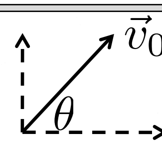
Pauta Examen

Prof. Álvaro S. Núñez

Pregunta 1



- Escogemos el origen de coordenadas en el vértice inferior del borde vertical del tobogán.

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_0^x\, t \\ y(t) &= y_0 + v_0^y\, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}$$

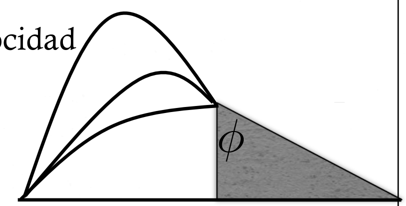
$$\begin{aligned} x(t) &= -d + v\cos\theta\, t \\ y(t) &= v\sin\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}$$

Al vértice superior (x=0,y=h) llega en el instante: $t^* = \dfrac{d}{v\cos\theta}$

$$y(t^*) = d\tan\theta - \frac{g d^2}{2 v^2 \cos^2\theta} = h$$

Pregunta 1 (contd)

- Debemos además hacer que la velocidad sea tangencial al tobogán:



$$\tan\phi = \frac{b}{h} = \left|\frac{v_x(t^*)}{v_y(t^*)}\right|$$

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v\cos\theta \\ v_y(t) &= v\sin\theta - gt \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} v_x(t^*) &= v\cos\theta \\ v_y(t^*) &= v\sin\theta - \frac{gd}{v\cos\theta} \end{aligned}$$

$$\frac{h}{b} = \frac{gd}{v^2\cos^2\theta} - \tan\theta$$

Pregunta 1 (contd)

- Juntando las ecuaciones tenemos:

$$\tan\theta = \left(\frac{h}{b} + 2\frac{h}{d}\right)$$

- Una vez conocido el ángulo de disparo, la velocidad se determina fácilmente:

$$\frac{gd}{v^2} = 2\left(\frac{h}{b} + \frac{h}{d}\right)\cos^2\theta$$

Pregunta 1 (contd)

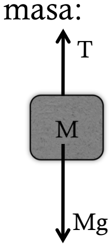
- Ahora lo haremos usando derivadas (recién aprendidas en cálculo)
- En cualquier instante las coordenadas x e y están relacionadas por:

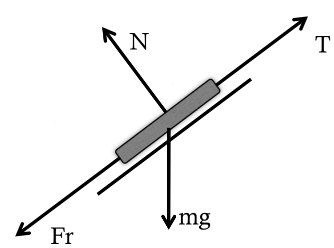
$$y = \tan\theta(x+d) - \frac{g(x+d)^2}{2v^2\cos^2\theta}$$

- La condiciones de interés son: y(0)=h & y'(0) = m (pendiente de la recta que define el tobogán).
- Obtenemos directamente las ecuaciones de antes.

Pregunta #2

- Consideremos el diagrama de cuerpo libre para cada masa:





$$F_y = T - Mg$$

$$\begin{aligned} F_\perp &= N - mg\cos\theta \\ F_\parallel &= T - mg\sin\theta \pm Fr \end{aligned}$$

Pregunta 2 (contd)

- Los dos signos de la fuerza de roce estan asociados a los casos en que la masa m es forzada a subir o a bajar por la competencia entre el peso y la tensión.
- La condición de equilibrio implica que todas las fuerzas son igual a cero.
- El roce no es capaz de vencer a la resultante de la fuerza en el plano, salvo que:

$$|Fr| \quad = \quad |mg\sin\theta - Mg| < \mu\, mg\cos\theta$$

Pregunta 2 (contd)

Tras un desarrollo algebraico elemental. El rango de valores de M/m es una ventana en torno al valor para el caso sin roce:

$$\sin\theta - \mu\cos\theta < \frac{M}{m} < \sin\theta + \mu\cos\theta$$

$$\frac{M}{\sin\theta + \mu\cos\theta} < \quad m \quad < \frac{M}{\sin\theta - \mu\cos\theta}$$

Pregunta 3

- La aceleración de gravedad sobre la superficie terrestre obedece la ley de gravitación al igual que la aceleración del satélite GPS.

$$\begin{aligned} g &= \frac{GM_T}{R_T^2} \\ a_{GPS} &= \frac{GM_T}{R_{GPS}^2} \end{aligned}$$

- La aceleración de gravedad del GPS se manifiesta como aceleración centrípeta:

$$\begin{aligned} a_{GPS} &= \omega^2 R_{GPS} \\ \frac{a_{GPS}}{R_{GPS}} &= \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \end{aligned}$$

Pregunta 3 (contd)

$$R_{GPS}^3 = \frac{gT^2\ R_T^2}{4\pi^2}$$

$$\begin{aligned} R_{GPS}^3 &= \frac{1}{4\pi^2} 10 \times (12 \times 60 \times 60)^2 \times \left(6400 \times 10^3\right)^2 \\ &= \frac{1}{4\pi^2} 10 \times \left(2 \times 6^3 \times 10^2\right)^2 \times \left(2^6 \times 10^5\right)^2 \\ R_{GPS} &= \frac{1}{\pi^{2/3}} 10^5 \times \left(6^2\right) \times \left(2^4\right) \\ &\approx 28.000.000\ m \end{aligned}$$

Pregunta 4

- Las fuerzas sobre el bloque de masa M son:

$$\begin{aligned} F_x &= T - F_r \\ F_y &= N - Mg \end{aligned}$$

- La condición de equilibrio en el bloque de masa M es:

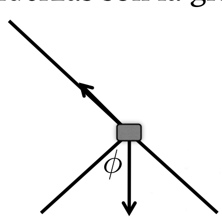
$$\begin{aligned} T &= F_r \\ N &= Mg \end{aligned}$$

- La condición para que el roce sea capaz de cumplir la condición de equilibrio, es:

$$Fr = T \quad < \quad \mu N = \mu\, Mg$$

Pregunta 4 (contd)

- Sobre el bloque de masa m, tenemos que las unicas fuerzas son la gravedad y la tensión.



$$T - mg\sin\phi \quad = \quad m\,\dot{\phi}^2 d$$

- Ahora solo necesitamos la velocidad angular para determinar T.

