

# **FISICA MODERNA**

Nelson Zamorano H.

Departamento de Física

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Universidad de Chile <sup>1</sup>

versión 27 de septiembre de 2007



# Índice general

<b>V.</b>	<b>RELATIVIDAD ESPECIAL: CINEMÁTICA</b>	<b>3</b>
V.1.	Introducción . . . . .	3
V.2.	Los Tiempos previos a la relatividad especial . . . . .	5
V.2.1.	¿Qué es el tiempo? . . . . .	6
V.2.2.	La medición del tiempo . . . . .	7
V.2.3.	El Principio de Relatividad de Galileo . . . . .	10
V.2.4.	El otro Paradigma Vigente . . . . .	12
V.3.	Postulados de la Relatividad Especial . . . . .	15
V.4.	Simultaneidad . . . . .	20
V.4.1.	Diagramas Espacio–Tiempo . . . . .	20
V.4.2.	Simultaneidad Absoluta(La velocidad de la luz es infinita)	24
V.4.3.	Simultaneidad relativa (La velocidad de la luz es finita)	25
V.5.	Transformaciones de Lorentz: Método Analítico. . . . .	33
V.5.1.	Composición de velocidades . . . . .	41
V.6.	El retorno de lo absoluto, los invariantes. . . . .	47
V.6.1.	El significado de VER y MEDIR en la Relatividad de Ein- stein . . . . .	48
V.7.	El Efecto Doppler Relativista . . . . .	50
V.7.1.	El Efecto Doppler . . . . .	50

---

V.7.2.	La función $k$ : el factor Doppler . . . . .	52
V.7.3.	Dilatación del Tiempo . . . . .	54
V.7.4.	El tiempo transcurrido depende de la trayectoria . . . . .	57
V.7.5.	La contracción del largo de una barra . . . . .	59
V.7.6.	Las transformaciones de Lorentz. . . . .	61
V.8.	El Sistema de Posicionamiento Global (GPS) . . . . .	65
V.9.	Ejercicios Resueltos . . . . .	72
V.10.	Ejercicios Propuestos . . . . .	80



# Capítulo V

## RELATIVIDAD ESPECIAL: CINEMÁTICA

### V.1. Introducción

La relatividad especial, de acuerdo a Sir E. Whittaker [1], fue introducida por H. Poincaré, H. A. Lorentz, G. F. FitzGerald, y puesta en su forma final por A. Einstein en 1905.

Hay, al menos, una contradicción en esta frase: las ecuaciones de la relatividad especial ciertamente fueron introducidas por Lorentz, pero Einstein las reinventó y les dió una interpretación física que resolvió el dilema existente en esa época. La solución propuesta llevaba el sello de su genialidad. Por otra parte, la interpretación propuesta por Lorentz no encontró respaldo experimental.

La idea de un sistema de referencia universal, en reposo absoluto y con un tiempo absoluto dominaba el pensamiento de esa época. Este sistema de referencia se identifica con el éter, un ente que tenía la propiedad del reposo absoluto.

En el libro citado, Whittaker describe el ingenio y los esfuerzos para determinar el movimiento de la tierra con respecto al éter, el movimiento absoluto. Entre otros, cita a FitzGerald (pág. 29, [1]) y su idea de medir el desplazamiento de la tierra con respecto al éter a través de la fuerza entre las dos placas paralelas de un condensador. La idea era la siguiente, si las placas se deslizan con el movimiento de la Tierra, la positiva genera una corriente positiva con respecto al éter y la op-

uesta una corriente negativa. Ambas corrientes de acuerdo a las leyes de Maxwell deben atraerse. Medir esta tenue fuerza permitiría desenmascarar el movimiento de la tierra con respecto al éter. El experimento, ciertamente, falló, como todos los que fueron diseñados para determinar un movimiento absoluto.

Poincaré, ante el fracaso de estos experimentos afirmó en 1899: *Considero como muy probable que los fenómenos ópticos dependen sólo de los movimientos relativos entre los cuerpos materiales...* Al año siguiente afirmaba su creencia en una nueva ley semejante a la segunda ley de la termodinámica, en el sentido que establecería la imposibilidad de medir la velocidad de la tierra con respecto al éter. Finalmente, de acuerdo a Whittaker, en 1904 Poincaré afirmaba que las leyes físicas debían ser las mismas para un observador *fijo* como para un observador en movimiento uniforme de traslación con respecto al anterior. Después de analizar las observaciones disponibles hasta esa fecha, concluyó que debía existir una nueva dinámica que se caracterizaría por la imposibilidad de que una velocidad lograra superar a la velocidad de la luz.

Una breve referencia a la vida de Einstein aparece en el documento escrito por J. A. Wheeler, quien conoció y trabajó con Einstein en sus años en Princeton<sup>1</sup>.

Einstein tenía una especial preocupación por entender el origen y naturaleza del tiempo. Una pregunta que lo fascinaba era: ¿cómo aparecería el universo para un observador que viaja en un rayo de luz? Estas preocupaciones unidas a sus sólidos conocimientos de física y matemática, su persistencia y genialidad<sup>2</sup> lo condujo a inventar la teoría de la relatividad especial. Una de las consecuencias más dramáticas de sus postulados fue desechar la idea de un tiempo absoluto. Esta idea contradecía la experiencia diaria en su tiempo y en el nuestro también.

El postulado de Einstein que introdujo la relatividad del tiempo, proviene de postular que la luz se propaga con la misma velocidad en cualquier sistema de referencia inercial. Éste principio genera dos consecuencias inmediatas.

Invalida el principio de superposición de velocidades en la forma establecida en la cinemática newtoniana. Como la velocidad de la luz debe ser la misma en dos sistemas inerciales en movimiento relativo, no se puede sumar velocidades en la forma tradicional, obtendríamos un valor diferente para la velocidad de la luz en cada sistema de referencia. Veremos que la constancia de la velocidad de la luz, genera otro atentado contra el sentido común: establece que dos eventos

---

<sup>1</sup>[www.escuela.de.verano/fisica/index.html](http://www.escuela.de.verano/fisica/index.html) , ver relatividad especial

<sup>2</sup>Cuando Einstein inventó la relatividad especial, no tenía un cargo en una universidad.

simultáneos en un sistema de referencia NO lo son en otro que se mueve con velocidad constante con respecto al anterior<sup>3</sup> Para este último observador, uno de los eventos ocurre antes que el otro.

En la relatividad especial, la simultaneidad es relativa: se asocia únicamente al observador inercial que así lo estableció.

Al adoptar la velocidad de la luz como una constante universal, desaparece la necesidad de especificar un medio que soporte las oscilaciones de la luz, considerada como una onda electromagnética propagándose.

La genialidad de Einstein fue abandonar la idea de un espacio y un tiempo absoluto y establecer la idea de una unidad espacio-tiempo, construido por cada observador inercial en base a los principios de la relatividad especial. Este espacio-tiempo constituye el andamiaje de cada observador inercial. Las mediciones del largo de una vara o el largo de un intervalo son propias y únicas del observador inercial que realiza las mediciones.

El valor de la velocidad de la luz es tan grande comparado con cualquier otra velocidad, que es muy difícil detectar las consecuencias de estos postulados en la vida diaria.

## V.2. Los Tiempos previos a la relatividad especial

La mecánica newtoniana supone la existencia de un tiempo y un espacio absoluto, rígido, inamovible y, en consecuencia el mismo para todos los observadores.

Estos postulados aparecen claramente al resolver problemas de mecánica. En estos ejercicios nadie registra un acortamiento en el largo de una barra en movimiento o un desajuste en el reloj de un viajero internacional a su regreso. La falta de evidencias de este tipo en la vida diaria, se debe a que la magnitud de la velocidad de la luz,  $\approx 300,000$  km/s, supera ampliamente cualquier velocidad cotidiana. Por esta razón algunos de los ejemplos propuestos fueron más bien *experimentos pensados* que realidades.

El postulado que sostiene el carácter universal de la velocidad de la luz en los sistemas de referencia inerciales, genera cambios profundos en la concepción del

---

<sup>3</sup>Un evento es un punto en espacio-tiempo, por ejemplo: el golpe en una mesa, prender una luz, tocarse dos dedos...,etc.

tiempo y del espacio. Para aceptarlos es necesario su verificación experimental. En esta tarea juega un papel central la precisión alcanzada en la medición del tiempo. Por esta razón, antes de adentrarnos en los postulados de la relatividad especial, haremos una reseña del paulatino incremento en la precisión con que se registra el tiempo. En la actualidad, esta es la variable que se puede medir con mayor precisión.

También incluimos una sección acerca del sistema de posicionamiento global, puesto que es la única instancia en la vida diaria en la cual los principios de la relatividad especial y general son determinantes para lograr la precisión que otorga este instrumento.

Las predicciones de la relatividad especial han sido verificadas en todos los experimentos realizados hasta el presente dentro de su rango de aplicabilidad: la mecánica clásica.

### V.2.1. ¿Qué es el tiempo?

El tiempo se define en forma tal que la descripción del movimiento resulte simple [4]. De hecho, uno de los logros de Galileo en 1583, fue el convertir un péndulo en una máquina confiable para registrar el paso del tiempo. Otro de los aciertos de Galileo fue utilizar un reloj de agua para tabular el tiempo durante la caída libre de los cuerpos. Éste fue también el origen de la utilización de planos inclinados y poleas, que surgieron como una forma de hacer la caída libre más lenta y por tanto más fácil de tabular. Es también, el origen de los ejercicios propuestos en los libros introductorios de mecánica.

Como lo señala Penrose [5], los griegos lograron un entendimiento aceptable de los fenómenos estáticos, pero no así de los dinámicos. Este hecho proviene, en parte, por la falta de una forma adecuada de cuantificar el cambio de posición de un objeto.

El número que se asocia a la duración de un fenómeno es lo que designamos tiempo. Este número se obtiene contando la cantidad de ciclos de otro fenómeno que consideramos periódico hasta que no se demuestre lo contrario.

Así es que ya antes de la aparición de la relatividad especial no existía un tiempo absoluto. El período del sol fue considerado por Aristóteles como un buen reloj. De acuerdo a la física Aristotélica la trayectoria del sol en el espacio está descrita

por una circunferencia perfecta, que es el único movimiento que no se frena (como un bloque en una mesa) o que no se acelera (como es el movimiento natural, la caída de un objeto hacia el centro de la tierra). Además es eterno. Era entonces un buen reloj. Ahora sabemos que el sol no gira entorno a la tierra y que además la rotación de la tierra sufre alteraciones [12] debido a diversos fenómenos físicos. Si uno necesita mejorar la precisión debe comparar con otro fenómeno.

## V.2.2. La medición del tiempo



Figura V.1: Este es un diagrama muy exagerado de la órbita de la Tierra alrededor del Sol. La órbita de la Tierra es muy cercana a una circunferencia. Se encuentra más cerca del Sol durante el verano del hemisferio Sur.

En la antigüedad, en una travesía marítima la latitud de un barco se puede medir comparando la posición del sol en el cenit (un ángulo) con la del lugar de origen u otro tomado como referencia (otro ángulo). Sin embargo la longitud, en aquellos tiempos sólo podía medirse por el desfase de, por ejemplo, el tiempo que marca un reloj al alcanzaer el cenit el sol con aquel que marcaba (en la misma posición del sol) en su punto de partida. En el barco un reloj era el único medio por el cual podía ubicar su longitud mar adentro.

En este contexto podemos mencionar a Hooke, quien alrededor del siglo XVII reemplazó el reloj de péndulo que utilizaban los barcos por uno con un resorte helicoidal. De este modo se aminoraba el efecto de los vaivenes del barco sobre el funcionamiento del reloj y la imprecisión en la determinación de la longitud. Otro relojero John Harrison (1693–1776) utilizó un resorte bimetálico para disminuir

los efectos debido a los cambios de temperatura y logró construir un reloj que sólo se atrasaba 54 segundos después de una travesía marítima de 156 días [8].

El más antiguo de los relojes lo constituye el movimiento de la Tierra alrededor del Sol. A medida que aumentó la precisión de los instrumentos utilizados, comenzaron a surgir dificultades debido a que la tierra describe una elipse alrededor del sol y, por la conservación del momento angular, hay tramos en los cuales viaja más rápido (ver Figura V.1) y el día solar, considerado como el intervalo de tiempo que transcurre entre dos posiciones consecutivas del sol en el cenit de un mismo lugar, se alarga en aproximadamente 4,7 segundos con respecto al día promedio.

¿Es posible detectar estos cambios?

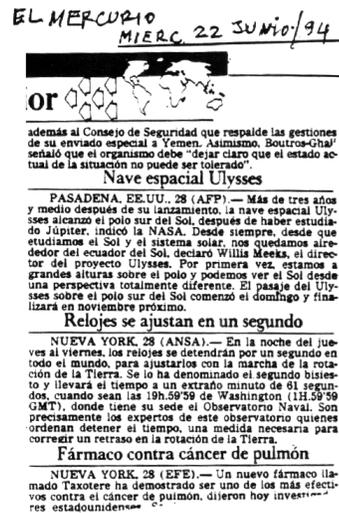
En 1900 los relojes se ajustaban de acuerdo al tránsito de las estrellas más luminosas a través de los meridianos de los observatorios terrestres. Esto se define como

Figura V.2: *Es muy probable que en el futuro, no se altere el funcionamiento de los relojes atómicos y se produzca un desfase con el tiempo astronómico. Ver [14].*

En 1936 la construcción de relojes de péndulo era técnicamente tan sofisticada que en el instituto BIH (Bureau International de l'Heure) se logró alcanzar una precisión suficiente para poder comparar la duración del día en dos fechas diferentes y asegurar que el largo de un día de Enero de dicho año excedió a uno de Julio en aproximadamente 2 milisegundos [12].

En 1955 la precisión de los relojes atómicos permitían medir el tiempo con una exactitud de una parte en  $10^{11}$  y su tamaño y peso permitían hacer comparaciones entre dos puntos separados.

En la décimotercera Conferencia General de Pesas y Medidas, se adoptó una nueva definición de la unidad de medida del tiempo. Se reemplazó la definición existente -basada en el movimiento orbital de la Tierra alrededor del Sol, como se detalla en la siguiente sección -, por la medida atómica del tiempo. La nueva definición es: *El segundo se define de la siguiente forma : un átomo de Cesio 133, que al sufrir una transición (hiperfina) entre dos estados posibles, emite una onda;*



9.192.631.770 ciclos (oscilaciones) de esta onda, corresponden a un segundo [3]. Los diez dígitos que aparecen en la definición fueron escogidos de manera que esta definición coincidiera con la del segundo efemérido.

Hoy, la precisión y estabilidad de los relojes atómicos permite una exactitud en su medida de 2 partes en  $10^{14}$ . Este número da una idea de la complejidad tecnológica involucrada en el proceso de medición [14].

### Escalas de tiempo

El *tiempo solar medio* es la escala de tiempo obtenida mediante dos posiciones sucesivas del Sol, después de aplicar diversas correcciones para lograr una escala más uniforme.

El *tiempo universal* UTO, es el tiempo solar medio referido al meridiano de Greenwich (Greenwich Mean Time o GMT).

