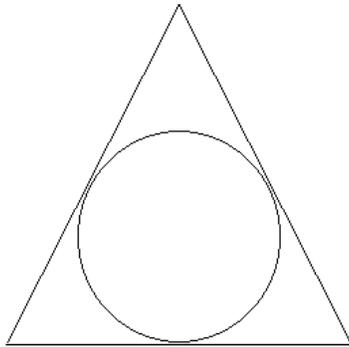


Figura 1.20a

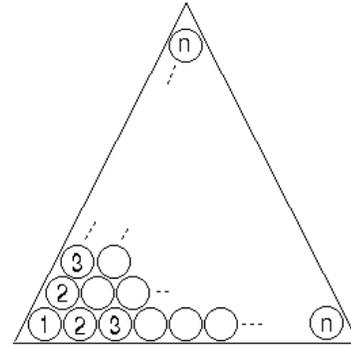


Figura 1.20b

27. Usted se plantea tener un atardecer de 24 horas de duración en el Ecuador, para lo cual cuenta con un aeroplano. Calcule la velocidad con que debería volar y la dirección que debe tomar para lograr su propósito. Si un amigo viaja a la misma velocidad relativa a la tierra, pero en sentido opuesto, calcule el tiempo que transcurrirá hasta encontrarse nuevamente con él.
28. Hay que decidir el tipo de empaque que se le va a dar a pelotas de tenis en una bandeja de forma cuadrada. Decida cual de las dos configuraciones mostradas en la figura 21 resulta más conveniente. Justifique su respuesta cuantitativamente.

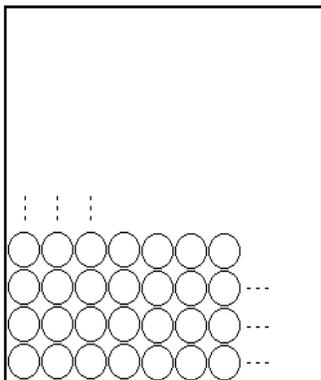


Figura 1.21a

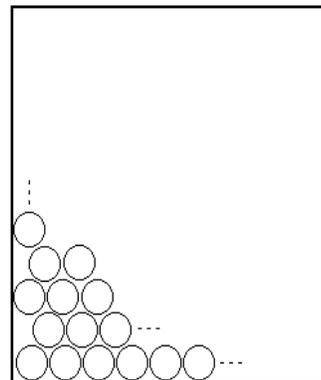


Figura 1.21b

1.4. Solución a algunos de los problemas

Solución al problema 15

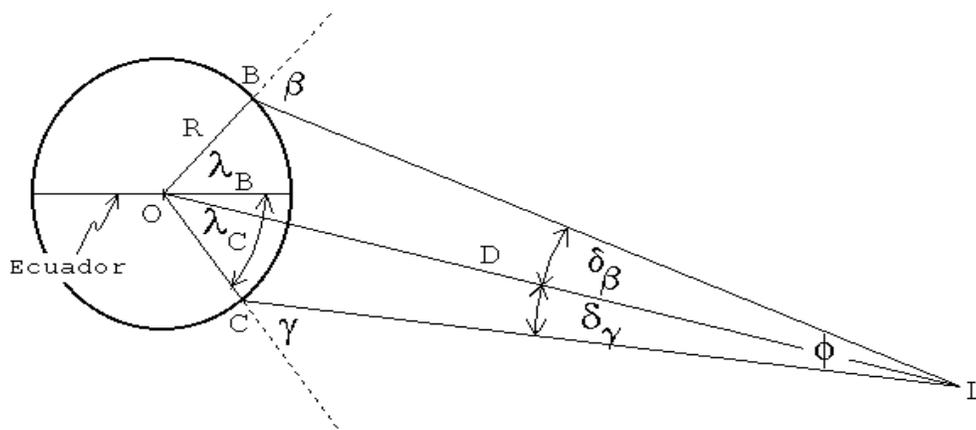


Figura 1.22

Inspeccionando la figura 1.22 se deduce de inmediato que

$$\phi = \delta_\beta + \delta_\gamma$$

y

$$\phi = \beta + \gamma - \lambda_B - |\lambda_C|.$$

Usando el *teorema del seno* (ver problema 17) en los triángulos OBL y OLC, se obtienen las expresiones

$$\frac{\sin \delta_\beta}{R} = \frac{\sin(\pi - \beta)}{D}$$

y

$$\frac{\sin \delta_\gamma}{R} = \frac{\sin(\pi - \gamma)}{D} .$$

Como δ_β y δ_γ son ángulos pequeños podemos usar las aproximaciones

$$\sin \delta_\beta \simeq \delta_\beta$$

y

$$\sin \delta_\gamma \simeq \delta_\gamma .$$

De esta manera se obtienen

$$\delta_\beta \simeq \frac{R}{D} \sin \beta$$

y

$$\delta_\gamma \simeq \frac{R}{D} \sin \gamma .$$

Sumando estas ecuaciones se deduce que

$$\phi = \delta_\beta + \delta_\gamma \simeq \frac{R}{D} (\sin \beta + \sin \gamma) ,$$

o sea,

$$D \simeq \frac{R (\sin \beta + \sin \gamma)}{\phi} = \frac{R (\sin \beta + \sin \gamma)}{|\beta + \gamma - \lambda_B - |\lambda_C|} .$$

Sustituyendo en esta ecuación los valores numéricos se encuentra que

$$D \simeq 367,000 \text{ km} ,$$

valor muy cercano al actualmente aceptado para el radio de la órbita lunar, que es de 384.000 km.

