Capítulo 8

Momento angular

8.1. Momento angular de una partícula

Consideremos una partícula de masa m y cuya posición (respecto a algún sistema de referencia inercial) viene dada por el vector $\vec{r}$. Sea $\vec{F}$ la fuerza neta que actúa sobre la partícula. Entonces, de acuerdo a la 2ª ley de Newton, la ecuación de movimiento es

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \,.$$

Tomando el producto cruz con el vector $\vec{r}$ se obtiene

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \,. \tag{8.1}$$

Observemos que

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \,. \tag{8.2}$$

La última igualdad se deduce del hecho que los vectores $d\vec{r}/dt = \vec{v}$ y $\vec{p}$ son paralelos. Usando (8.2) en (8.1) se obtiene

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) \,.$$

Definimos el *momento angular* de una partícula por

$$\vec{\ell} \equiv \vec{r} \times \vec{p} \,,$$

entonces

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{\ell}}{dt} \,.$$

Igual que en el caso del torque, el momento angular de una partícula depende del origen que se use para evaluarlo. Si el torque que actúa sobre una partícula, medido respecto a cierto origen es nulo, entonces el momento angular de la partícula, respecto al mismo origen, no variará en el tiempo, es decir, se conservará.

– – – – – –

Evaluemos el momento angular de una partícula en movimiento.

Supongamos que una partícula de masa m se mueve en el plano x ,y y sean $r(t), \theta(t)$ las coordenadas polares del vector de posición $\vec{r}(t)$. La posición de la partícula vendrá dada por

$$\vec{r} = r\hat{r} \ ,$$

donde

$$\hat{r} = \cos\theta \ \hat{x} + \sin\theta \ \hat{y} \ .$$

Derivando obtenemos la velocidad

$$\vec{v} = \dot{r} \, \hat{r} + r \, \dot{\hat{r}} \ .$$

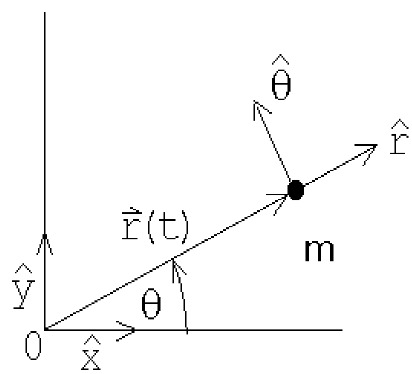

Figura 8.1

Pero

$$\dot{\hat{r}} = \frac{d}{dt}(\cos\theta \ \hat{x} + \sin\theta \ \hat{y}) = -\sin(\theta) \, \dot{\theta} \ \hat{x} + \cos(\theta) \, \dot{\theta} \ \hat{y} \equiv \dot{\theta} \, \hat{\theta} \ ,$$

luego

$$\vec{v} = \dot{r} \, \hat{r} + r\dot{\theta} \, \hat{\theta} \ .$$

De esta manera, para el momento angular de la partícula se encuentra la expresión

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = m \, r \, \hat{r} \times \vec{v} = mr\dot{r} \, \hat{r} \times \hat{r} + mr^2\dot{\theta} \, \hat{r} \times \hat{\theta} = mr^2\dot{\theta} \, \hat{z} \ ,$$

donde $\hat{z}$ es el vector unitario perpendicular al plano (x, y) (cuya dirección en que apunta se encuentra usando la *regla de la mano derecha*).

Observe que si la partícula se aleja en dirección radial (o sea, $\dot{\theta} = 0$ y $\dot{r} \neq 0$) entonces el momento angular es nulo. Sólo si el ángulo θ del vector de posición cambia a medida que transcurre el tiempo, el momento angular es no nulo. ¡El momento angular de una partícula está relacionado con el aspecto rotacional de su movimiento!

Ejemplo:

Consideremos una partícula que se mantiene en un movimiento circular uniforme (con velocidad angular ω_0) mediante un hilo.

Sea R el radio de círculo. El momento angular de la partícula (respecto al centro de la circunferencia) viene dado por

$$\vec{\ell} = mR^2\omega_0\ \hat{z}\ .$$

La dirección en que apunta $\vec{\ell}$ es a lo largo del eje de giro, y en el sentido dado por la regla de la mano derecha (los dedos empuñados indicando el sentido de la rotación; el pulgar extendido da el sentido del momento angular).

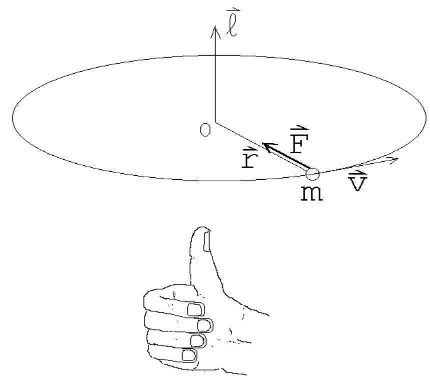

Figura 8.2

El hilo ejerce una fuerza sobre la partícula (la fuerza centrípeta dada por $-mR\omega_0^2\ \hat{r}$), pero esta fuerza no ejerce un torque respecto al origen ya que $\vec{F}$ y $\vec{r}$ son paralelos. Debido a que el torque es nulo, el momento angular de la partícula se conserva (o sea, a medida que transcurre el tiempo no cambia la magnitud ni la orientación del vector $\vec{\ell}$).