Pequeñas correcciones adicionales de la uniformidad del movimiento de la Tierra debido a fluctuaciones en la dirección del eje polar y otros movimientos periódicos asociados a la atmósfera, las corrientes oceánicas, ...etc. lleva a otras escalas aún más uniformes: UT1 y UT2.

Numerosos laboratorios han cooperado para generar lo que se denomina *el tiempo coordinado universal* (UTC), que es un promedio de las escalas de tiempo atómico de cada uno de los laboratorios.

Para mantener la equivalencia entre el UTC y el largo del día, es necesario añadir o quitar, en forma ocasional, un segundo a la escala atómica. Este es el *segundo bisiesto* que se menciona en el recorte de un periódico que se acompaña. Esta armonía entre estas dos escalas es probable que llegue a su fin. No es fácil ajustar los relojes atómicos del GPS. Además es interesante señalar que si se hubiese cambiado el 770 que aparece al final de la definición del segundo atómico en base al Cs, por 990, sólo hubiese sido necesario ajustar estos relojes sólo 3 veces en lugar de las 23 en que se ha debido realizar desde 1967 [14].

Por un acuerdo internacional, la UTC es mantenida en coincidencia con la escala del navegante UT1, dentro de un margen de 0.7 segundos.

### V.2.3. El Principio de Relatividad de Galileo

La primera Ley de Newton es la definición de un sistema inercial. Si un cuerpo permanece en reposo (o en movimiento uniforme), lo podemos considerar como un sistema de referencia inercial. Una vez definido, necesitamos un protocolo para relacionar las leyes de Newton desde un sistema inercial a otro, de forma que sean las mismas en ambos. Éste es el *principio de relatividad de Galileo*.

Establece que *localmente*, no existe un experimento que permita a un observador distinguir entre un sistema inercial y otro.

Considere, por ejemplo, la caída libre de un objeto en dos situaciones distintas: un observador en tierra y el otro en un carro en movimiento, como aparece en la Figura V.4. La palabra *localmente* indica que a partir del resultado del experimento, cada observador opina que él permanece en reposo absoluto y es el otro observador quien está en movimiento.

Análogamente, consideremos dos observadores viajando en el espacio vacío –sin estrellas o galaxias a su alrededor que les sirvan de referencia– con una velocidad relativa  $v_0$ . Como ambos observadores no sienten ninguna fuerza extraña, suponen que se encuentran en reposo absoluto y le adscriben a cada punto del espacio una coordenada V.5.

Totalmente ignorantes del principio de relatividad de Galileo, cada uno de ellos piensa que los puntos espaciales están en reposo absoluto en su nave y por lo tanto *en cada instante son los mismos puntos*. Esta es la opinión del observador **A**. En la otra nave, el observador **B**, hace

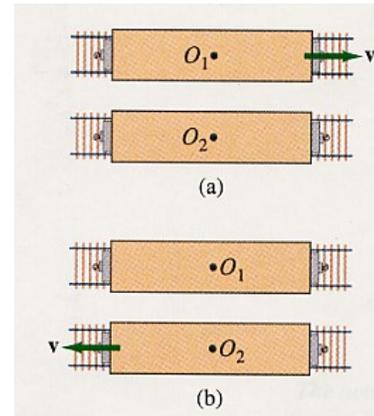


Figura V.3: Dos individuos ( $O_1$  y  $O_2$ ) en dos trenes que se mueven con una velocidad relativa  $V$ , no pueden decidir, cuál de ellos se encuentra en reposo absoluto y cuál en movimiento.

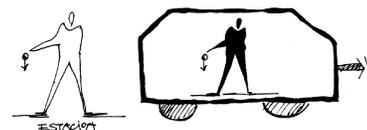


Figura V.4: .

un análisis similar y concluye que es el espacio tridimensional de su nave el que permanece quieto y que, obviamente, los puntos del espacio tridimensional del otro sistema de referencia, van cambiando en el tiempo. (De hecho, la coordenada  $x'$  de uno de ellos, cambia de acuerdo a la ley  $x' = x - v_0 t$ , como veremos a continuación.

Formalmente, cada punto en el espacio no es el mismo siempre. Debemos añadir una coordenada más que especifique el tiempo en que se determina las coordenadas.

En las transformaciones de Galileo el tiempo es absoluto, el mismo para todos los observadores inerciales. Como hemos señalado, esto marca el quiebre con el hecho que la velocidad de la luz es una constante en todos los sistemas inerciales. La solución a este problema es la relatividad especial con sus nuevos postulados. Uno de ellos implica que el tiempo es, efectivamente, relativo. Para respetar el enunciado de estos principios fue necesario derribar el dogma del tiempo absoluto.

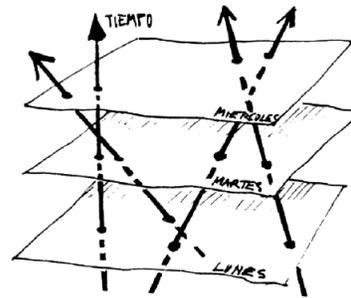


Figura V.5: Las líneas representan la trayectoria de diversos observadores inerciales. Cada uno considera que el otro se aleja (o acerca) y que él permanece en reposo. Las coordenadas de un punto P, fijo a uno de los sistemas, cambia en el tiempo de acuerdo al otro observador.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Transformación} \\ \text{de} \\ \text{Galileo} \end{array} \right\} \begin{array}{l} y' = y, \\ z' = z, \\ t' = t. \end{array} \quad (\text{V.1})$$

La inclusión de la velocidad de la luz como una constante universal marca el advenimiento de la relatividad especial. Con ello las transformaciones de Galileo se convierten en la aproximación de bajas velocidades  $v/c \ll 1$  de las nuevas leyes de transformación: las transformaciones de Lorentz.

## V.2.4. El otro Paradigma Vigente

: las ecuaciones de Maxwell.

### Las Ecuaciones de Maxwell

A fines del siglo decinueve existían dos teorías que habían demostrado, a través de numerosos experimentos, constituir un buen modelo de la naturaleza: la teoría de J. C. Maxwell de la electricidad y magnetismo de los cuerpos y la mecánica de Newton.

James Clerk Maxwell (1831 – 1879) unificó los diversos experimentos relacionados con cargas eléctricas, corrientes, bobinas...etc., realizados hasta esa época en un conjunto de ecuaciones que llevan su nombre. Esta unificación se logró incorporando un término extra en una de las ecuaciones que daba cuenta de resultados experimentales y unificaba la electricidad y el magnetismo. Este término adicional estableció que la dinámica del campo eléctrico o magnético corresponde a una ecuación de onda, cuya velocidad de propagación en el vacío es la velocidad de la luz. Este resultado surgió inesperadamente. Surgió al evaluar la velocidad de propagación de estos campos, que resultó ser inversamente proporcional al producto de dos constantes  $\epsilon_o$  y  $\mu_o$ . Ambas constantes provienen de ajustes de unidades entre la definición de la carga y el resto de las unidades ya establecidas [6] y que pueden ser determinadas experimentalmente midiendo la atracción entre dos cargas ( $\epsilon_o$ ) y la fuerza que se mide entre los dos cables con corriente en sentidos opuestos ( $\mu_o$ ). A raíz de estos resultados Maxwell postuló por primera vez que la luz era una onda electromagnética. Su existencia fue demostrada experimentalmente por Heinrich Hertz en 1888, cuando Maxwell ya había muerto.

Incluimos a continuación las ecuaciones de Maxwell en el sistema MKS a modo de información.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0 \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad c^2 \nabla \wedge \vec{B} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Este conjunto de ecuaciones se puede resolver en forma general. Las integrales son:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} &= \nabla \wedge \vec{A}\end{aligned}$$

$$\phi(1, t) = \int \frac{\rho(2, t - r_{12}/c)}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} dv_2$$

$$A(1, t) = \int \frac{\vec{j}(2, t - r_{12}/c)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r_{12}} dv_2$$

Note el término  $t' = t - r_{12}/c$  donde  $r_{12} \equiv |r_2 - r_1|$  en el argumento de la densidad de carga y la densidad de corriente. Esta variable  $t'$  se denomina el tiempo retardado y señala que el efecto del campo eléctrico o magnético en el instante  $t'$  y en el punto  $\vec{r}_2$  corresponde a la configuración de cargas y corrientes a una distancia  $r_{12}$  y en  $|r_{12}|/c$  segundos antes. Con esta inclusión del tiempo retardado, las ecuaciones se tornan no-lineales y difíciles de resolver.

### La relatividad de galileo y las ecuaciones de Maxwell

Como sabemos, las ecuaciones de Newton toman la misma forma en todos los sistemas inerciales bajo una transformación de Galileo.

Sin embargo, estas mismas transformaciones al extender su rango de validez a las ecuaciones de Maxwell generaban problemas. Al realizar una transformación de coordenadas de la forma (V.1), las ecuaciones de Maxwell toman una forma diferente en las nuevas coordenadas. Si esto es lo correcto, entonces existe un método para identificar un sistema de referencia en reposo absoluto: aquél donde las ecuaciones de Maxwell toman la forma más simple. Se postuló que este medio en reposo absoluto existía y se le denominó el éter. Obviamente, este medio no se podía detectar mediante ningún experimento físico.

Por otra parte, si la luz es una onda, el criterio mecanicista obliga a pensar en un medio sobre el cual se propaga esta onda. Más aún, de acuerdo a la composición de velocidades introducida por Galileo, si la velocidad con que viaja un destello de luz en nuestra sala es  $c$ , la velocidad de este mismo destello, medida por un

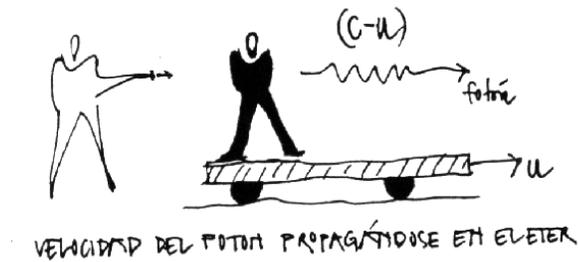


Figura V.6: Un destello (o fotón) lanzado por un observador en reposo en el laboratorio debería tener una velocidad  $(c - u)$  en el sistema de referencia de un observador que se aleja del anterior con una velocidad  $u$ .

observador que se desplaza con una velocidad  $v$  con respecto a la sala debería ser:  $c' = c \pm v$ , dependiendo del sentido de la rapidez del observador.

Si las ecuaciones de Maxwell cambian de forma al ir de un sistema de referencia a otro, podemos pensar que se propagan con una velocidad constante en el sistema en reposo absoluto. Este es el *éter* mencionado anteriormente.

La influencia histórica de las ondas mecánicas en cuerdas y otros ejemplos, impulsó a los estudiosos de la época a postular la existencia de este medio etéreo, que servía de medio de transmisión para las ondas electromagnéticas y a la luz en particular.

Hubo varios experimentos que indicaban que esta composición de velocidades no correspondía a lo observado. Uno de ellos fue realizado por Michelson y Morley, quienes, utilizando un dispositivo óptico, intentaron detectar alguna diferencia en el valor de la velocidad de la luz, dependiendo de la dirección y sentido en que viajaba con respecto a la velocidad orbital de la Tierra. El resultado fue negativo: no se encontró evidencia, dentro del margen de error del experimento, de una superposición de velocidades del tipo utilizado en la mecánica newtoniana.

La relevancia de este experimento es que la luz es un fenómeno electromagnético, su propagación está determinada por las ecuaciones de Maxwell, por tanto si la luz no discrimina entre dos sistemas inerciales en movimiento relativo, tampoco lo deben hacer las ecuaciones de Maxwell.

Este problema fue resuelto por H.A. Lorentz quien inventó una transformación para ir de un sistema inercial a otro que dejaba a las ecuaciones de Maxwell invari-

antes, es decir sin cambiar de forma. Estas son las transformaciones de Lorentz, las mismas que A. Einstein re-descubrió más tarde.

¿Por qué Lorentz no es, entonces, el inventor de la relatividad? Simplemente porque ni él ni ninguno de los científicos de su época pudieron dar con una interpretación que hiciera consistente la teoría y los experimentos. La interpretación de Lorentz señalaba que una barra en movimiento efectivamente se acortaba con respecto a una en reposo. Se realizaron varios experimentos, muy ingeniosos, sin ningún resultado. Las barras **no** se acortaban.

¿Qué fallaba en la interpretación de Lorentz? La idea de tiempo absoluto. Se necesitaba una teoría más revolucionaria. La propuesta por Einstein, quien desechó la idea de la existencia del éter y estableció como principio físico que la velocidad de la luz en el vacío era una constante universal.

Las transformaciones de Lorentz serán estudiados más tarde. En el límite, cuando  $v$  la velocidad relativa de un sistema inercial con respecto, es pequeña comparada con la velocidad de la luz  $c$ ,  $v/c \ll 1$ , las transformaciones de Lorentz se transforman en las transformaciones de Galileo, válidas para las ecuaciones de Newton.

Es notable que las ecuaciones de Maxwell permanecieran sin cambios al introducir las transformaciones de Lorentz para ir de un sistema inercial a otro. Las ecuaciones de Maxwell son relativistas y fueron inventadas antes que existiera la relatividad especial.

Las ecuaciones de Newton, sin embargo, necesitan ser modificadas tanto en su forma como en su concepto. Es preciso abandonar la idea de tiempo absoluto, que está incrustado firmemente en las ecuaciones de Newton y en las transformaciones de Galileo.

### **V.3. Postulados de la Relatividad Especial**

En las sección anterior se indicaron los problemas que preocupaban a los físicos a fines del siglo diecinueve. El éter, o el sistema de referencia absoluto y un indicio experimental de su existencia, concentraba la búsqueda de ése tiempo. El objetivo era encontrar una relación entre los sistemas inerciales que funcionara para las ecuaciones de Newton y de Maxwell.

La solución a este dilema la proporcionó Einstein con un enfoque radicalmente

diferente. Propuso como solución una teoría del espacio-tiempo. En esta teoría definió cuidadosamente lo que era medir y el sincronizar relojes. Eliminó el tiempo absoluto, cada observador tiene su tiempo y el resultado de la comparación con el tiempo de otro observador inercial depende de la forma cómo se mida. Además postuló que la velocidad de la luz era una constante universal.

Con el objeto de clarificar las hipótesis que se utilizan para llegar a las conclusiones de la relatividad de Einstein, hemos considerado incluir previamente los postulados utilizados.

En este escenario virtual, se ha eliminado todo tipo de interacción con otras partículas o fuerzas y, de esta forma, sólo queda la *cinemática* de los objetos. En esta sección se establecen las bases para que cada observador inercial establezca su malla de relojes sincronizados, distancias relativas y formalismo para comparar sus coordenadas con los de otro observador inercial.

Para constuir el andamiaje de cada observador inicial sólo permitiremos la emisión y recepción de rayos de luz por parte de estos observadores. Esta será la forma oficial de establecer medidas y comparaciones. la razón: la velocidad de la luz es una constante universal, adquiere el mismo valor en todos los sistemas de referencia inerciales.

A continuación estableceremos los postulados de la Relatividad Especial.

### **Postulado 0**

El espacio es *homogéneo e isótropo*.