Pregunta 4 (contd)

- Para eso usaremos la ley de conservación de energía.

$$E = \frac{1}{2}md^2\dot{\phi}^2 - mgd\sin\phi$$

- Las condiciones iniciales hacen E=0, obteniendo:

$$d\dot{\phi}^2 = 2g\sin\phi$$

- De modo que la tensión T es:

$$T = 3mg\sin\phi$$

Pregunta 4 (contd)

- La condición para que M comience a moverse es, entonces,

$$\mu Mg = 3mg\sin\phi$$

- En el caso específico del problema:

$$\frac{2}{3}\mu = \sin\phi$$

Pregunta 5

- Si parte de una altura h, su energía total será: $E \quad = \quad mgh$
- Como en el sistema las únicas fuerzas a lo largo del eje x son las normales de contacto entre los bloques, y estas son un par de acción-reacción, el momentum a lo largo del eje x es conservado. Inicialmente, este es nulo, por lo tanto:

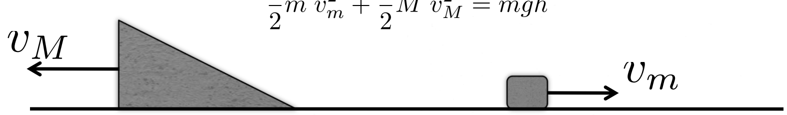
$$Mv_M + mv_m \quad = \quad 0$$

en cada instante.

Pregunta 5 (contd)

- Si parte de una altura h, su energía total será: $E \quad = \quad mgh$

$$\frac{1}{2}m\, v_m^2 + \frac{1}{2}M\, v_M^2 = mgh$$



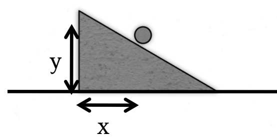
$$v_m^2 = \frac{2gh}{1+\frac{m}{M}} \qquad v_M^2 = \frac{m^2}{M^2}\left(\frac{2gh}{1+\frac{m}{M}}\right)$$

Pregunta 5 (contd)

- Ahora mientras aún va cayendo.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m(v_{mx}^2 + v_{my}^2) + \frac{1}{2}Mv_M^2 &= mg(h-y) \\ mv_m + Mv_M &= 0 \end{aligned}$$

- Aún nos falta una ecuación, la obtenemos imponiendo que la masa m esta confinada al plano inclinado



$$\begin{aligned} y &= \tan\theta \; x \\ v_{mx} &= -v_M + \dot{x} \end{aligned}$$

Pregunta 5 (contd)

$$v_{my} = \tan\theta \left(v_{mx} + v_M\right)$$

$$v_{my} = \tan\theta \left(1 + \frac{m}{M}\right) v_{mx}$$

Ahora usamos la ecuación de energía:

$$\frac{1}{2}m\left(v_{mx}^2 + \left(1 + \frac{m}{M}\right)\tan^2\theta v_{mx}^2\right) + \frac{1}{2}\frac{m^2}{M}v_{mx}^2 = mg\left(h-y\right)$$

$$v_{mx}^2 = \frac{2g(h-y)}{1 + \tan^2\theta\left(1 + \frac{m}{M}\right)^2 + \frac{m}{M}}$$

Pregunta 5 (contd)

$$v_M^2 = \left(\frac{m}{M}\right)^2 \frac{2g(h-y)}{1+\tan^2\theta\left(1+\frac{m}{M}\right)^2+\frac{m}{M}}$$

$$v_{my}^2 = \tan^2\theta\left(1+\frac{m}{M}\right)^2 \frac{2g(h-y)}{1+\tan^2\theta\left(1+\frac{m}{M}\right)^2+\frac{m}{M}}$$

Finalmente vemos, en la última ecuación, que la velocidad al cuadrado es proporcional al desplazamiento neto
¡Movimiento con aceleración constante!

$$a_{my} = g\frac{\tan^2\theta\left(1+\frac{m}{M}\right)^2}{1+\tan^2\theta\left(1+\frac{m}{M}\right)^2+\frac{m}{M}}$$

$$y(t) = h-\frac{1}{2}a_{my}t^2$$

Pregunta 6

- La aceleración centrípeta asociada a la forma de la trayectoria es generada por la fuerza de roce del piso sobre las ruedas.
- Dicha fuerza de roce actúa en una dirección perpendicular al movimiento. Dado que no hay movimiento a lo largo de la línea de acción de la fuerza de roce, esta debe ser de naturaleza estática.

Pregunta 6 (contd)

- El máximo valor que puede alcanzar la fuerza de roce estática es: μN
- Dado que el piso es horizontal:

$$N = Mg$$

- La aceleración centrípeta entonces esta acotada por:

$$M\frac{v^2}{R} < \mu M g \quad \Rightarrow \quad v < \sqrt{\mu R g}$$