8.2. Momento angular de varias partículas

Consideremos ahora N masas $\{m_j\}$ ubicados en los lugares $\{\vec{r}_j\}$. Sean $\{\vec{F}_j\}$ la fuerza externa que actúa sobre cada partícula y $\{\vec{f}_{ji}\}$ la fuerza que la masa i ejerce sobre la masa j. Por supuesto que debido al tercer principio de Newton, $\vec{f}_{ji} = -\vec{f}_{ij}$. Supongamos además que la fuerza que una partícula i ejerce sobre otra partícula j es a lo largo de la línea que las une (o sea, que la interacción entre las partículas es central).
La ecuación de movimiento (2ª ley de Newton) para cada partícula es

$$\vec{F}_j + \sum_i \vec{f}_{ji} = \frac{d\vec{p}_j}{dt}\ .$$

Tomando el producto cruz con el vector $\vec{r}_j$ se obtiene

$$\vec{r}_j \times \left(\vec{F}_j + \sum_i \vec{f}_{ji} \right) = \vec{r}_j \times \frac{d\vec{p}_j}{dt}\ .$$

Por la misma razón discutida en la sección anterior

$$\vec{r}_j \times \frac{d\vec{p}_j}{dt} = \frac{d}{dt}\ (\vec{r}_j \times \vec{p}_j)\ .$$

Usando esta relación y sumando sobre j, se obtiene

$$\sum_j \vec{r}_j \times \vec{F}_j + \sum_{ji} \vec{r}_j \times \vec{f}_{ji} = \sum_j \frac{d}{dt}\ (\vec{r}_j \times \vec{p}_j) = \frac{d}{dt}\ \sum_j \vec{r}_j \times \vec{p}_j\ .$$

Pero

$$\vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{f}_{ji} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{f}_{ij} = 0\ ,$$

ya que $(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ es paralelo a $\vec{f}_{ij}$. Luego, la doble suma $\sum_{ji} \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji}$ es nula. De esta manera, usando las definiciones de momento angular y torque, se obtiene

$$\sum_j \vec{\tau}_j = \frac{d}{dt} \sum_j \vec{\ell}_j \, . \tag{8.3}$$

Sea

$$\vec{\tau} \equiv \sum_j \vec{\tau}_j$$

y

$$\vec{L} \equiv \sum_j \vec{\ell}_j$$

el torque y el momento angular total del sistema de partículas, entonces la ecuación (8.3) queda

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{\vec{L}} \, . \tag{8.4}$$

En palabras: Si el torque total que actúa sobre un sistema (respecto a un punto P) es nulo, entonces el momento angular del sistema (respecto al mismo punto) no cambiará. Lo anterior se conoce como la *ley de conservación del momento angular*. Las fuerzas internas de un sistema pueden cambiar el momento angular de las partículas que lo componen, pero no pueden modificar el vector momento angular total.

Ilustremos el uso de la ley de conservación de momento angular con algunos ejemplos

Ejemplo 1

Demuestre que un planeta, que se mueve alrededor del sol, barre áreas iguales en tiempos iguales, es decir, dA/dt =constante.

Coloquemos el origen de nuestro sistema de coordenadas en el lugar donde está el sol. La fuerza que el sol ejerce sobre los planetas es a lo largo de la dirección radial, por lo tanto, la fuerza atractiva de gravitación no ejerce torque sobre el planeta. De lo anterior se desprende que el momento angular del planeta debe ser en todos los instantes el mismo.

¿Cuál es el área ΔA que barre el planeta en un tiempo Δt ? La respuesta es

$$\Delta A = \frac{1}{2} \, | \, \vec{r} \times (\vec{v}\, \Delta t) \, | = \frac{\Delta t}{2m} \, |\vec{r} \times \vec{p}| = \frac{\Delta t}{2m} \, \ell \, .$$

Como $\ell = |\vec{\ell}|$ se conserva a lo largo de la trayectoria, se deduce que el área barrida en un tiempo Δt es independiente del punto de la trayectoria que se considere.