Esta afirmación indica que el resultado del experimento no depende del lugar dónde se realizó (homogeneidad del espacio). Tampoco interesa la dirección donde apuntemos con nuestros ejes coordenados, todas las direcciones son equivalentes (isotropía).

En la superficie de la tierra existe una dirección preferida que está señalada por la atracción gravitacional. Al eliminar la gravitación (haciendo  $G = 0$ ), el espacio recupera su isotropía. La homogeneidad e isotropía del espacio ha sido verificada con un error menor que  $\pm 2 \times 10^{-15}$  [17].

**Postulado 1**

*Un movimiento no-acelerado o inercial es el único que puede determinarse en forma absoluta, sin referencia a ningún otro observador.*

Las ecuaciones de Newton son válidas en un sistema inercial. Un sistema inercial es aquél en el cual una partícula que está en reposo permanece en reposo. Esta es la Primera Ley de Newton, la definición de un sistema inercial.

No existe un sistema inercial, existen sólo buenas aproximaciones. La superficie de la tierra es considerada como un sistema inercial y en la mayoría de los casos se comporta de esa forma. Sin embargo, sabemos que está girando con respecto a un eje diametral y también en torno al Sol.. etc.

Resumiendo: Un *sistema inercial* ocurre cuando cada partícula de prueba que está inicialmente en reposo, permanece en reposo y cada partícula de prueba que está inicialmente en movimiento continúa en movimiento, sin cambio en su rapidez o dirección.

**Postulado 2**

*Existen infinitos sistemas inerciales. Cada sistema que se desplaza con respecto a otro sistema de referencia inercial con velocidad constante, constituye otro sistema inercial.*

Cualquier sistema de referencia que se mueve con velocidad constante con respecto a un sistema de referencia inercial es también inercial. Las leyes físicas deben tener la misma forma en todos los sistemas de referencia. Si las leyes cambiaran al ir de un sistema a otro podríamos singularizar uno de ellos y de esta forma definir un sistema maestro con respecto al cual referir toda la física. Sabemos que esto no es posible de realizar. Por tanto, debemos aceptar que los sistemas inerciales son indistinguibles.

Los experimentos descritos en el enunciado del principio de la relatividad de Galileo hacían uso de este postulado puesto que comparaban dos sistemas inerciales.

### Postulado 3

*La velocidad de la luz es la misma en todos los sistemas inerciales. Es una constante universal de la naturaleza.*

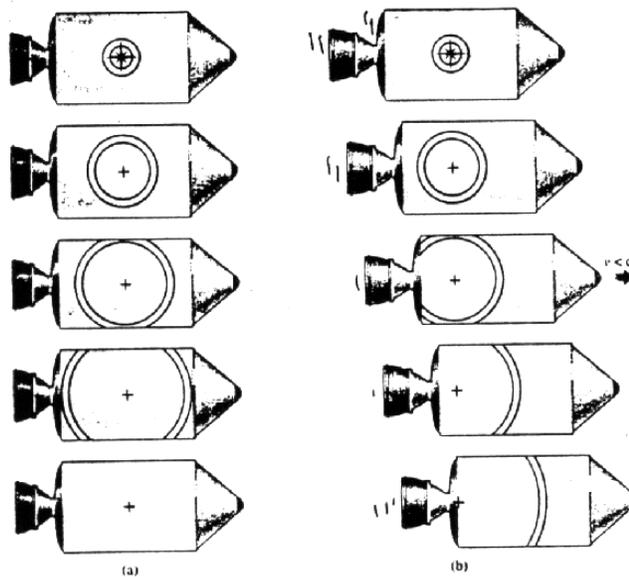


Figura V.7: La propagación de un pulso de luz visto por un observador en reposo en la nave (izquierda) y el pulso visto por un observador en reposo fuera de la nave (figura derecha). Para éste el pulso se propaga con la velocidad  $c$  y alcanza la cola de la nave antes que la nariz, a diferencia de lo observado por el piloto de la nave.

Este postulado va mucho más allá del resultado experimental establecido en el año 1887 por Michelson y Morley. Recordemos que el *éter* era un medio indetectable que estaba –en un sentido más bien oscuro–, en reposo absoluto. Era además el único sistema inercial en el cual las ecuaciones de Maxwell tomaban su expresión más simple y por lo tanto la más bella.

El resultado del experimento de Michelson–Morley resultó ser *nulo*: no encontraron una diferencia *detectable* entre las velocidades en los distintos sentidos. El *éter* no dió señales de vida. Experimentos más recientes, con mayor precisión, han llegado a la misma conclusión [18].

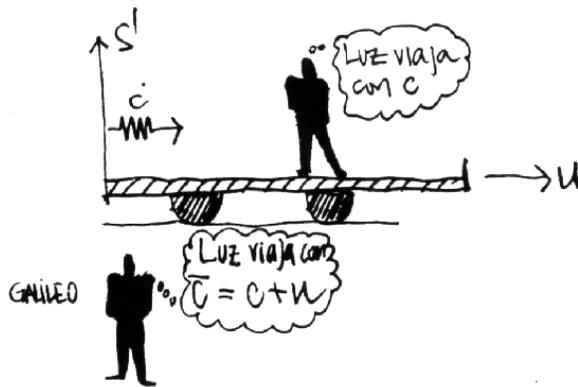


Figura V.8: La ley de composición de velocidades usual, es decir que se ajusta a las transformaciones de Galileo, es incompatible con la constancia de la velocidad de la luz en todos los sistemas inerciales.

Dos observadores, en movimiento relativo, que intercambian información mediante un rayo de luz, lo ven propagarse con la misma velocidad en *ambos* sistemas de referencia.

Este postulado es el origen de todas las paradojas de la relatividad especial. Esta situación se origina en nuestra ignorancia con respecto a fenómenos que involucran velocidades cercanas a la velocidad de la luz.

El valor de la velocidad de la luz que usaremos es  $c = 300,000 \text{ km/s}$ . La velocidad de la luz hoy en día es una cantidad que se define, no contiene error.

#### Postulado 4

*Definimos distancia espacial como la distancia definida en la geometría Euclidea, medida entre dos eventos simultáneos. Por ejemplo, la longitud de una barra se define como la distancia espacial entre sus dos extremos.*

Finalmente:

#### Postulado # 5

*Una barra moviéndose en forma perpendicular a la velocidad rel-*

*ativa de los sistemas inerciales, no experimenta cambio alguno. O en otra forma: los ejes perpendiculares a la dirección de movimiento no experimentan ningún cambio.*

### Ejercicio

A partir de la Figura (V.9), el texto de R. Taylor and J. A. Wheeler ([10]), argumenta, en el contexto de la relatividad especial, que no puede existir cambio en las longitudes perpendiculares al movimiento. Complete Ud. la explicación.

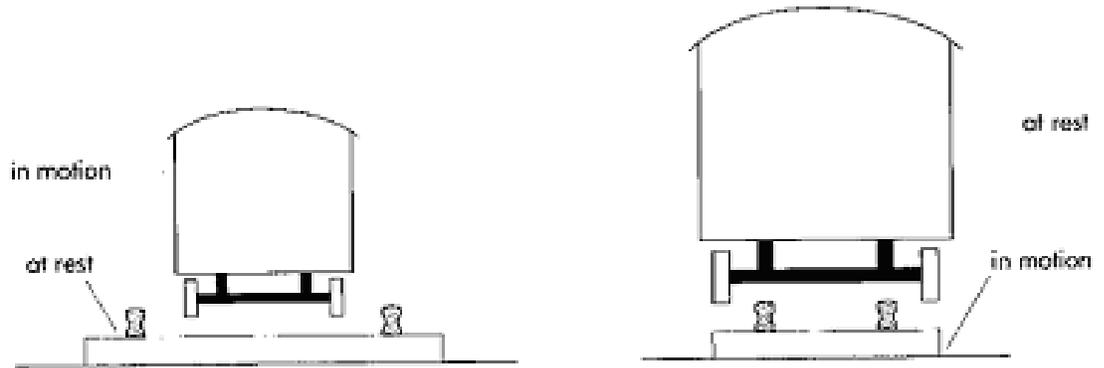


Figura V.9: La Figura sugiere cómo explicar que no pueden existir deformaciones en la dirección perpendicular al movimiento. De esta manera el postulado # 5 está demás.

## V.4. Simultaneidad

### V.4.1. Diagramas Espacio–Tiempo

Un punto en el diagrama espacio-tiempo representa un hecho concreto como el instante en que un objeto al caer toca el suelo, o un martillo golpea a un clavo... etc. Esto se denomina un *evento*. Localiza un hecho en un diagrama espacio-tiempo.

Matemáticamente está definido por un conjunto ordenado de cuatro números que corresponden al tiempo, el primero, y a las tres coordenadas espaciales, los consecutivos.

**Evento** : Es un tetrada ordenada de números que describen un hecho puntual. Constituye un primer paso para asignar coordenadas al espacio-tiempo.

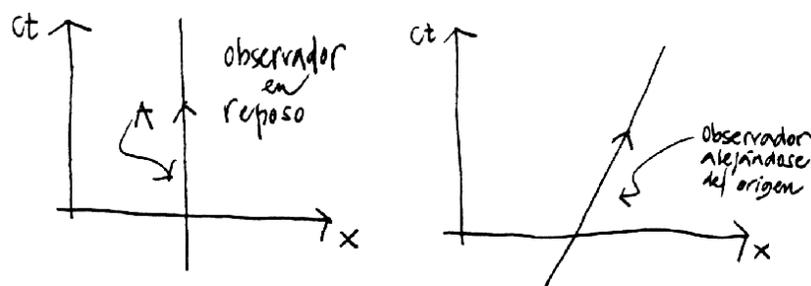


Figura V.10: La línea A, a la izquierda de esta Figura, representa la trayectoria en el espacio-tiempo de un observador en reposo. En el diagrama de la derecha, se dibuja un observador (puntual) que se aleja del origen con una velocidad  $V$ . La recta inclinada representa la línea de universo de este observador.

Un evento entonces corresponde a la ceremonia que se realiza en la vida diaria para concertar una cita: se indica el lugar (las coordenadas espaciales) y la hora.

Por ejemplo una barra *no* es un evento puesto que no es posible definirla mediante un conjunto de cuatro números. El instante en que dos barras chocan es un evento, el tiempo asociado es el instante del choque y las coordenadas espaciales definen el lugar en que ocurrió.

Como no es posible representar 4 dimensiones en el papel, dibujaremos sólo una o dos coordenadas espaciales.

Las figuras a continuación representan un observador en 1 y 2 dimensiones espaciales.

Si uno deja caer un objeto en una fuente con agua, se genera una onda que se aleja del punto donde cayó la piedra con una velocidad característica. El frente de onda es una circunferencia que se expande alejándose del origen. En el diagrama

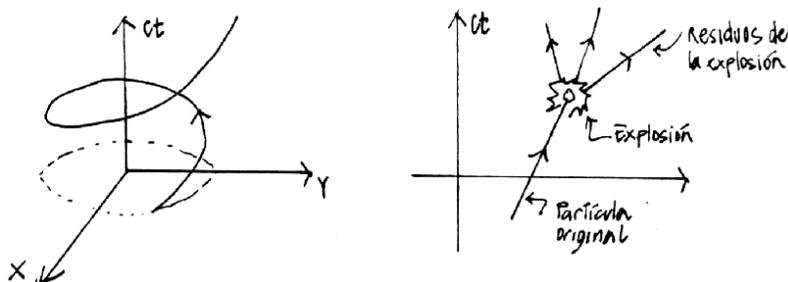


Figura V.11: Línea de universo de una partícula que rota alrededor del origen describiendo una circunferencia de radio  $a$ . A la derecha se incluye una partícula que repentinamente explota en tres pedazos. Note que una de las trayectorias es anómala: ¿Cuál y por qué?

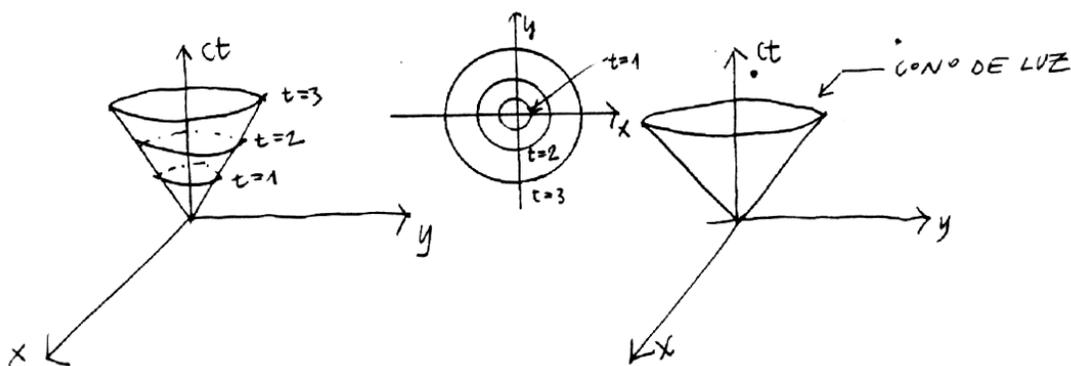


Figura V.12: Se incluye, a la izquierda, una onda de sonido propagándose en la superficie del agua (dos dimensiones). La onda de la derecha representa un pulso luminoso propagándose en dos dimensiones. Usamos la misma escala de longitud en ambos ejes  $x$  y  $ct$ .

espacio-tiempo, la trayectoria de una de las ondas aparece como un cono cuyo vértice descansa en el punto (evento) donde se originó la onda, que en este caso coincide con el origen del sistema de coordenadas. Algo similar es lo que sucede con un destello de luz, éste se propaga como un cascarón esférico en un espacio de 3 dimensiones. Una de las diferencias con el caso anterior es que ésta se propaga en el vacío, no necesita de una cuerda u otro medio material para propagarse. En los diagramas, esta onda se transforma en un cono de luz. Definimos  $ct$  como las dimensiones del eje vertical, de este modo todos los ejes tienen la dimensión de

longitud. Esta elección es sólo una convención.

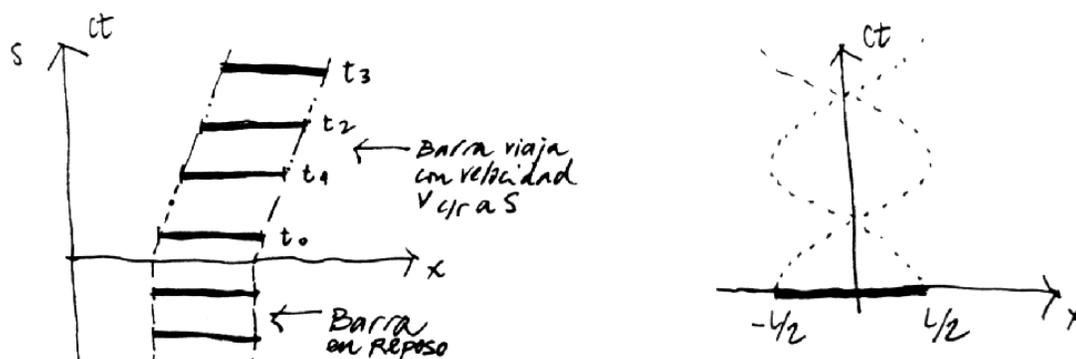


Figura V.13: Línea de universo de los puntos extremos de una barra rígida que está inicialmente en reposo u en  $t = 0$ , viaja con velocidad  $v$  con respecto al sistema  $S$ . A la derecha se indica la línea de universo de los extremos de una barra que gira en torno al origen.