Solución al problema 16

Consideremos un cubo de lados a . Sea A un vértice de una diagonal y B el vértice de otra diagonal del cubo. De los dos vértices de la segunda diagonal, denotaremos por B al vértice que está a una distancia a de A (el otro vértice se encontrará a una distancia $a\sqrt{2}$ de A). Sea O el punto central del cubo.

El triángulo AOB es isósceles: con base $\overline{AB} = a$ y lados $b \equiv \overline{AO} = \overline{BO} = \frac{\sqrt{3}}{2} a$. El ángulo $\alpha = \sphericalangle (AOB)$ es el ángulo buscado. Se tiene que

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a/2}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}} ,$$

de donde se deduce que

$$\alpha = 70,529^\circ .$$

El ángulo complementario $\sphericalangle (AOC) = 109,47^\circ$.

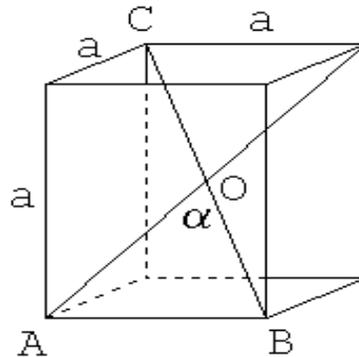


Figura 1.23

Solución al problema 21

Sea $a = \overline{AP}$ y $d = \overline{PQ}$. Usando el teorema del seno en el triángulo APB se obtiene

$$\frac{\sin \beta}{a} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{D},$$

o sea,

$$a = D \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

Usando el teorema del seno en el triángulo AQP se deduce que

$$\frac{\sin(\pi - \gamma)}{a} = \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{d}.$$

Usando las dos ecuaciones anteriores se obtiene para d la expresión

$$d = D \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)} \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\sin \gamma}.$$

Reemplazando los valores numéricos se encuentra que la distancia recorrida por el avión en 10 segundos es $d = 1,53$ km. La velocidad del avión es, por lo tanto, $v = 552$ km/h. La altura a la que vuela el avión viene dada por

$$h = a \sin \alpha = 1628 \text{ [m]}.$$

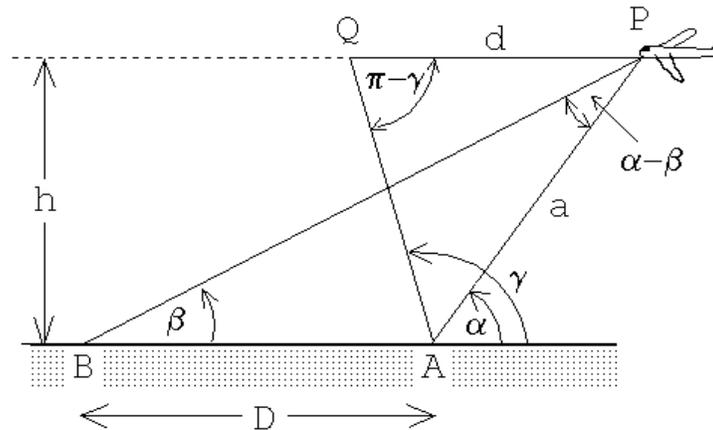


Figura 1.24

Solución al problema 24

Primero giremos la cuneta de manera que quede simétrica respecto a la horizontal, es decir, con un ángulo $(\alpha + \beta)/2$ a cada lado (ver figura 25a).

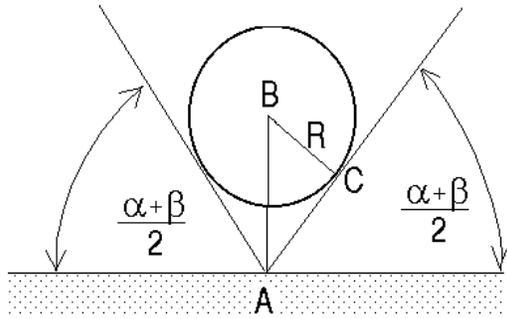


Figura 1.25a

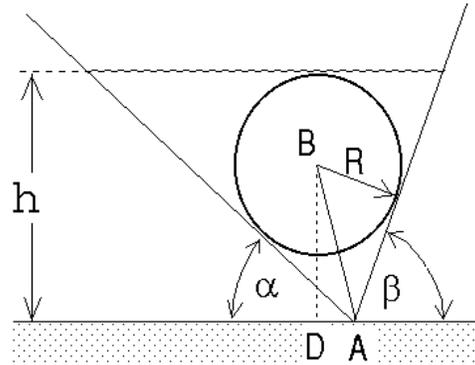


Figura 1.25b

El ángulo $\sphericalangle ABC$ también es $(\alpha + \beta)/2$, luego

$$\overline{AB} = \frac{R}{\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}.$$

Para volver a poner la cuneta en la orientación original debemos girarla en un ángulo $(\beta - \alpha)/2$. Por lo tanto, (ver figura 1.25b)

$$\overline{BD} = \overline{AB} \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = R \frac{\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}.$$

Para la altura del nivel de agua se obtiene finalmente la expresión

$$h = R \left[1 + \frac{\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)} \right].$$