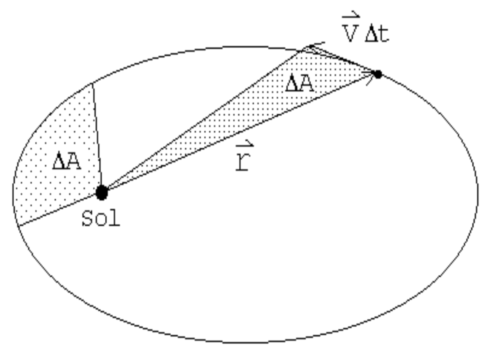

Figura 8.3

Ejemplo 2

Considere una masa M colgada de una varilla rígida, de masa despreciable y de largo L, que puede girar libremente en torno al punto O (ver figura adjunta). En el instante $t = 0$ la masa M explota y una parte $M/2$ sale disparada con velocidad v en una dirección que forma un ángulo θ con respecto a la horizontal. Encuentre la energía cinética de la parte que quedó adosada a la varilla en el instante inmediatamente posterior a la explosión.

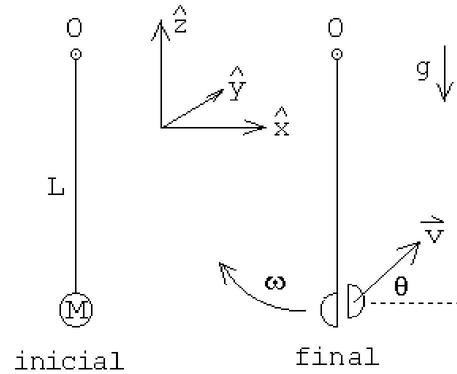

Figura 8.4

Sobre el sistema (la varilla con la masa colgando) actúan las siguientes fuerzas: i) el peso $-Mg\hat{z}$, ii) una fuerza $\vec{F}_0$ que ejerce el eje de giro sobre la varilla y iii) fuerzas originadas por la explosión. En el instante $t = 0$ el peso no ejerce un torque sobre el sistema respecto a 0 ya que en ese instante los vectores $\vec{r}$ y $-Mg\hat{z}$ son paralelos. La fuerza $\vec{F}_0$ tampoco ejerce un torque ya que el *brazo* para esta fuerza es nulo. Las fuerzas originadas por la explosión son fuerzas internas y por consiguiente no modifican el momento angular total del sistema. Concluimos que el momento angular total antes y justo después de la explosión deben ser iguales.

Inicialmente el momento angular es cero. Después de la explosión el momento angular del fragmento que sale disparado es

$$\vec{\ell}_1 = -\frac{M}{2} Lv \cos\theta \; \hat{y} \; .$$

Si la velocidad angular de la varilla en el instante posterior a la explosión es ω_0, el momento angular de la masa que quedó adosada a la varilla es

$$\vec{\ell}_2 = \frac{M}{2} L^2 \omega_0 \; \hat{y} \; .$$

Como la suma de los dos momentos angulares $\vec{\ell}_1$ y $\vec{\ell}_2$ debe ser nula, se tiene que

$$\frac{M}{2} Lv \cos\theta = \frac{M}{2} L^2 \omega_0 \; .$$

Despejando ω_0 se encuentra

$$\omega_0 = \frac{v\cos\theta}{L} \; .$$

Finalmente, conociendo la velocidad angular ω_0 podemos evaluar la energía cinética del fragmento que quedó adosado a la varilla, en el instante inmediatamente posterior a la explosión:

$$K = \frac{1}{2}\frac{M}{2} L^2 \omega_0^2 = \frac{M}{4} v^2 \cos^2\theta \; .$$

– – – – – –

Antes de analizar un tercer ejemplo debemos demostrar una proposición importante.

Consideremos nuevamente N partículas con masas $\{m_j\}$ ubicadas en los lugares $\{\vec{r}_j\}$ y con velocidades $\{\vec{v}_j\}$. Sean $\vec{R}_{cm}$ y $\vec{V}_{cm}$ la posición y velocidad del ventro de masas. Denotemos por $\vec{r}_j\,'$ y $\vec{v}_j\,'$ los vectores de posición y velocidad de la partícula m_j respecto al centro de masas.

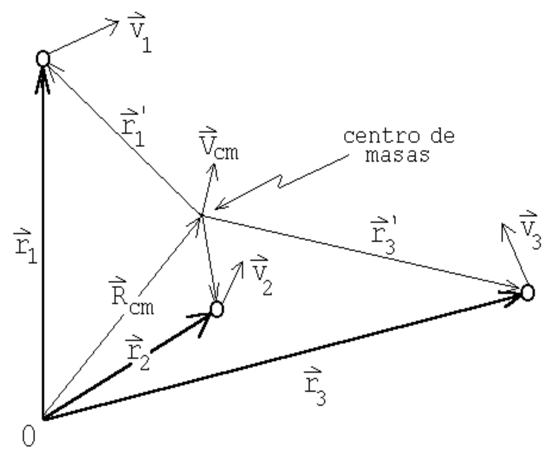

Figura 8.5

Entonces

$$\vec{L} = \sum_j \vec{\ell}_j = \sum_j \vec{r}_j \times \vec{p}_j = \sum_j m_j\,(\,\vec{r}_j \times \vec{v}_j\,)\ .$$