También elegiremos la escala de las coordenadas de manera que la velocidad de la luz se propague formando un ángulo de  $45^\circ$  con las coordenadas espaciales y el tiempo  $ct$ . Esto es una forma de facilitarnos la vida al dibujar la trayectoria de los rayos de luz. No tiene ningún trasfondo conceptual. Refleja el hecho que los rayos de luz son vitales en el desarrollo de la teoría y aparecen una y otra vez.

Esta simplificación se logra usando como unidad de longitud la misma unidad utilizada en el eje  $ct$ . De esta forma la trayectoria de un rayo de luz forma un ángulo de  $45^\circ$  con el eje  $ct$ . Cabe destacar –como explicaremos en detalle más adelante–, que esto ocurre sólo en el sistema de referencia donde nuestro observador se encuentra en reposo. En cualquier otro sistema de referencia, que se desplace con una velocidad finita con respecto al anterior, el rayo de luz bisecta el ángulo formado por los ejes  $ct'$  y  $x'$ .

El postulado que impone que la velocidad de la luz sea la misma en todos los sistemas de referencia inerciales, trae consecuencias que parecen contradecir la intuición. Sin embargo, esto es sólo aparente: se debe a que las velocidades de la vida diaria son demasiado pequeñas con respecto a la velocidad de la luz. Por esta razón los efectos de la relatividad especial no se aprecian en la vida diaria.

El concepto de simultaneidad cambia profundamente con la relatividad especial.

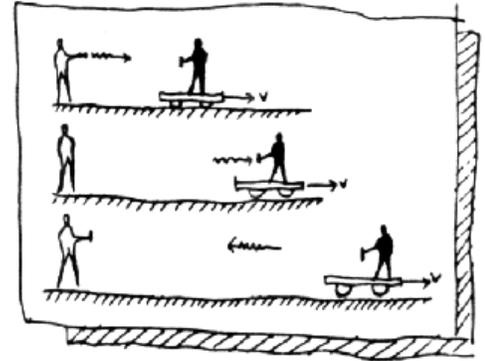


Figura V.14: El observador A recibe un pulso de luz y lo refleja de vuelta hacia el Observador O. En nuestros diagramas usuales (sin el eje  $ct$ ) lo hubiésemos descrito de la forma que se aprecia a la derecha de la figura. El observador A es la persona en el carro que se aleja.

Comenzaremos con la simultaneidad absoluta, que corresponde a lo que estamos acostumbrados, que nos resulta natural, pero que resulta ser sólo una buena aproximación.

#### V.4.2. Simultaneidad Absoluta (La velocidad de la luz es infinita)

Normalmente no encontramos objetos cuya velocidad es cercana a la velocidad de la luz. Para todos los efectos de la vida diaria, la luz se propaga con *velocidad infinita*. De esta forma no hay retardo en recibir la información entre dos eventos separados una distancia arbitraria. Cuando recibo el fotón indica que el evento que lo originó tomó lugar en el preciso instante en que lo recibí.

En el diagrama espacio-tiempo, esta situación se representa como dos eventos ubicados en un plano ortogonal al eje del tiempo. Esta es nuestra definición de *eventos simultáneos*.

El fotón que arranca de la máquina fotográfica se refleja instantáneamente en B y vuelve a A, donde graba la imagen de B. A y B son simultáneos.

Lo mismo sucede con el evento  $C$ , el rayo con velocidad infinita recorre en ida y vuelta el camino  $AC$ , sin demora, de esta forma  $A$  y  $C$  son simultáneos. Análogamente, y por las mismas razones  $A, B$  y  $C$  son simultáneos. Prosiguiendo con este método podemos formar *líneas de simultaneidad absoluta*. Estas son perpendiculares al eje  $ct$ .

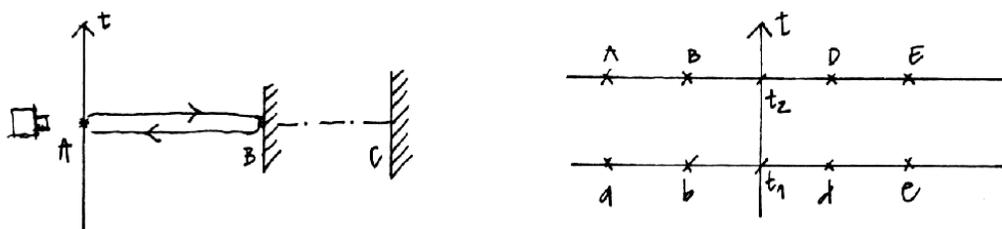


Figura V.15: Un destello de luz viajando con velocidad infinita. Llega a todos los lugares simultáneamente.

Los eventos  $a, b, c, d$  y  $e$  son simultáneos y ocurren en el instante  $t_1$ .

Los eventos  $A, B, C, D$  y  $E$  son también simultáneos, pero ocurren en el instante  $t_2$  con posterioridad a  $t_1$ .

Supongamos a continuación un observador que viaja con velocidad  $v$  con respecto al anterior, nos preguntamos: ¿cuál es la línea de simultaneidad que le debemos asociar?

La respuesta es la misma que le asociamos al observador en reposo. La razón es que siendo la velocidad de la luz infinita, no importa la velocidad con que se desplace este nuevo observador, los eventos  $A$  y  $B$ , le parecerán simultáneos debido a que la luz no demora en recorrer una cierta distancia, por larga que ella sea.

### V.4.3. Simultaneidad relativa (La velocidad de la luz es finita)

Uno de los postulados afirma que: la velocidad de la luz es finita y además tiene el mismo valor para todos los observadores inerciales, nos permite tener una

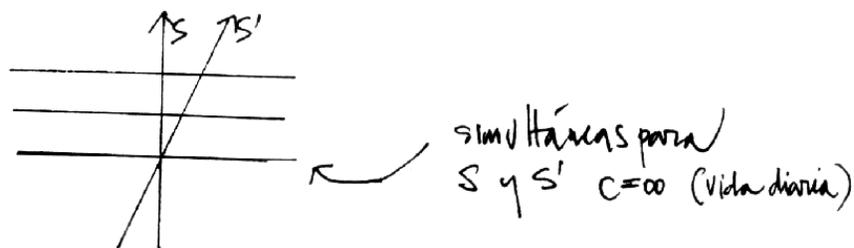


Figura V.16: Los planos de simultaneidad son las líneas horizontales. Son los mismos para todos los observadores inerciales. Esto es lo que que la transformación de galileo afirma al establecer  $t = t'$ .

definición única de simultaneidad. En el proceso de sincronizar relojes utilizando la velocidad de la luz, obtendremos en forma indirecta, la distancia espacial que los separa.

Se denomina *simultaneidad relativa* porque está asociada a un sistema de referencia particular. Dos eventos simultáneos, lo son sólo en el sistema de referencia en el cual así se determinó. No constituye una propiedad universal. El origen de este cambio radical se debe al Postulado 3: la velocidad de la luz es finita y toma el mismo valor en todos los sistemas inerciales.

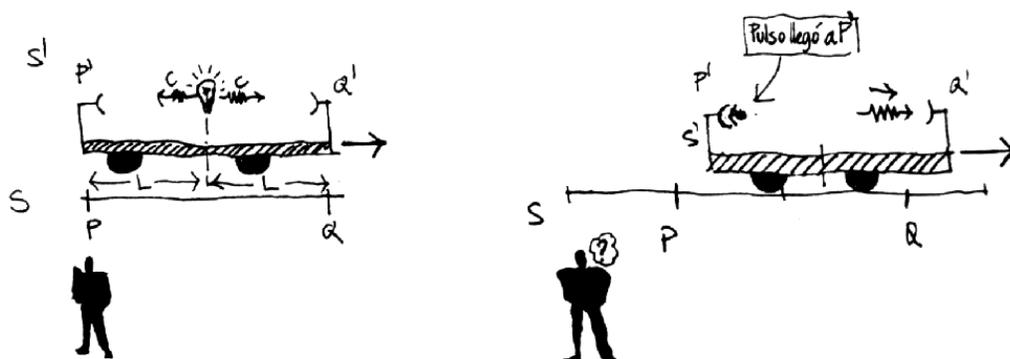


Figura V.17: Los dos observadores no pueden coincidir acerca de la simultaneidad de dos eventos separados por una cierta distancia, si la velocidad de la luz toma el mismo valor en ambos sistemas de referencia.

*Definimos simultaneidad* en forma análoga al caso anterior: se envía un rayo

de luz que rebota en el objeto y retorna a la fuente. Si el pulso de luz tardó  $2T$  segundos, concluimos que este valor señala que el objeto en el cual rebotó se ubica a una distancia  $(c \cdot T)$  y se define como simultáneos los dos eventos siguientes: aquel cuando el rayo de luz rebota en el objeto y cuando el reloj del observador marca el instante  $T$ .

El pulso de luz se refleja en el objeto  $B$  y el reloj en reposo señala el instante  $T$ .

De esta forma la simultaneidad con respecto a un evento en el eje  $ct$  está definida de la misma forma que en el caso anterior (con  $c = \infty$ ). La ventaja de adoptar esta definición es que en límite de bajas velocidades se aproxima al método establecido anteriormente.

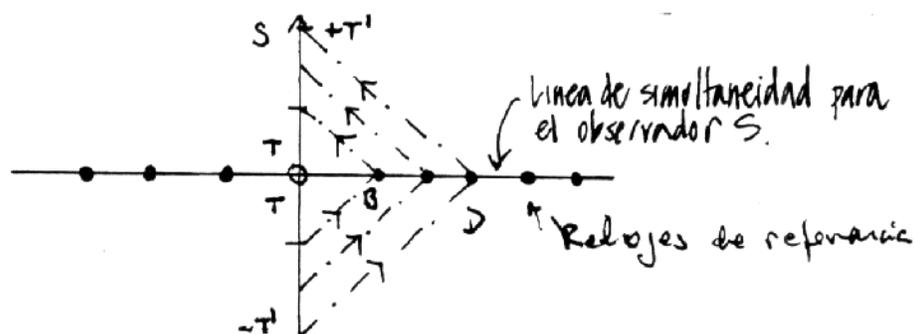


Figura V.18: La simultaneidad se determina mediante el uso de rayos de luz. La luz tiene la misma velocidad en todas las direcciones. Demora lo mismo en llegar al punto A que en volver de A al origen.

Con esta estrategia podemos sincronizar los relojes en el sistema  $S$ . El método formal sería el siguiente. Al llegar al pulso a un punto del espacio, activa el reloj que allí se ubica y al reflejarse y volver al punto de partida se calcula la distancia a que se encuentra el reloj y posteriormente se le comunica que su coordenada espacial es  $d = Tc$  y que debe adelantar su tiempo en  $d/c$  segundos.

De esta forma hemos definido la simultaneidad relativa al sistema  $S$ : está formado, para el caso unidimensional, por una serie de líneas todas perpendiculares al eje vertical  $ct$  que representa al tiempo que marca el reloj asignado al observador ubicado en el origen

Podemos imaginar que distribuimos una infinidad de relojes en todo el espacio

y mediante una serie de señales como la indicada, sincronizar cada uno de ellos con el reloj principal y, al mismo tiempo, asignarle una coordenada de la forma ya explicada.

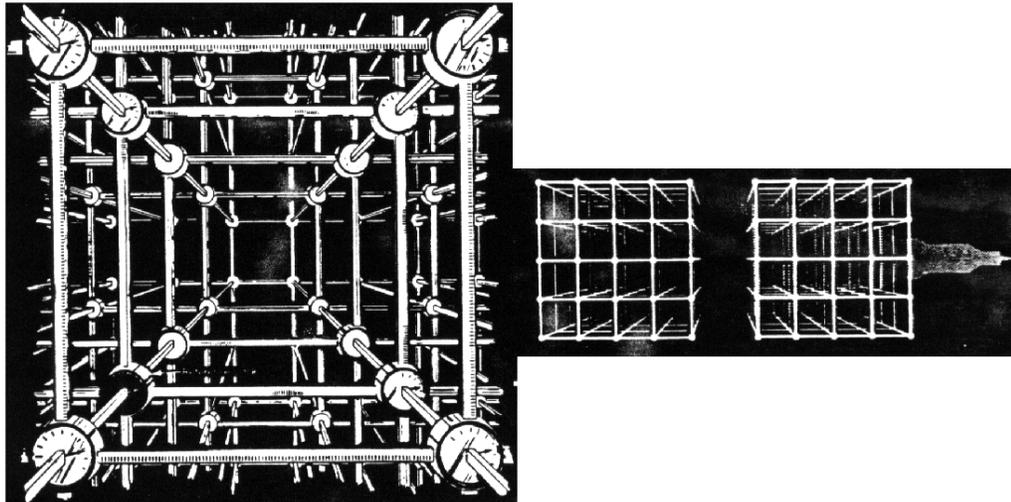


Figura V.19: *El observador en el Laboratorio (izquierda) y el Astronauta en su nave (a la derecha de la Figura), construyen, en forma independiente su **enrejado espacio-tiempo**. Cada uno de ellos lo construye rectangular (como el que aparece a la izquierda en la Figura). La dificultad se traslada entonces al proceso de relacionar un sistema con el otro.*

*Resumiendo, podemos decir que a la nube de eventos que pueblan el espacio tiempo, le hemos asignado un tiempo y una coordenada espacial usando un método, es decir aplicable a cualquier sistema de referencia inercial. Abandonamos la existencia de un espacio rígido y un tiempo único y absoluto, que formaba el esquema Newtoniano*

La velocidad de la luz es finita y toma el mismo  
valor en todos los sistemas inerciales



dos eventos simultáneos en un sistema de referencia inercial,  
no lo son en ningún otro sistema en movimiento relativo.

A continuación usaremos esta definición para asignar las coordenadas espacio temporales a un observador que designamos como  $S'$ , y que aleja con velocidad  $V$  constante, del observador en el sistema  $S$ . Como  $S'$  constituye también un sistema inercial, debemos aplicar el mismo método para definir las superficies de simultaneidad: el rebote de los rayos de luz. De la Figura se aprecia que debido a la asimetría del eje  $ct'$ , las líneas de simultaneidad no van a coincidir con aquellas de  $S$ , como era el caso en la simultaneidad absoluta.

Después de determinar dos puntos simultáneos, definidos como el punto de rebote del rayo y el punto medio del tramo comprendido entre la partida y el regreso del destello de luz, es evidente de la Figura que las líneas de simultaneidad están inclinadas con respecto a las anteriores.

Si, al igual que el caso anterior, repetimos el proceso con otros puntos, desarrollamos una familia de líneas de simultaneidad asociadas al observador  $S'$ .

En la Figura siguiente, se aprecia que los puntos (eventos)  $A$  y  $B$ , son simultáneos para el observador  $S$  (y también para todo su equipo de relojes sincronizados), pero *no* lo son para el observador designado por  $S'$ . De hecho, en el sistema  $S'$ ,  $A$  sucede antes que  $B$ . La simultaneidad es *relativa*, está asociada a un sistema de referencia específico.

### Ejemplo de la simultaneidad relativa

En la parte izquierda de la Figura V.21, los rayos provenientes de los extremos de la estación (nave superior) llegan simultáneamente al centro donde se ubica el director de la estación. Para él no hay problema, ambos rayos salieron simultáneamente y llegaron simultáneamente al centro de la estación. En cambio para el astronauta viajando en la nave espacial -que sabe que ambos rayos salieron del

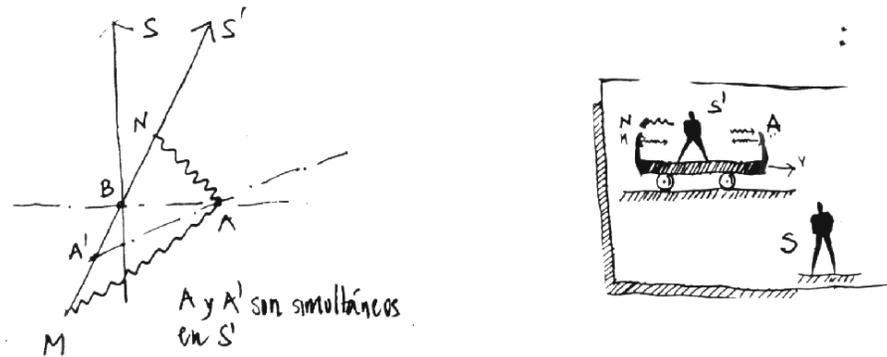


Figura V.20: Los eventos  $A$  y  $B$  son simultáneos para el observador en el sistema  $S$ . No ocurre lo mismo para  $B$ .

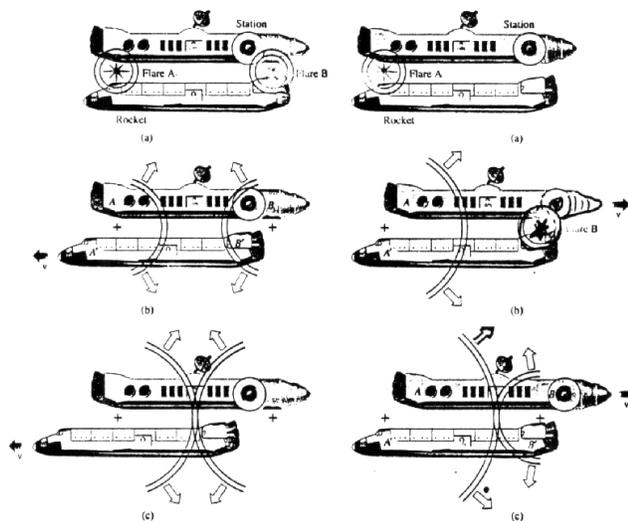


Figura V.21: El observador en la estación espacial permanece en reposo mientras que el astronauta en la nave espacial se aleja de la estación con velocidad constante. Examinamos aquí el conflicto de la simultaneidad generado por la constancia de la velocidad de la luz en ambos sistemas de referencia.

extremo de su nave debido a que existe evidencia fotográfica (por ejemplo)-, hay otras interpretaciones posibles. Examinaremos sólo dos de ellas aquí. El punto de vista pre-relativista, el más cercano a nuestra intuición, nos ofrece la siguiente explicación: ambos destellos salieron simultáneamente de ambos extremos de la

nave (la idea de simultaneidad absoluta) pero, como nos estamos desplazando hacia la izquierda, el fogonazo de la izquierda se acerca más rápido, con velocidad  $c + v$ . Por otra parte el destello proveniente de la cola se está alejando y tiene velocidad  $c - v$ . Por el argumento anterior es fácil darse cuenta que uno de los rayos debe llegar antes que el otro. *El problema con esta interpretación es que no hay experimento alguno que indique que la velocidad de la luz dependa de la velocidad de la fuente que la emitió.* En consecuencia optamos por la interpretación ofrecida en el esquema de la derecha de la Figura, que podemos resumir con las dos afirmaciones siguientes:

- La velocidad del destello proveniente de la cola y de la nariz se aproximan con la misma velocidad:  $c$ .
- Alcanzan el centro de la nave en tiempos diferentes porque el operador de la estación espacial no los disparó simultáneamente, de hecho gatillo el de nariz primero y después el de cola.

## La Dilatación del Tiempo

Sin tener acceso a las transformaciones de Lorentz, podemos, a partir de los postulados propuestos, demostrar que, nuevamente, la constancia de la velocidad de la luz en todos los sistemas de referencia implica que los relojes funcionan con diferente rapidez en cada uno de ellos.

El objetivo del siguiente ejemplo es recordar que cuando las mediciones se realizan en el mismo sistema de referencia, toda la cinemática y la geometría de un curso de Introducción a la Física son válidas. Sólo cuando queremos relacionar medidas en sistemas de referencia inerciales diferentes es necesario recurrir a las transformaciones de Lorentz y a la geometría del espaciotiempo.

### Ejemplo

Analicemos el siguiente experimento desde el punto de vista de un observador en tierra ( $S$ ) y el de otro observador viajando en una nave espacial ( $S'$ ). En el sistema  $S'$  el astronauta envía un destello de un rayo láser contra un espejo situado en el eje  $y'$ , perpendicular a la velocidad relativa de la nave  $u$ . La distancia del origen de  $S'$ ,  $O'$  al espejo superior es  $L$ .

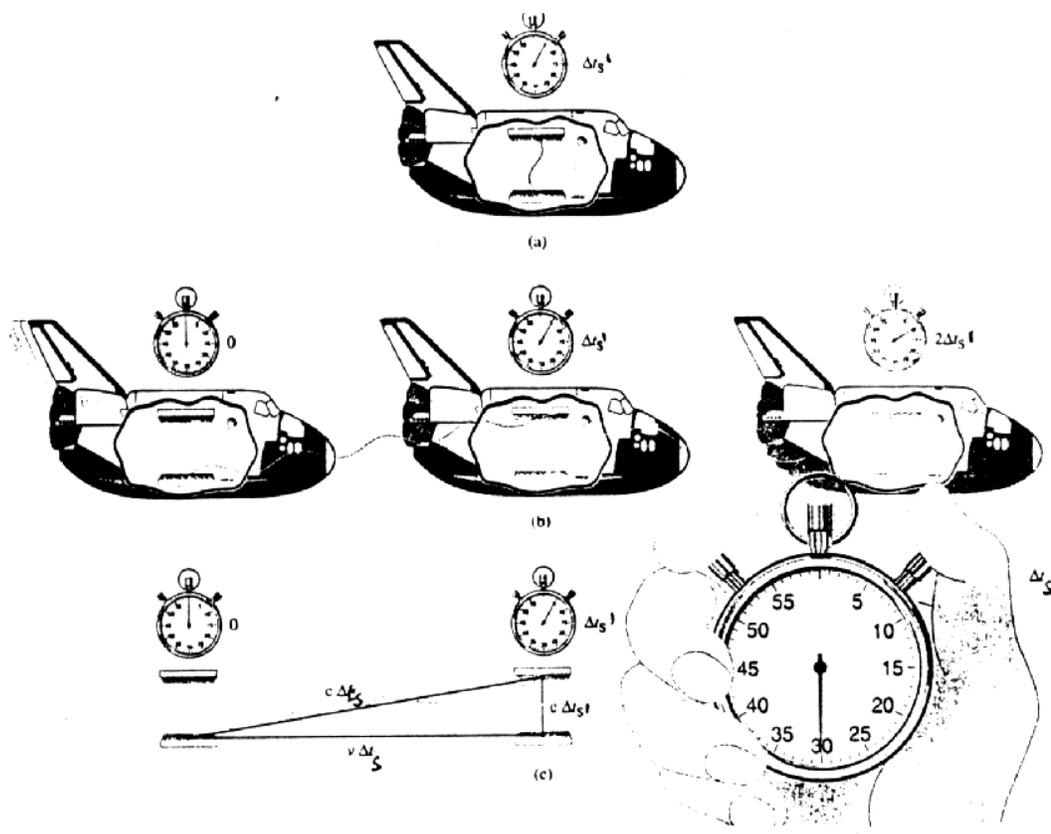


Figura V.22: En el sistema  $S'$ , (cohete), el rayo sale y vuelve al origen después de rebotar en el espejo superior. El mismo fenómeno, observado en el sistema de Laboratorio se indica inmediatamente abajo del anterior.

Relacionando las mediciones efectuadas por ambos observadores y recordando que las mediciones en los ejes perpendiculares al movimiento permanecen inalteradas, obtenga la expresión para la dilatación del tiempo.

En el sistema del laboratorio, el destello parte de  $O'$ , rebota en  $L$  y vuelve a  $O'$ .

Utilizando el Postulado # 5, el largo  $L$  medido en ambos sistemas de referencia es el mismo porque es perpendicular a la dirección de movimiento. Por otra parte, cada uno de los pasos representados en la figura es un evento en el sistema de Laboratorio. Cuando sale el rayo ( primera figura a la izquierda), cuando llega al espejo superior (figura del medio) y la posición del origen  $O'$  del sistema  $S'$ , son tres eventos referidos al sistema de Laboratorio. Con ellos podemos dibujar un

triángulo rectángulo y aplicar el teorema de Pitágoras:

$$(u \Delta t_s)^2 + L^2 = (c \Delta t_s)^2, \quad (\text{V.2})$$

donde  $u \Delta t_s$  es la distancia que recorre la nave en el intervalo  $\Delta t_s$ , tiempo que tarda el rayo en ir desde la base al espejo superior de la nave medida en  $S$ .  $L$  es la distancia entre espejos en  $S'$  (que es la misma que en  $S$ ) y  $c \Delta t_s$  es la distancia que recorrió el rayo de luz de acuerdo a  $S$ .

Si consultamos al astronauta acerca del tiempo que empleó el rayo en ir desde el espejo inferior (origen  $O'$ ) hasta el espejo superior nos indica que es  $\Delta t_{s'} = L/c$ . Reemplazando este valor en la ecuación anterior y despejando  $\Delta t_s$  en función de  $\Delta t_{s'}$ , tenemos:

$$\Delta t_{s'} = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \Delta t_s, \quad \text{o bien} \quad \Delta t_s = \gamma \Delta t_{s'}$$

Conclusión :  $\Delta t > \Delta t'$ . El tiempo en  $S$  transcurre más rápido que en  $S'$ .

## V.5. Transformaciones de Lorentz: Método Analítico.

Consideremos dos sistemas de referencia:  $\mathbf{S}$ , en el cual nos ubicamos y  $\mathbf{S}'$ , que se desplaza con rapidez  $V$  con respecto a  $\mathbf{S}$ . El vector velocidad  $\vec{V}$ , quiebra la isotropía del espacio. Seleccionamos la dirección de la velocidad como el eje  $x$  y nos restringimos a este caso particular.

Si suponemos, como ya lo hicimos en el párrafo anterior, que el espacio es homogéneo e isótropo (postulados adicionales), la relación entre las coordenadas de un evento en el sistema  $\mathbf{S}$  y  $\mathbf{S}'$ , deben ser lineales en las coordenadas. Suponemos también por simplicidad que los orígenes de coordenadas de ambos sistemas de referencia coinciden  $x = x' = 0$  en  $t = t' = 0$ . Analicemos sólo la coordenada  $x'$  por ahora.

$$x' = a x + b t, \quad \text{con } a \text{ y } b \text{ funciones de la velocidad, } a = a(v) \text{ y } b = b(v). \quad (\text{V.3})$$

Considere una partícula ubicada en el origen de coordenadas del sistema  $S'$ , por definición:  $x' = 0$ . De manera que la ecuación anterior nos da

$$0 = a x + b t. \text{ donde } x \text{ representa la posición del origen de coordenadas de } S' \text{ en el instante } t. \quad (\text{V.4})$$

De aquí obtenemos  $0 = a x + b t$ , de modo que

$$\frac{x}{t} \equiv \frac{dx}{dt} = V = -\frac{b}{a}.$$

Las funciones  $a(V)$  y  $b(V)$  están relacionadas. La transformación general de coordenadas toma la siguiente forma:

$$x' = a(V) (x - V t). \quad (\text{V.5})$$

Utilizando el Postulado que afirma que todos los sistemas inerciales son indistinguibles entre sí esta misma relación debe ser válida para el sistema  $S'$ :

$$\boxed{x' = \gamma \{x - V t\},} \quad (\text{V.6})$$

Donde hemos reemplazado  $\gamma(V) \equiv a(V)$ , porque ésa es la letra convencional para dicha constante.

Hasta ahora hemos utilizado la homogeneidad del espacio y la equivalencia de los sistemas inerciales. Consideremos ahora la velocidad de la luz, el Postulado adicional. Si en el instante  $t = 0 = t'$  enviamos un pulso de luz en el sentido positivo del eje  $x$ , en cada uno de los sistemas inerciales se debe cumplir:

$$\begin{aligned} x' &= c t' && \text{pulso con velocidad de la luz en } S' \\ x &= c t && \text{pulso con velocidad de la luz en } S. \end{aligned}$$

Reemplazando estas dos últimas ecuaciones en V.5 y V.6 obtendremos una expresión para la función  $a(V)$ , como se indica a continuación:

$$c t' = a(V)(x - V t) = a(V)(c t - V t)$$

$$c t = a(V)(x' + V t') = (c t' + V t')$$

$$\Rightarrow t' = a(V)\left(1 - \frac{V}{c}\right)t$$

$$t = a(V)\left(1 + \frac{V}{c}\right)t'$$

Reemplazando la expresión de  $t$  en la última ecuación de  $t'$ , podemos obtener  $a(V)$ .

De estas igualdades se desprende que

$$a(V) \equiv \gamma(V) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (\text{V.7})$$

donde cambiamos la notación  $a(V) \equiv \gamma$ , que es lo convencional.

En definitiva la transformación V.5, se escribe:

$$x' = \gamma(V)(x - V t). \quad (\text{V.8})$$

Para obtener la transformación del tiempo operamos algebraicamente con las mismas transformaciones anteriores:

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + V t') \\ x &= \gamma[\gamma(x - V t)] + \gamma V t' \end{aligned}$$

Si despejamos  $t'$  de la ecuación anterior, obtenemos:

$$t' = \gamma t + \left(\frac{1 - \gamma^2}{\gamma V}\right) x.$$

Re-escribimos esta última ecuación, utilizando las siguientes igualdades:

$$1 - \gamma^2 = 1 - \frac{1}{1 - \beta^2} = \frac{-\beta^2}{1 - \beta^2} = -\beta^2 \gamma^2,$$

con  $\beta \equiv V/c$ . Finalmente la expresión para  $t'$  es:

$$t' = \gamma \left\{ t - \frac{V}{c^2} x \right\}. \quad (\text{V.9})$$

Las ecuaciones V.5 y V.6, son las transformaciones de Lorentz. Dadas las coordenadas de un evento en un sistema  $S$ , podemos obtener las coordenadas en el sistema  $S'$  a través de estas ecuaciones.

Las coordenadas perpendiculares a la velocidad  $y$  y  $z$ , se transforman igual que en las transformaciones de Galileo.

Note que estas transformaciones convergen a las de Galileo cuando  $V \ll c$ .