Por otra parte

$$\vec{r}_j = \vec{R}_{cm} + \vec{r}_j\,'$$

y

$$\vec{v}_j = \vec{V}_{cm} + \vec{v}_j\,'\ .$$

Sustituyendo estas relaciones en la ecuación anterior se obtiene

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \sum_j m_j \left(\vec{R}_{cm} + \vec{r}_j\,'\right) \times \left(\vec{V}_{cm} + \vec{v}_j\,'\right) \\
&= \sum_j m_j \vec{R}_{cm} \times \vec{V}_{cm} + M\ \frac{\sum_j m_j \vec{r}_j\,'}{M} \times \vec{V}_{cm} + M\ \vec{R}_{cm} \times \frac{\sum_j m_j \vec{v}_j\,'}{M} + \sum_j m_j \vec{r}_j\,' \times \vec{v}_j\,'
\end{aligned}$$

Pero

$$\frac{\sum_j m_j \vec{r}_j\,'}{M} = \vec{R}_{cm}\,'$$

y

$$\frac{\sum_j m_j \vec{v}_j\,'}{M} = \vec{V}_{cm}\,'$$

son la posición y velocidad del centro de masas medidas desde el centro de masas — luego ambas sumatorias son nulas. De esta manera la ecuación anterior queda

Proposición:

$$\vec{L} = M\,\vec{R}_{cm} \times \vec{V}_{cm} + \sum_j \vec{\ell}\,' = \vec{R}_{cm} \times \vec{P}_{cm} + \vec{L}\,'\ .$$

En palabras: El momento angular respecto a cualquier punto O es igual al momento angular debido a la traslación del sistema como un todo, es decir, el movimiento del centro de masas con toda la masa concentrada en ese lugar, más el momento angular (rotacional intrínseco) del sistema visto desde el centro de masas.

Ejemplo 3

Considere dos partículas de masa m unidas por una barra de masa despreciable y largo L. Una tercera partícula, también de masa m, colisiona con las anteriores, quedando adosada a la # 2. Si la velocidad incidente de la masa # 3 es v_0, y ésta incide como se muestra en la figura 8.6, encuentre la posición de la masa # 1 en función del tiempo.

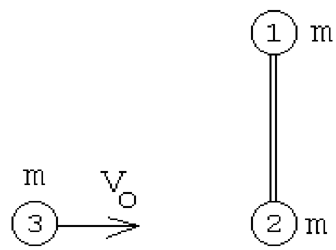

Figura 8.6

Resolveremos el problema de dos maneras.

Primero elijeremos el sistema de coordenadas de manera que el eje $\hat{x}$ coincida con la recta a lo largo de la cual se mueve el centro de masas del sistema (ver figura 8.7).
Si $t = 0$ corresponde al instante en que ocurre la colisión, entonces la posición del centro de masas del sistema total (es decir, de las tres masas), tanto antes como después de la colisión, vendrá dado por

$$\vec{r}_{cm}(t) = \frac{v_0}{3}\, t\, \hat{x} \ .$$

Posterior a la colisión, la barra con masas $2m$ y m en sus extremos, rotará con cierta velocidad angular ω_0 en torno al centro de masas. Podemos evaluar ω_0 usando la ley de conservación del momento angular.

Antes de la colisión el momento angular del sistema es

$$\vec{L}_i = \left[\frac{L}{3}\, m v_0\right]\ \hat{z} \ .$$

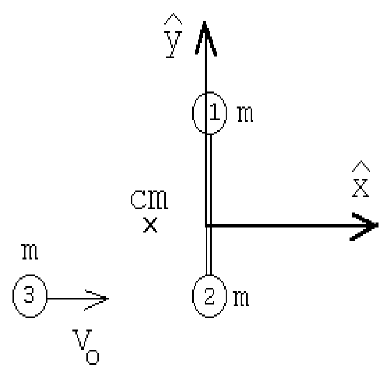

Figura 8.7

Después de la colisión, para el sistema de referencia que estamos usando, la varilla con las masas sólo tiene un momento angular intrínseco:

$$\vec{L}_f = \left[\ \frac{2L}{3} m \left(\omega_0 \frac{2L}{3}\right) + \frac{L}{3}(2m)\ \left(\omega_0 \frac{L}{3}\right)\right]\ \hat{z} = \frac{2}{3}\, m\omega_0 L^2\, \hat{z} \ .$$