### Ejemplo

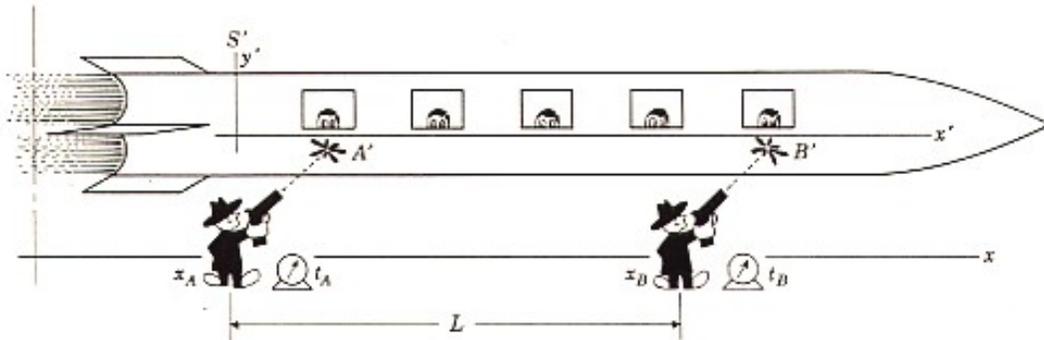
Un tren  $S'$  se mueve con velocidad  $v = 0,6c$  en la dirección  $+x$  con respecto a un observador en reposo en el sistema  $S$ . Dos rufianes con sendos atomizadores, se ubican a  $L = 5m$  de distancia en el sistema  $S$ . Ambos rufianes disparan simultáneamente de acuerdo a relojes sincronizados en el sistema  $S$ . Al gatillar el atomizador aparecen 2 manchas  $A'$  y  $B'$  en el tren. Los rufianes aseguran que la distancia entre las manchas es  $L = 5m$  (La distancia que separa los atomizadores del tren es *despreciable*).

a) Los pasajeros del tren llevan sus relojes sincronizados. De acuerdo a los pasajeros del tren ¿quién disparó primero?

b) ¿Cuál es la distancia entre las dos manchas medidas por un observador en reposo con respecto al tren?

c) ¿Cuál es la distancia entre los dos rufianes, de acuerdo a los pasajeros en reposo con respecto al tren?

### Respuesta



Del gráfico se desprende que  $B$  sucede antes que  $A$ , según un observador en la nave. Calculemos la diferencia de tiempo. Debemos comparar los eventos  $A$  y  $B$  en los dos sistemas de referencia. En el sistema fijo a la tierra los eventos  $A$  y  $B$  son simultáneos y ocurren a una distancia  $L$ :

$$\Delta x = L, \text{ y } \Delta t = 0.$$

En el tren, las coordenadas son

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}) = -\gamma \frac{vL}{c^2}.$$

Donde  $\Delta t' \equiv [t'_B - t'_A] = -\gamma \frac{Lv}{c^2}$ .

$$ct'_B = 0 - 5 \frac{3}{5} \frac{5}{4} = -\frac{15}{4}$$

$$t'_B = 1,25 \times 10^{-8}.$$

Las dos manchas una vez en el tren se propagan rígidamente con él, es decir su línea de universo nace en  $A$  y  $B$  pero a partir de entonces se propaga paralela a la línea  $t'$ . La distancia entre las manchas, medida con un metro por un observador en la nave es  $AC$ , que definimos como  $L'$ .

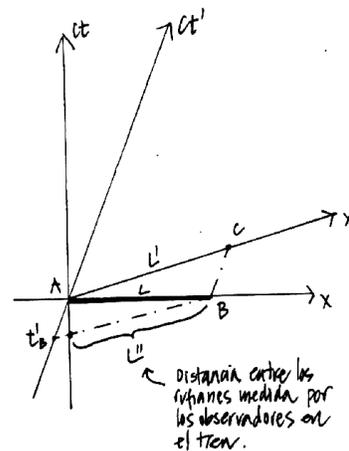


Figura V.23: .

¿Cuánto vale  $L'$ ?

i) *Primer método.*

De acuerdo a las transformaciones de Lorentz, la coordenada del punto  $C$  en función de las coordenadas del mismo evento en tierra, son:

$$x'_c = \gamma [x_c - v(t_c - t_A)], \quad x'_A = 0,$$

pero  $x_c$  es la posición en el sistema  $S$  del extremo de la barra después que ha transcurrido un intervalo  $(t_c - t_B) \equiv (t_c - t_A)$ , su valor es:

$$x_c = x_B + v(t_c - t_A), \quad \text{además } x_B \equiv L, \\ x_c = L + v(t_c - t_A),$$

de modo que:

$$x'_c = \gamma [L + v(t_c - t_A) - v(t_c - t_A)] = \gamma L.$$

$$L' = \gamma L.$$

ii) Segundo método.

$C$  es la proyección de la coordenada  $x'$  de  $B$ . Eso es precisamente lo que representan las Transformaciones de Lorentz: una proyección del vector  $(AB$  en este caso, del sistema  $(x, t)$  al sistema  $(x', t')$ . La proyección de  $B$  en  $x'$  es simplemente  $\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) = \gamma L$ , ( $\Delta t = 0$ , puesto que  $AB$  es simultáneo  $S$ ). Además  $x'_B = x'_C$  puesto que  $B$  y  $C$  están en la línea de universo de un observador en reposo en  $S'$ .  $L' = 1,25L = 6m$ . Note que  $AC > AB$   $AC_1 > A_1B$ .

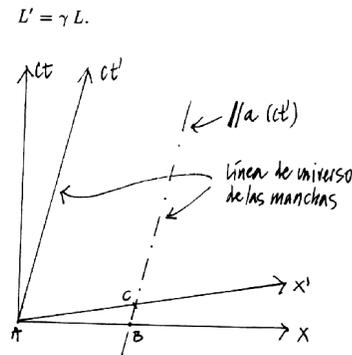


Figura V.24: Distancia entre manchas.

c) La línea de universo de los dos rufianes son rectas verticales en el diagrama de espacio-tiempo fijo en la tierra (S).

$A$  y  $B$  señalan la posición de los rufianes. Esta distancia según un observador en el tren es la intersección entre la línea de universo de  $B$  y la línea de simultaneidad de un observador en el tren (por ejemplo : el punto  $C$ . La coordenada de  $C$  en el sistema  $(t', x')$  :

$$x'_c = \gamma [x_c - (t_c - t_B)v],$$

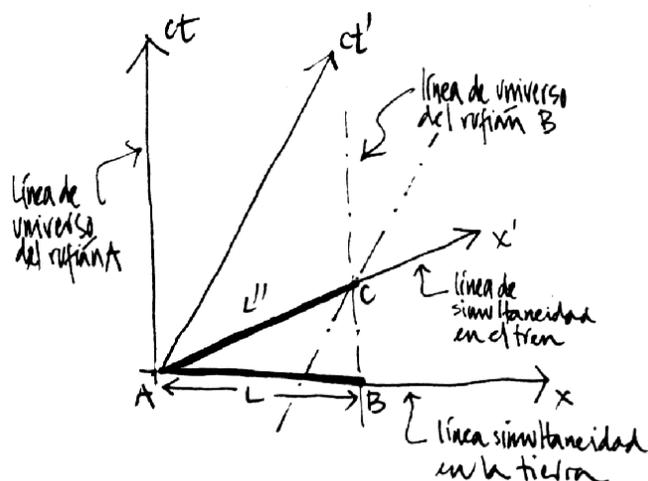
$$x_c = x_B = x_B - 0 = x_B - x_A = L,$$

$$x'_c = x'_c - x'_A = L'',$$

$$L'' = \gamma [L - v(t_c - t_B)]$$

$$\text{pero } t'_c - t'_A = \gamma \left[ (t_c - t_A) - \frac{v}{c^2}(x_c - x_A) \right]$$

$$\text{A y C son simultáneos en } S', \text{ luego: } \gamma \left[ (t_c - t_A) - \frac{v}{c^2}L \right]$$



$$t_B \equiv t_A \quad (\text{simultáneo en } S)$$

$$x_c \equiv x_B \quad \text{en } S$$

$$L'' = \gamma \left[ L - \frac{v^2}{c^2} L \right] = \frac{1}{\gamma} L \cdot \square$$

### Ejemplo

Un sistema  $S'$  está en movimiento uniforme con respecto a otro,  $S$ . En  $S'$  se ubica una barra que forma un ángulo  $\theta'$  con respecto a la dirección del movimiento. ¿Cuál es la dirección de la barra medida por un observador en  $S$ .

De la figura se obtiene:

$$\frac{\Delta x'}{\Delta y'} = \cot \theta'$$

Usamos esta relación porque  $\Delta y'$  es perpendicular al movimiento y por el Postulado # 5 :  $\Delta y' = \Delta y$ .

Cualquier diferencia en el valor del ángulo que aparezca en  $S$  proviene de la relación entre  $\Delta x'$  y  $\Delta x$ . Gráficamente lo que mide  $S$  se ve en la figura V.25:

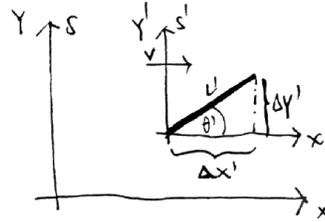


Figura V.25: .

Coordenada de  $A$  :

$$x'_A = \gamma x_A \quad (\text{puesto que } \Delta t = 0 \text{ en } S')$$

$$x'_A \equiv x'_c \Rightarrow \Delta x' = \gamma \Delta x$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{\Delta x'}{\gamma \Delta y'} = \frac{1}{\gamma} \cot \theta'$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \cot \theta$$

$$\cot \theta = \sqrt{1 - \beta^2} \cot \theta'$$

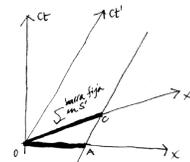


Figura V.26: La figura señala lo que mide el observador  $S$  y  $S'$ .

### V.5.1. Composición de velocidades

#### Velocidades paralelas.

El método de los productos de la función  $k$  para obtener la suma de las velocidades no es el más sencillo. Sirve para ilustrar que todas las fórmulas de la relatividad especial se pueden obtener a través de su uso.

A continuación incluimos una derivación alternativa.

Para ello necesitamos usar el Postulado # 5 planteado previamente.

Supongamos que un cuerpo  $P$  viaja con velocidad  $u'$  con respecto a un sistema  $S'$ . A su vez, este sistema viaja con una velocidad  $v$  con respecto a  $s$ . Queremos calcular la velocidad  $u$  de este cuerpo con respecto al sistema  $s$ .

Designamos las coordenadas de  $P$  con respecto a  $S'$  como  $(t'_p, x'_p)$ . Las coordenadas de este punto con respecto al sistema  $s$  son  $(t_p, x_p)$ . La relación entre ambas coordenadas está dada por la transformación de Lorentz (donde hemos suprimido el subíndice  $p$ )

$$\begin{aligned}\Delta x' &= \gamma(\Delta x - v\Delta t), \\ \Delta t' &= \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right).\end{aligned}$$

Por definición

$$u' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}, \quad \text{la velocidad } P \text{ con respecto al sistema } S'. \text{ Por otra parte:}$$

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad \text{la velocidad de } P \text{ c/r al sistema } S$$

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = u' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{v \cdot u}{c^2}}$$

Despejando  $u$  de esta ecuación

$$u'(1 - \frac{v \cdot u}{c^2}) = u - v,$$

$$(1 + \frac{v \cdot u'}{c^2})u = u' + v,$$

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{v \cdot u'}{c^2}}$$

Esta es la ley de composición de velocidades. Es directo comprobar que si  $u' = c$ ,  $v = c \Rightarrow u = c$ .

No es posible lograr velocidades mayores que la velocidad de la luz sumando velocidades con esta ecuación relativista.

### Velocidad Arbitraria

Supongamos que un objeto puntual se mueve con velocidad  $V_x$  y  $V_y$  distintas de cero en el sistema  $S$ . Supongamos que  $V_z = 0$ , puesto que no añade información adicional al problema. Considere un observador en reposo en el sistema  $S'$ , que se desplaza a lo largo del eje  $x$ , en el sentido positivo. Se pide calcular las velocidades que mide el observador en  $S'$ :  $V'_x$ ,  $V'_y$  y  $V'_z$  en base a los datos proporcionados. La velocidad relativa entre ambos sistemas es  $u$ . Para el observador en  $S'$  las expresiones para  $\Delta x'$  y  $\Delta t'$  son:

$$\begin{aligned}\Delta x' &= \gamma(\Delta x - u\Delta t), \Delta y' = \Delta y, \Delta z' = \Delta z \\ \Delta t' &= \gamma(\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x).\end{aligned}$$

Con esta información podemos calcular :

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} \equiv V'_x = \frac{\Delta x - u}{[\Delta t - \frac{u \Delta x}{c^2}]},$$

De esta forma la expresión para la velocidad es:

$$V'_x = \frac{V_x - u}{[1 - \frac{u V_x}{c^2}]} \quad (\text{V.10})$$

Si  $V_x = u$ , el objeto parece estar en reposo con respecto al sistema  $S'$ .

Veamos las otras componentes.

$$\frac{\Delta y'}{\Delta t'} \equiv V'_y = \frac{\Delta y}{\gamma [\Delta t - \frac{u \Delta x}{c^2}]}$$

La componente  $y$  de la velocidad en el sistema  $S'$  es:

$$V'_y = V_y \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{[1 - \frac{u V_x}{c^2}]} \quad (\text{V.11})$$

Como  $V_z = 0$ , entonces necesariamente  $V'_z = 0$ .

Estas son las fórmulas que relacionan una velocidad cualquiera en el sistema  $S$  con su homónima en  $S'$ . La novedad acá es la componente perpendicular a la velocidad relativa entre ambos sistemas de referencia.

Si se intercambia la situación de los observadores, por ejemplo, si en  $S'$  existe un objeto que se desplaza con una velocidad arbitraria, sólo debemos cambiar las transformaciones de manera que se obtenga  $x$  en función de  $x'$  y  $t$  en función de  $t'$ . El resto del procedimiento permanece inalterado. También se puede suponer el sistema  $S'$  en reposo y  $S$  alejándose con velocidad  $u$  en el sentido negativo del eje  $x$ , obteniéndose el mismo resultado. (Compruébelo.)

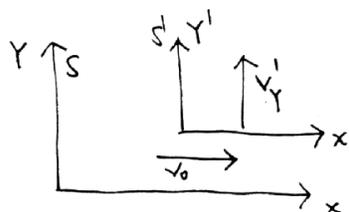


Figura V.27: .

### Ejemplo

Al finalizar la descripción de los postulados de la relatividad especial, se analizó un ejemplo que concluía con la demostración que si la velocidad de la luz es la misma en todos los sistemas inerciales, el tiempo no era absoluto.

En este desarrollo, al comparar el rayo de luz vertical en la nave en movimiento con el rayo de luz observado desde tierra, se dibujó inclinado V.22 y este hecho se usó en la fórmula V.2. Esta es la aberración de la luz, descubierta por James Bradley y presentado en la Real Sociedad en 1728. En el siguiente ejemplo daremos más detalles.

En este ejemplo demostraremos que, efectivamente, un rayo de luz vertical en la nave en movimiento, se ve inclinado desde la tierra.

Supongamos que la velocidad de la nave es  $u$  y que  $V'_y = c$ . El resto de las velocidades relativas a  $S'$  (la nave) son nulas.

De acuerdo a las fórmulas encontradas anteriormente, tenemos para este caso:

$$V'_x = 0 = \frac{V_x - u}{[1 - \frac{u V_x}{c^2}]} \Rightarrow V_x = u. \quad (\text{V.12})$$

Por otra parte

$$V'_y = c = V_y \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{[1 - \frac{u^2}{c^2}]} = \frac{V_y}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (\text{V.13})$$

De manera que la componente de la velocidad que observa  $S$  es

$$V_y = c \sqrt{1 - u^2/c^2} \quad (\text{V.14})$$

menor que la velocidad de la luz. Pero es fácil comprobar, con los resultados anteriores, que

$$V_x^2 + V_y^2 = u^2 + c^2 [1 - u^2/c^2] = c^2. \quad (\text{V.15})$$

Hemos demostrado que la velocidad de la luz vertical en el cohete, se inclina un ángulo  $\theta = \sqrt{c^2/u^2 - 1}$ . Si  $u = 0$  entonces  $\theta = \pi/2$  como se espera.

### Ejemplo

En este ejemplo no consideramos la aberración de la luz debido a la atmósfera.

Desde que Copernico planteó que una descripción donde el Sol permanece fijo y la Tierra orbita a su alrededor era un modelo mucho más simple que el geocéntrico, estaba la inquietud de demostrar que la Tierra se movía. Esto lo logró James Bradley. Hooke lo intentó antes sin poder llegar a una conclusión. Bradley al observar una estrella en el cenit par evitar la aberración descubrió que ésta en el transcurso de un año oscilaba  $40''$  y en la dirección incorrecta. Más detalles de esta historia los puede encontrar en la referencia [13].

Bradley, correctamente asignó este cambio de dirección a que la velocidad de la luz era finita y al movimiento de la tierra en su órbita alrededor del Sol. Concluyó que la velocidad de la luz alcanzaba un valor de 290,000 km/h.

El álgebra de este cálculo es similar al del ejemplo anterior.

Calcule la inclinación  $\theta'$  con que debe posicionarse el telescopio, de acuerdo a la Figura, en los dos casos siguientes:

a) Calcule el valor del ángulo  $\theta'$ , en la forma clásica, es decir sin usar relatividad especial.

b) Desarrolle el cálculo del ángulo  $\theta'$  en forma relativista y compare este resultado con el anterior.

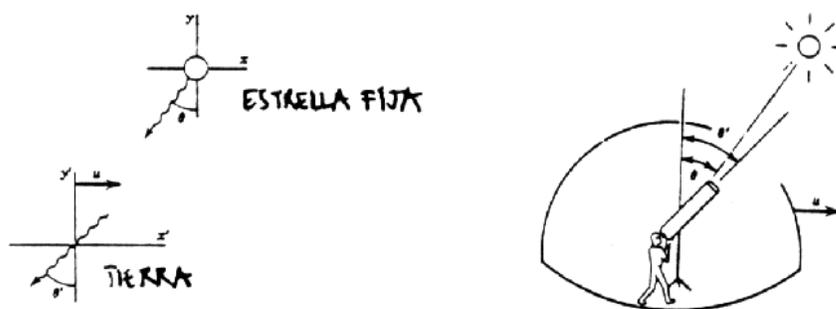


Figura V.28: A la izquierda aparecen los dos sistemas de referencia que están en movimiento relativo. A la derecha se da una idea del cambio de dirección que se le debe dar al telescopio para enfocar la estrella fija (sin movimiento propio).

a) Como la Tierra se está acercando a la estrella, de acuerdo al esquema indicado, la velocidad relativa *aumenta*  $u + c \sin \theta$ , recordemos que no estamos utilizando la relatividad especial.

$$\tan \theta' = \frac{u + c \operatorname{sen} \theta}{c \operatorname{cos} \theta}$$

$$\tan \theta' = \left[ \tan \theta + \frac{u}{c \operatorname{cos} \theta} \right]$$

En forma no-relativista las velocidades se suman en forma usual.

Como la luz - de acuerdo a la figura - va al encuentro del sistema de referencia, la velocidad relativa aumenta.

$$v'_x = -c \operatorname{cos} \theta$$

$$v'_y = -(u + c \operatorname{sen} \theta)$$

b) Ahora procedemos con el formalismo relativista.

De acuerdo a las fórmulas dadas

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u v_x}{c^2}} \quad v'_y = \frac{v_y}{\gamma \left[ 1 - \frac{u v_x}{c^2} \right]}$$

$$v_x = -c \operatorname{sen} \theta \quad v_y = -c \operatorname{cos} \theta$$

$$v'_x = -\frac{[c \operatorname{sen} \theta + u]}{1 + \frac{u \operatorname{sen} \theta}{c}} \quad v'_y = -\frac{c \operatorname{cos} \theta}{\gamma \left[ 1 + \frac{u \operatorname{sen} \theta}{c} \right]}$$

$$\tan \theta' = \frac{v'_x}{v'_y} = \frac{u + c \operatorname{sen} \theta}{1 + \frac{u \operatorname{sen} \theta}{c}} \times \frac{1}{\left\{ \frac{c \operatorname{cos} \theta}{\gamma \left[ 1 + \frac{u \operatorname{sen} \theta}{c} \right]} \right\}}$$

$$\tan \theta' = \gamma \frac{u + c \operatorname{sen} \theta}{c \operatorname{cos} \theta} = \gamma \left[ \tan \theta + \frac{u}{c \operatorname{cos} \theta} \right]$$

La diferencia con el tratamiento no-relativista es un factor  $\gamma$  en frente de toda la expresión.

## V.6. El retorno de lo absoluto, los invariantes.

Se puede verificar, a través de las transformaciones de Lorentz, que la combinación

$$(ct')^2 - x'^2 = ct^2 - x^2$$

es un *invariante*: posee el mismo valor en todos los sistemas inerciales. Esta *distancia* la denominamos  $(\Delta s)^2$ . Aquí hemos encontrado una cantidad que tiene un valor independiente del sistema de referencia, es el equivalente al tiempo absoluto en la teoría de Galileo y Newton.

$$\Delta s^2 = c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$$

Sabemos por experiencia lo importante que son las cantidades conservadas en mecánica, electricidad...etc.. El equivalente en relatividad especial son los *invariantes*.

Como ejercicio, podemos reobtener la dilatación del tiempo (que el reloj en *B* funciona más lento que un reloj, idéntico, en *A*).  $O_1Q$  y  $O_2P$  son líneas (o planos en tres dimensiones) de simultaneidad con respecto al observador *A*. Llamemos  $\Delta s = \overline{PQ}$ .

$\Delta s^2 = c^2 T'^2$ , puesto que *P* y *Q* se ubican en la línea de universo de *B* y por lo tanto  $x'_P = x'_Q$ .

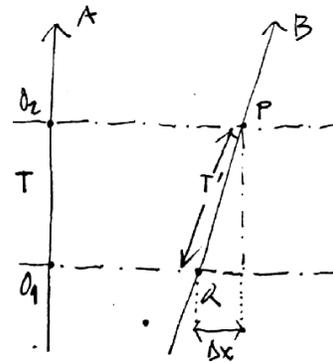


Figura V.29: .

$$\Delta s^2 = \overline{PQ}^2 = c^2(t_P - t_Q)^2 - (x_P - x_Q)^2$$

$$\overline{PQ}^2 = c^2 T^2 - (\Delta x)^2.$$

Hemos definido  $\Delta x = x_P - x_Q$ .

Como  $(\Delta s)^2$  es un *invariante*,

$$\Delta s^2 = c^2 T'^2 = c^2 T^2 - (\Delta x)^2$$

$$cT' = cT \left[ 1 - \left( \frac{\Delta x}{cT} \right)^2 \right]^{1/2},$$

pero  $\Delta x/T = V_o$ , velocidad con que B se aleja de A.

$$T' = T \sqrt{1 - \beta^2} \Rightarrow T = T' / \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Si  $T = 1$  s,  $T < 1$ , puesto que  $\beta \leq 1$  y  $1/\sqrt{1 - \beta^2} \geq 1$ . Esto se denomina la dilatación del tiempo.

### V.6.1. El significado de VER y MEDIR en la Relatividad de Einstein

Definimos VER cuando todos los fotones emitidos desde el objeto que nos interesa llegan simultáneamente a nuestro ojo. Es claro que los puntos más alejados del ojo deben emitir antes los pulsos de luz para llegar al mismo tiempo que aquellos ubicados en una posición más favorable.

MEDIR es una operación que involucra los siguientes elementos: un sistema de referencia inercial determinado, una red de relojes sincronizados en dicho sistema de referencia, cada uno con una cámara que señale un evento, el tiempo y sus coordenada. El observador en este sistema recopila los datos y compara. Por ejemplo si quiere medir el largo de una barra en movimiento con respecto a su sistema de referencia, debe ubicar dos fotos, una en que aparezca el comienzo de la barra y otra con el otro extremo de la misma barra. Ambas deben indicar el mismo tiempo (simultaneidad). La diferencia entre las coordenadas permite conocer el largo de la barra.

#### Ejemplo

Sean  $S$  y  $S'$ , dos sistemas inerciales que coinciden en un instante.  $S'$  se mueve con respecto a  $S$  en la dirección  $(x+)$ , con una velocidad  $v = \text{constante}$ . En el origen de  $S'$  existe una pantalla de cine que proyecta una película de  $t'$  minutos, la cual es vista por un observador que se encuentra en el origen de  $S$ . ¿Cuánto tiempo dura la película para el observador en  $S$ ? Suponer  $v = 0,6c$ .

Utilizando las transformaciones de Lorentz, se obtiene:

$$\text{Para } S': \quad \Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x),$$

$$\text{Para } S: \quad \Delta t = \gamma(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x').$$

Sabemos lo que dura la película en  $S' \Rightarrow \Delta t'$  es conocido (con respecto a las mediciones que hace un observador en  $S'$ ). Además  $\Delta x' = 0$  (la pantalla permanece fija en  $S'$ ). Luego  $\Delta t = \gamma\Delta t'$ . Sin embargo, debemos calcular el tiempo que demora en llegar a  $S$  el último fotón de la pantalla.

i.e.  $\Delta t^* = \frac{\Delta x}{c}$  ya que cuando en  $S'$  terminó la película, ésta aún no ha finalizado en  $S$ .

$$\text{Por otra parte } \Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t') = \gamma v\Delta t'$$

$$\Rightarrow \Delta t = \gamma\Delta t' + \Delta t^* = \gamma\Delta t' \left(1 + \frac{v}{c}\right) = 2\Delta t'$$

### Ejercicio

Explique si la figura que se acompaña es correcta o no. Justifique su respuesta.

Un par de comentarios finales con respecto al tiempo. Es la variable que se puede determinar con mayor precisión. Esta es una ventaja técnica, que nos permite hacer experimentos y confrontarlos con predicciones bien precisas, como ya lo describimos anteriormente.

Por otra parte, utilizando las palabras de Penrose [5]: "...la

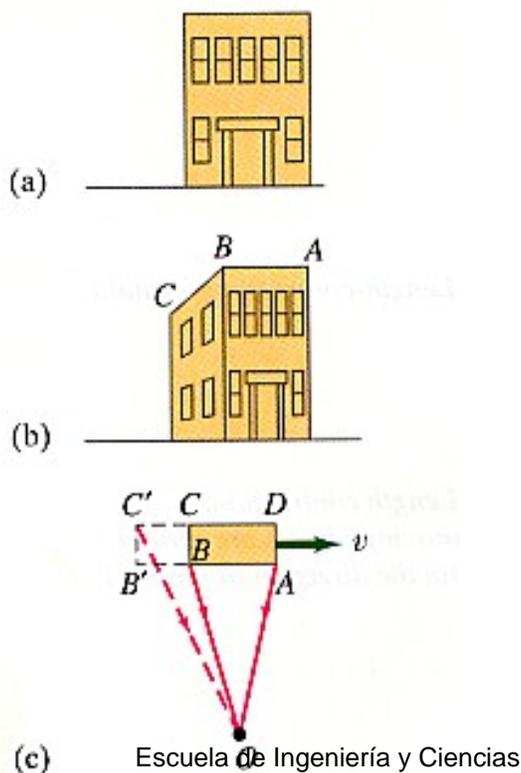


Figura V.30:

relatividad especial nos enseña algo profundo acerca de la realidad física, en relación a la naturaleza del tiempo”.

Una de estas enseñanzas –como hemos visto–, se refiere al cambio en el concepto de simultaneidad, dos fenómenos  $A$  y  $B$  que ocurren al mismo tiempo en un sistema de referencia, de acuerdo a otro observador que viaja con una velocidad  $v$ , constante, con respecto al anterior,  $A$  ocurre antes que  $B$ . El concepto de simultaneidad deja de ser absoluto.

## V.7. El Efecto Doppler Relativista

Utilizaremos un método geométrico para determinar la corrección debida al efecto Doppler. El método se debe a H. Bondi, un físico inglés quien lo introdujo. El factor que refleja la corrección del efecto Doppler lo denominaremos el factor  $k$  para escribir menos. Es notable que con este factor podemos re-obtener las transformaciones de Lorentz, las transformaciones de la velocidad..., en resumen todo lo conocido de relatividad especial.

Esta sección se plantea como un ejercicio geométrico. Las fórmulas de la relatividad especial serán re-obtenidas utilizando la geometría del factor  $k$ .

### V.7.1. El Efecto Doppler

Desde los años 1920 sabemos que las galaxias están alejándose de la nuestra con una velocidad proporcional a la distancia que nos separa. La frecuencia  $\nu \equiv 1/T$  de la luz que proviene de estas galaxias y la identificación del átomo que las emitió, revela que nos llegan con un cierto corrimiento en el valor de la frecuencia  $\nu' = \nu + \Delta\nu$ . Esta diferencia, más algunos resultados básicos de cosmología, nos permite estimar la velocidad con que se están alejando. Este fenómeno se denomina *corrimiento al rojo*, que resalta el hecho que las galaxias se alejan. Si las galaxias estuviesen acercándose, el corrimiento cambiaría de signo y se denominaría *corrimiento al azul* (la frecuencia aumenta).

Una explicación cualitativa de lo que aquí sucede es la siguiente: suponga que enviamos una señal a un habitante de dicha galaxia, ésta consiste en dos destellos de luz separados por un intervalo  $T$ . Como, desde nuestro punto de vista, la otra

galaxia se aleja, el segundo destello debe recorrer un trayecto más largo que el primero y por lo tanto demora más en alcanzar la galaxia y en ser detectado por uno de sus habitantes. Este retraso depende linealmente del lapso que media entre ambas señales  $T$  y de la velocidad relativa entre ambos medios. Si designamos como  $kT$ , el intervalo con que se recibe la señal, donde  $k = k(v)$  es una función que sólo depende de la velocidad de separación de estos dos objetos.

Utilizaremos esta función  $k(v)$  para desarrollar las ecuaciones que caracterizan al relatividad especial. Toda la relatividad especial es comparar las mediciones de un sistema inercial con las de otro que se desplaza con velocidad relativa.