Usando la ley de conservación del momento angular se encuentra que

$$\omega_0 = \frac{v_0}{2L} \quad .$$

Volveremos a resolver el problema pero eligiendo ahora un sistema de coordenadas fijo en el laboratorio y con el origen coincidiendo con la la posición de la partícula # 2 antes de la colisión. Nuevamente elegimos el eje $\hat{x}$ a lo largo de la velocidad de la partícula incidente y el eje $\hat{y}$ a lo largo de la dirección que tiene la barra antes de la colisión.
En este sistema de coordenadas, el momento angular del sistema, antes de la colisión, es nulo. Después de a la colisión, el momento angular total de la barra con las tres masas, también deberá ser nulo. El momento angular de este sistema complejo que se aleja, se puede evaluar usando la proposición recién demostrada. Consta de dos partes: el momento angular del centro de masas y el momento angular rotacional intrínseco.
Como el centro de masas se mueve con velocidad $v_0/3$, la masa total es $3m$ y el *brazo* (distancia entre el origen y la tangente de la trayectoria del centro de masas) es $L/3$, el momento angular del centro de masas será

$$\vec{R}_{cm} \times \vec{P}_{cm} = -\frac{L}{3}\,(3m)\,\frac{v_0}{3}\,\hat{z}\ .$$

El momento angular intrínseco, igual que en el caso anterior, viene dado por

$$\vec{L}\,' = \frac{2}{3} m\omega_0 L^2\,\hat{z}\ .$$

La condición que la suma de los dos momentos angulares anteriores sea nula, nos da la misma relación que ya habíamos encontrado:

$$\omega_0 = \frac{v_0}{2L} \quad .$$

Para la posición de la masa #1 se obtiene la expresión

$$\vec{r}_1(t) = \begin{cases} \dfrac{2L}{3}\,\hat{y} & \text{para } t < 0 \\ \dfrac{v_0}{3}\,t\,\hat{x} + \dfrac{2L}{3}\,[\cos(\omega_0 t)\,\hat{y} - \sin(\omega_0 t)\,\hat{x}] & \text{para } t > 0 \end{cases}$$

8.3. Problemas

1. Consideremos un satélite artificial, de masa m, que gira en torno a la tierra a lo largo de una órbita elíptica y yas distancias máxima y mínima a la superficie de la tierra son 2555 km y 352 km, respectivamente. La velocidad máxima del satélite es de 29737 km/h. El radio terrestre es igual a 6382 km. ¿Cuáles serán las velocidades del satélite en el perigeo ($r_{\rm min}$) y apogeo ($r_{\rm max}$), respectivamente?

2. Una bala de masa m y velocidad v pasa a través de la "lenteja" de un péndulo de masa M, y emerge con velocidad $v/2$. La lenteja del péndulo está colgada de una cuerda de longitud ℓ. ¿Cuál debe ser el valor de v para que la lenteja del péndulo describa un círculo completo? ¿Cómo se modifica el problema si, en lugar de una cuerda, la lenteja está colgada de una varilla rígida sin masa?

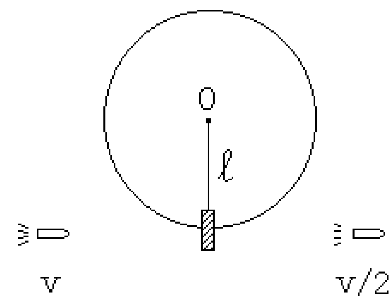

Figura 8.8

3. Una partícula de masa m y velocidad v_0 incide sobre una barra de largo L y masa despreciable, que en cada uno de los extremos tiene una masa m, tal como se indica en la figura. Suponga que el choque entre las esferas # 1 y # 2 es elástico y central (frontal). ¿Se moverá la partícula # 1 después del choque? Si su respuesta es afirmativa evalue su dirección y magnitud.

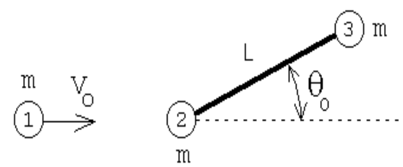

Figura 8.9

4. Una masa m_1 se deja caer desde una altura h sobre un "balancín" (ver figura 8.10). El balancín puede girar libremente en torno a O en el sentido contrario al reloj. Sobre el otro extremo del balancín hay una masa m_2. Al chocar la masa m_1 contra el balancín, ésta queda adosada a él. ¿Qué fracción de la energía total inicial se disipa en la colisión? Desprecie la masa del balancín.

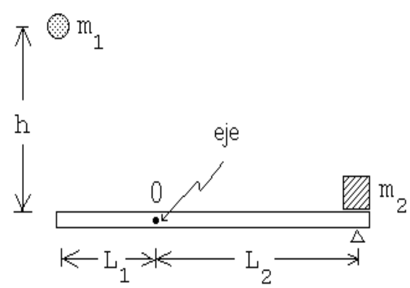

Figura 8.10

5. Considere dos masas m, unidas por una varilla de largo L. Esta varilla está soldada en su centro a otra varilla, formando un ángulo α. El sistema anterior rota con una velocidad angular ω_0 en torno a la segunda varilla (ver figura adjunta). En cierto instante la soldadura se rompe, desacoplándose el movimiento de las dos varillas. Describa, de ahí en adelante, el movimiento de la varilla con las dos masas.

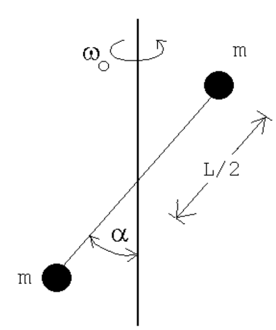

Figura 8.11

6. Una masa m realiza un movimiento circular, con radio R_0, sobre una mesa (sin fricción), atada a un hilo (ver figura 8.12). Sea ω_0 la velocidad angular inicial. ¿Cuál es el trabajo que debe realizarse (tirando del hilo) para achicar el radio de giro desde R_0 a $R_0/2$?

   Respuesta: $W = 3m\omega_0^2 R_0^2/2$.

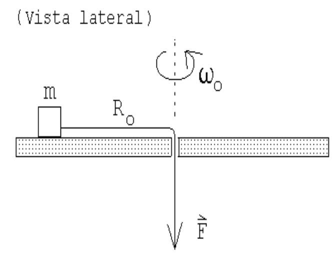

Figura 8.12

7. Considere una varilla rígida, pero de masa despreciable, cuyo largo es L y que tiene dos masas m, una adosada en uno de los extremos y la otra al centro (ver figura). La varilla puede girar libremente en el plano vertical alrededor de un eje que pasa por el extremo en que no tiene una masa adosada. Todo el sistema se encuentra en un campo gravitacional constante $\vec{g} = -g\hat{z}$. Suponga que este sistema inicialmente se encuentra en reposo en su posición de equilibrio inestable. Una leve perturbación hace que el sistema salga de su posición de equilibrio y paulatinamente comienza a "caer".

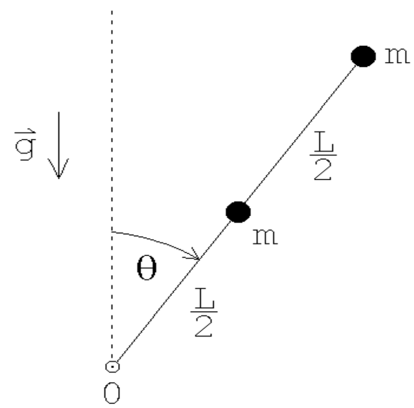

Figura 8.13

   a) Encuentre la velocidad angular $\omega = \dot{\theta}$ y la aceleración angular $\alpha = \ddot{\theta}$ de la varilla cuando ésta forme un ángulo θ con la vertical.

   b) Encuentre la fuerza que la varilla ejerce sobre el eje cuando la varilla pasa por la horizontal (es decir, cuando $\theta = \pi/2$).

8. Dos masas m unidas por un hilo de largo L, caen con el hilo horizontal partiendo desde el reposo. Después de caer una distancia h, una de ellas choca elásticamente con una viga.

   a) Determine la velocidad angular con que girarán las masas en torno a su centro de masas después de la colisión.

   b) Encuentre la tensión a la que estará sometido del hilo después de que ha ocurrido la colisión.

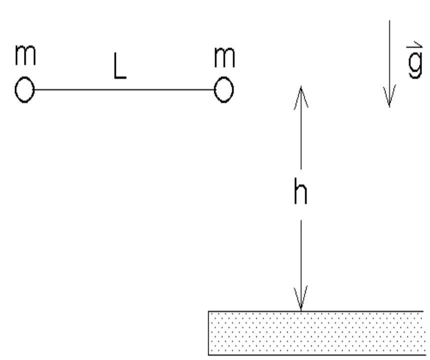

Figura 8.14

9. Considere un *péndulo cónico* (es decir, una masa m colgada de un hilo ideal de largo L), que gira en círculos formando un ángulo α_0 con la vertical.

   a) ¿Con qué velocidad angular girará si el hilo se acorta lentamente hasta llegar a $L/2$?

   b) ¿Que trabajo debe realizarse para acortar el hilo en esa magnitud?

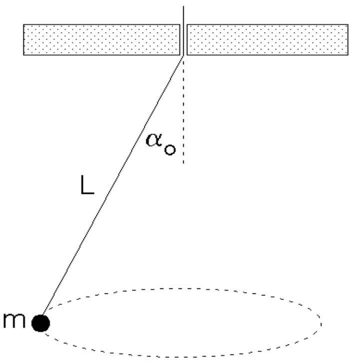

Figura 8.15

10. Un alambre (de masa despreciable) de largo $2L$ se dobla al centro de manera que forma un ángulo α. En cada extremo el alambre tiene una masa m. Este dispositivo se “cuelga” de un eje tal como se muestra en la figura adjunta. Calcule el período de oscilación del sistema para pequeñas oscilaciones en torno a su posición de equilibrio estable. Verifique que la expresión general, en los límites $\alpha = 0$ y $\alpha = \pi$, da los resultados esperados.

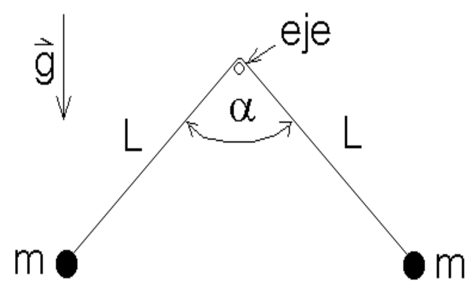

Figura 8.16

    Para resolver este problema suponga que el sistema esta oscilando (con pequeñas oscilaciones) y evalúe para un instante arbitrario el torque y el momento angular. Luego, usando la ecuación (8.4) demuestre que la variable $\alpha(t)$ satisface la ecuación diferencial de un oscilador armónico.

11. Considere una varilla de largo L que tiene dos masas M adosadas tal como se muestra en la figura. Un masa m que incide con velocidad v_0, choca con el péndulo quedando adosada a él a una distancia h del eje. Determine el impulso trasmitido por el eje al péndulo durante la colisión. ¿A qué altura debe impactar m para que el impulso transmitido por el eje sea nulo? (en ese caso el eje no se percata de la colisión).

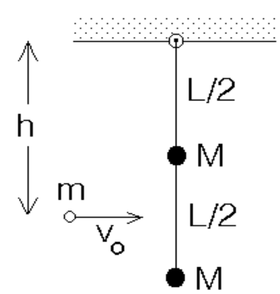

Figura 8.17

8.4. Solución a algunos de los problemas

Solución al problema 6

Debido al principio de conservación de la energía, la energía cinética que tiene el sistema cuando la varilla forma un ángulo θ con la normal debe ser igual al cambio de energía potencial, o sea, $\Delta K = \Delta U$, con

$$\Delta K = \frac{1}{2}m\left(\frac{L}{2}\omega\right)^2 + \frac{1}{2}m(L\omega)^2 = \frac{5}{8}mL^2\omega^2$$

y

$$\Delta U = mg(L - L\cos\theta) + mg\left(\frac{L}{2} - \frac{L}{2}\cos\theta\right) = \frac{3}{2}mgL\left(1 - \cos\theta\right) .$$

De esta manera se deduce que

$$\omega^2(\theta) = \frac{12}{5}\frac{g}{L}(1 - \cos\theta) .$$

Derivando esta relación encontramos la aceleración angular, en efecto,

$$2\omega\dot{\omega} = \frac{12}{5}\frac{g}{L}\sin\theta\,\dot{\theta} .$$

Pero $\dot{\theta} = \omega$, luego

$$\alpha = \dot{\omega} = \frac{6}{5}\frac{g}{L}\sin\theta .$$

Demostremos que el mismo resultado se puede obtener usando la “ecuación de movimiento” $\tau = d\ell/dt$. Cuando la varilla forma un ángulo θ con la normal, el torque respecto a un origen ubicado en el eje es

$$\tau = mgL\sin\theta + mg\frac{L}{2}\sin\theta = \frac{3}{2}mgL\sin\theta .$$

Para el momento angular tenemos

$$\ell = m(L\omega)L + m\left(\frac{L}{2}\omega\right)\,\frac{L}{2} = \frac{5}{4}mL^2\omega .$$

Reemplazando estas expresiones en la ecuación de movimiento se obtiene

$$\frac{3}{2}mgL\sin\theta = \frac{5}{4}mL^2\dot{\omega} ,$$

de donde, nuevamente

$$\alpha = \dot{\omega} = \frac{6}{5}\frac{g}{L}\sin\theta .$$

Supongamos ahora que la varilla está pasando por la horizontal (es decir, $\theta = \pi/2$). En ese instante el centro de masas (que está ubicado a una distancia $3L/4$ del eje) acelera con una aceleración

$$\vec{a}_{\rm cm} = -|a_t|\hat{z} - |a_c|\hat{x} = -\frac{3}{4}L\alpha\hat{z} - \omega^2\,\left(\frac{3}{4}L\right)\,\hat{x} = -\frac{9}{10}g(\hat{z} + 2\hat{x}) .$$

(Observe que la componente $\hat{z}$ de la aceleración de la partícula m que está en el extremo de la varilla, cuando ésta pasa por la horizontal, es $6g/5$, o sea, mayor que g; convénzase de que así debía ser). La fuerza neta que actúa sobre la varilla (cuando pasa por la horizontal) es

$$\vec{F}_{\rm tot} = \vec{F}_{\rm eje} - 2mg\hat{z} \ .$$

Pero $\vec{F}_{\rm tot} = (2m)\vec{a}_{\rm cm}$, luego

$$\vec{F}_{\rm eje} - 2mg\hat{z} = -2m\frac{9}{10}g(\hat{z} + 2\hat{x}) \ ,$$

de donde se deduce que

$$\vec{F}_{\rm eje} = \frac{1}{5}mg\ (\hat{z} - 18\hat{x}) \ .$$

Solución al problema 8

Al chocar con la viga la velocidad de la masa m será $\vec{v}_0 = -\sqrt{2gh}\hat{z}$. El choque con la viga es elástico y el hilo que une ambas masas (que no puede ejercer fuerzas transversales a su orientación) no interviene para nada en ese proceso. Luego la masa m rebotará con la velocidad $\sqrt{2mg}\hat{z}$. La otra masa no modifica su velocidad mientras ocurre el choque. Por lo tanto, justo después de la colisión, la velocidad del centro de masas (respecto a un observador junto a la viga) será nula.

Para un observador junto a la viga (en el lugar donde ocurrirá la colisión), el momento angular antes de la colisión es

$$\ell_i = Lm\sqrt{2gh} \ .$$

Después de la colisión será

$$\vec{\ell}_f = \vec{L}_{\rm cm} + \vec{\ell}\,'_f \ ,$$

donde $\vec{L}_{\rm cm}$ es el momento angular debido a la traslación del centro de masas y $\vec{\ell}\,'_f$ es el momento angular observado desde el centro de masas. Ya que justo después de la colisión el centro de masas está en reposo $\vec{L}_{\rm cm} = 0$. Denotemos por ω_0 la velocidad angular del hilo después de la colisión, entonces

$$\ell'_f = 2m\left(\frac{L}{2}\omega_0\right)\frac{L}{2} = \frac{mL^2}{2}\omega_0 \ .$$

Como el impulso que ejerce la viga no cambia el momento angular del sistema respecto al punto en que se aplica esa fuerza de percusión, se tiene que el momento angular debe conservarse. Luego

$$\frac{mL^2}{2}\omega_0 = Lm\sqrt{2gh} \ ,$$

de donde

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{8gh}}{L} \ .$$

En este problema el mismo resultado también se puede obtener usando la conservación de la energía. Después de la colisión, como el centro de masas está en reposo, toda la energía cinética se debe a la rotación, siendo ésta

$$K_r = 2 \cdot \frac{1}{2} m \left(\frac{L}{2} \omega_0 \right)^2 = \frac{1}{4} m L^2 \omega_0^2$$

Por otra parte, el cambio de energía potencial es

$$\Delta U = 2mgh \ .$$

Igualando ambas expresiones obtenemos nuevamente que

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{8gh}}{L} \ .$$

Después de ciertos momentos de reflexción, es claro que la caída de las dos masas en un campo gravitatorio constante, no afecta la tensión del hilo. Por lo tanto, la tensión de la cuerda se debe sólo al movimiento rotacional de las dos masas. El radio de giro de ellas es $L/2$. La magnitud de la fuerza centrípeta (que es igual a la tensión del hilo) es

$$F_{\text{cent}} = m\omega_0^2 \frac{L}{2} = 4mg\frac{h}{L} \ .$$

Solución al problema 10

Denotemos por ϵ al ángulo que el péndulo hace respecto a su posición de equilibrio (ver figura 8.18).

El momento angular del péndulo será

$$\vec{\ell} = 2Lm(L\dot{\epsilon}) \ \hat{x} \ ,$$

donde $\dot{\epsilon}$ es la velocidad angular del péndulo (siendo positiva cuando gira en la dirección contraria a los punteros del reloj). Derivando respecto al tiempo se deduce que

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = 2mL^2\ddot{\epsilon} \ \hat{x} \ .$$

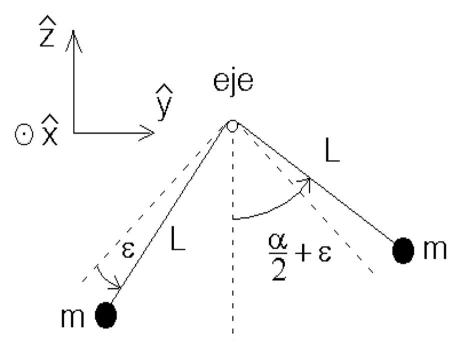

Figura 8.18

El torque de la fuerza gravitacional (respecto a un origen en el eje) es

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= mgL\sin(\alpha/2-\epsilon) \ \hat{x} - mgL\sin(\alpha/2+\epsilon) \ \hat{x} \\ &= -2mgL\cos(\alpha/2) \ \sin\epsilon \ \hat{x} \end{aligned}$$

Sustituyendo las dos relaciones anteriores en la ecuación de movimiento $\vec{\tau} = d\vec{\ell}/dt$ encontramos

$$-2mgL\cos(\alpha/2)\ \sin\epsilon = 2mL^2\ddot{\epsilon}\ .$$

Para pequeñas oscilaciones en torno de la posición de equilibrio podemos usar la aproximación $\sin\epsilon \simeq \epsilon$. De esta manera obtenemos

$$\ddot{\epsilon} + \left(\frac{g}{L}\cos(\alpha/2)\right)\ \epsilon = 0\ .$$

Esta es la ecuación de movimiento de un oscilador armónico cuyo período es

$$T = 2\pi\ \left[\ \sqrt{\frac{g}{L}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\ \right]^{-1}\ .$$