Esta función  $k$  tiene una interpretación física bien concreta: es el efecto Doppler relativista, de esta manera, cuando en la siguiente sección calculemos el valor de  $k$ , habremos encontrado el valor que debemos utilizar para determinar el corrimiento de la frecuencia de un objeto que se aleja (o acerca) en forma relativista.

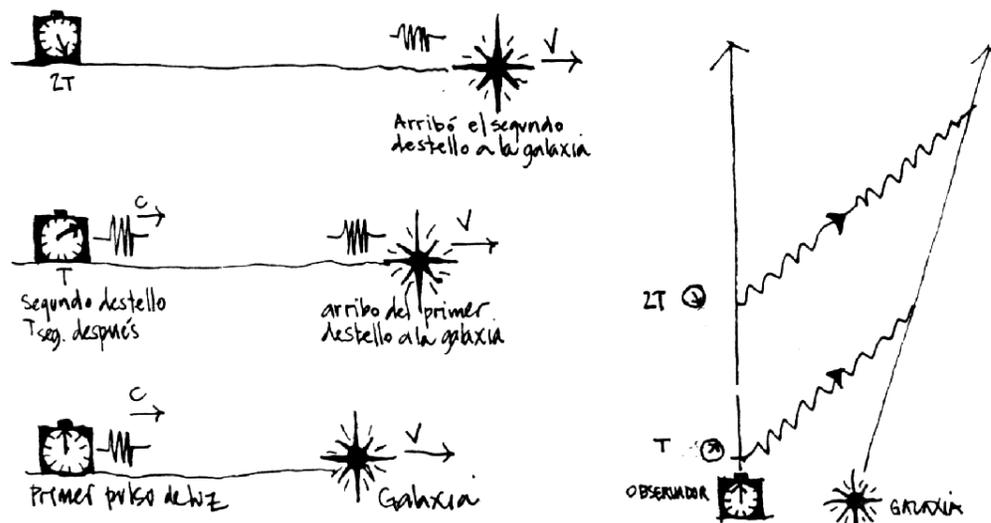


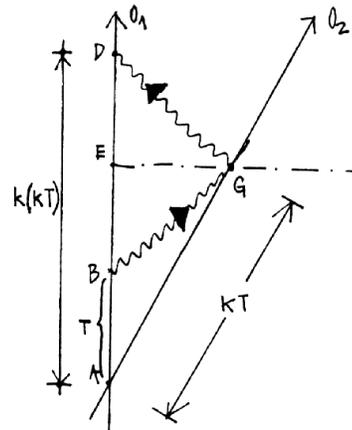
Figura V.31: En la figura de la izquierda se ilustra cómo un fotón alcanza una fuente en movimiento. A la derecha se incluye el diagrama de Bondi para este mismo caso.

### V.7.2. La función $k$ : el factor Doppler

La función  $k$  fue introducida hace alrededor de 50 años por Hermann Bondi, un físico del Reino Unido. El desarrollo que hemos adoptado aquí es una versión más detallada de lo expuesto por R. Wald [9] en su libro.

A continuación calcularemos analíticamente la relación entre las mediciones hechas en distintos sistemas de referencia. Usaremos el método gráfico. Primero calcularemos el efecto Doppler relativista, cuyo nombre se refiere al cambio de color (o longitud de onda) que detecta un observador en reposo cuando un rayo de luz (o un sonido) es emitido desde una fuente en movimiento, o viceversa, el observador está en movimiento y la fuente emisora en reposo. Para que este fenómeno ocurra debe existir una velocidad relativa  $V$  entre la fuente y el observador.

En A dos observadores (puntos) inerciales  $O_1$  y  $O_2$ , se cruzan y sincronizan sus relojes. De acuerdo al reloj de  $O_1$ ,  $T$  segundos más tarde, éste envía un rayo de luz a  $O_2$ . Este lo recibe en el instante que definimos como  $kT$ . Postulamos aquí que cualquier diferencia en los intervalos puede ser explicada en base a esta función  $k(v)$ . La función  $k$  sólo puede depender de la velocidad relativa  $v$ , puesto que es el único parámetro del problema:  $k = k(v) \geq 0$ . Además, si  $v \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow 1$ , puesto que no hay velocidad relativa en este caso.



Si a su vez  $O_2$ , al recibir la señal la responde inmediatamente, entonces  $O_1$  la recibirá en el instante  $k(kT)$ .

El último argumento se apoya en el postulado # 3, que señala que ambos sistemas son equivalentes, de forma que si al ir de  $O_1$  hasta  $O_2$  el intervalo de tiempo aparece multiplicado por un factor  $k$ , lo mismo debe suceder al viajar de  $O_2$  hacia  $O_1$ . Ambos son sistemas inerciales, indistinguibles y sincronizaron sus relojes en

A. Cada vez que un observador ( $S$ ) detecte que otro sistema de referencia ( $S'$ ) se está alejando, los intervalos de tiempo se relacionarán con la función  $k(v)$  como se ha especificado aquí.

La distancia espacial  $\overline{EG}$  que aparece en el gráfico se puede calcular de dos formas:

*Primer Método:* podemos calcular cuánto se demoró el rayo de luz en llegar al punto  $G$  que, como es simultáneo con  $E$  en el sistema  $S$ , es equivalente a calcular el tiempo que marca el reloj del observador en  $E$ . Este valor es:

$$\overline{EG} = c \cdot \frac{DB}{2} = c \cdot [k^2 - 1] \frac{T}{2}. \quad c \equiv \text{velocidad de la luz.} \quad (\text{V.16})$$

Recuerde que la simultaneidad es un concepto relativo en esta teoría, por lo tanto cuando decidimos comparar dos eventos simultáneos para el observador  $O_1$ , hemos quebrado la simetría entre los dos sistemas inerciales  $O_1$  y  $O_2$ . Los resultados son válidos sólo para el sistema de referencia  $O_1$ .

Volviendo a nuestro cálculo, sabemos que la distancia que se alejó  $O_2$  a partir del punto en que ambos coincidían, ( $A$ ) es:

$$\overline{EG} = v \cdot \overline{AE} = v \cdot (k^2 + 1) \frac{T}{2}. \quad (\text{V.17})$$

Iguando estas dos expresiones, obtenemos:

$$v \cdot [k^2 + 1] \frac{T}{2} = c(k^2 - 1) \frac{T}{2}, \quad \text{despejando (v/c), se obtiene:}$$

$$\beta \equiv \left(\frac{v}{c}\right) = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}, \quad k^2 = \frac{1 + \beta}{1 - \beta}.$$

Notemos que, si  $k = 1$ , entonces  $\beta \rightarrow 0$  lo cual equivale a que la velocidad de la luz  $c$ , sea infinita. Este es el límite Newtoniano: en este caso las transformaciones de Lorentz, que deduciremos más adelante, toman la forma de las transformaciones de Galileo (V.1).

Ya hemos encontrado  $k$  como función de la velocidad. Podemos explicar brevemente como podemos detectar la velocidad de un objeto mediante pulsos enviados

con un intervalo de tiempo  $T$ . Estos al rebotar en el objeto que se aleja con velocidad  $v_o$  vuelven en un intervalo  $(k^2 - 1) \cdot T$ . Al medir este intervalo y conociendo  $T$  y la expresión –ya obtenida– de  $k^2$  podemos conocer la velocidad. Este es el principio físico que regula el funcionamiento de los radares de velocidad de la policía.

Para dos sistemas alejándose:  $k = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$

Para dos sistemas acercándose:  $\bar{k} = \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$

### Ejercicio

Demuestre que:

$$k + \frac{1}{k} = \frac{2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 2\gamma, \quad \text{donde hemos definido } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

### V.7.3. Dilatación del Tiempo

Usando la definición del factor  $k(v)$ , podemos demostrar que el tiempo transcurre más lentamente para un observador que se aleja de nosotros con velocidad constante. En este caso haremos las comparaciones entre dos eventos que son simultáneos con respecto a nosotros, el sistema de referencia en *reposo*. De esta

forma nuestros resultados no son universales, son sólo válidos en nuestro sistema de referencia. La razón: la simultaneidad es *relativa*.

De la Figura, los eventos  $A$  y  $B$ , son simultáneos en el sistema  $S$ . Si definimos como  $\Delta t|_S = OA$ , los segundos que marca el reloj del observador en reposo con respecto a  $S$ , debemos evaluar la cantidad  $\Delta t' \equiv \Delta t|_{S'} = OB$ : es decir ¿qué tiempo indica el reloj que se mueve con el observador  $S'$ ?

De la geometría de la Figura obtenemos que:

$$OA = \frac{k^2 - 1}{2} T + T = \frac{k^2 + 1}{2} T.$$

El reloj del observador  $S'$ , que se aleja de  $A$ , al pasar frente a  $B$  marca (de acuerdo a la definición de  $k$ )

$$OB = kT.$$

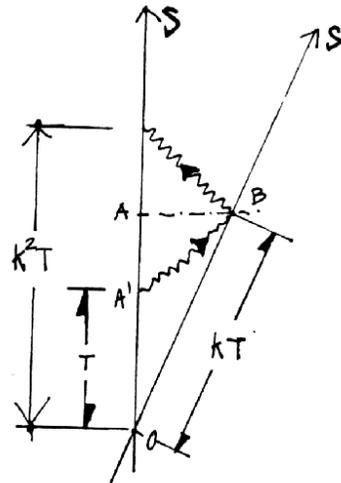
Si comparamos los tiempos:

$$OA \equiv \Delta t|_S = \frac{k^2 + 1}{2} T,$$

$$\text{con } OB \equiv \Delta t'|_{S'} = kT,$$

despejando  $T$  de las ecuaciones anteriores, obtengo

$$\Delta t|_S = \frac{\Delta t'|_{S'}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (\text{V.18})$$



Esta es la dilatación del tiempo de acuerdo al observador en reposo en  $S$ . Si  $\Delta t' = 1$ , entonces  $\Delta t > 1$ , el tiempo transcurre más lentamente en el sistema  $S'$ .  $\square$

El hecho que el tiempo transcurre más lentamente en el sistema que está en movimiento, *no* determina si un sistema se encuentra en reposo absoluto con respecto a otro. La razón es la siguiente: al comparar los tiempos  $\Delta t|_S$  y  $\Delta t'|_{S'}$  para dos eventos *simultáneos en S*, estamos quebrando la simetría entre los sistemas  $S$  y  $S'$ , y de esta forma obtenemos el resultado asimétrico ya señalado.

A continuación se demuestra que la expresión para la dilatación del tiempo es simétrica: el observador en reposo en  $S'$ , midiendo dos eventos simultáneos en su sistema de referencia encuentra que el tiempo transcurre más lentamente en  $S$ .

### Ejercicio

Repetir el mismo procedimiento para comparar lo que marcan los relojes, *pero ahora midiendo eventos simultáneos en  $S'$* . Obtenga:

$$\Delta t |_S = \frac{\Delta t' |_{S'}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \square$$

### ¿Realmente se atrasa el tiempo para un observador en movimiento?

La palabra *realmente* utilizada en la pregunta parece esperar una respuesta que traiga a escena el tiempo absoluto. Al formularla no se hace mención al sistema de referencia que se considera.

La respuesta es que este resultado sólo señala que el sistema de relojes sincronizados por  $S'$  se atrasan con respecto a aquellos sincronizados por  $S$ . Pero este resultado, de acuerdo a  $S'$  no permite concluir nada puesto que, en su opinión, los relojes de  $S$  no están sincronizados. Para ilustrar esto, podemos ubicarnos en el sistema de  $S'$  y considerar que  $S$  está retrocediendo con respecto a nosotros y repetir el mismo cálculo. Lo que obtenemos es que ahora el reloj de  $S$  se atrasa con respecto al de  $S'$ .

De aquí se desprende que este experimento no permite concluir que el tiempo transcurre diferente en ambos observadores.

Para lograr una respuesta definitiva con respecto a la evolución del tiempo en dos sistemas de referencia en movimiento relativo, debemos comparar *los mismos relojes dos veces*. Con esta consideración, ya no es posible refutar un resultado debido a la imposibilidad de sincronizar los relojes de los dos sistemas de referencia. En la siguiente sección daremos una respuesta concluyente a este problema.

### V.7.4. El tiempo transcurrido depende de la trayectoria

A continuación demostraremos que el tiempo no es absoluto y por lo tanto transcurre de forma diferente para distintos observadores en movimiento relativo.

Este problema tradicionalmente se conoce como la paradoja de los gemelos. Consiste lo siguiente: uno de los gemelos permanece en Tierra mientras el otro emprende un viaje interestelar y posteriormente, al volver, se compara con su hermano.

La dificultad técnica que plantea este problema es la aceleración que experimenta el gemelo interestelar en el momento de invertir el sentido en la dirección de su viaje con el objeto de retornar. Las expresiones que hemos usado no se pueden aplicar de acuerdo a los postulados, que excluyen los sistemas acelerados. Para eliminar este problema usaremos tres sistemas inerciales sincronizados y concluiremos que el tiempo, efectivamente transcurre más lentamente en uno de los sistemas de referencia.

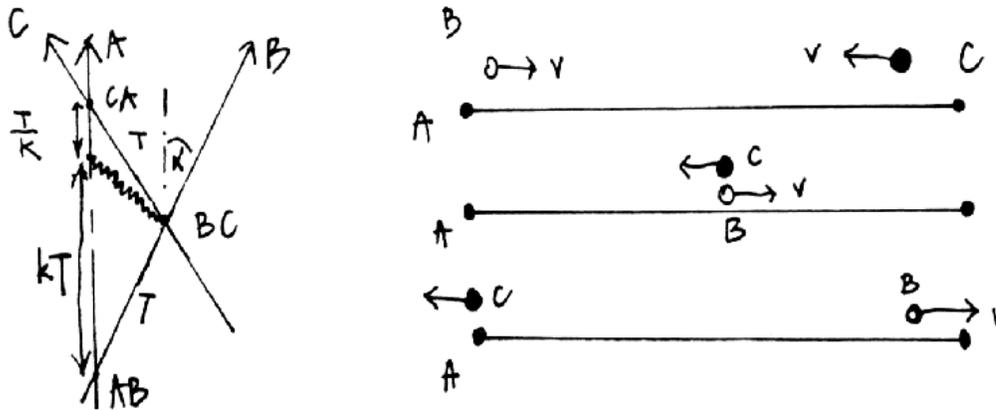


Figura V.32: Nos ubicamos en A, sistema en reposo. B se aleja de A con una velocidad relativa  $V$  y C se aproxima hacia A con una velocidad  $V$  (según A). A la izquierda se indica el gráfico  $ct$  versus  $x$  y a la derecha el esquema habitual con la coordenada  $x$  en el eje horizontal.

Antes de plantear este problema hagamos un ejercicio cuyo resultado será de utilidad más tarde.

Encontramos la expresión de  $k$  en función de  $v$  en las páginas anteriores. Note que  $k(-v) = 1/k(v)$ , es decir que cuando dos observadores se aproximan debemos usar  $(1/k)$  en lugar de  $k$  para relacionar los intervalos correspondientes de tiempo. Para demostrar que el tiempo **no** es absoluto y depende del camino recorrido necesito 3 observadores (o relojes)  $A$ ,  $B$  y  $C$ .

En el desarrollo del problema distinguimos 3 eventos:

→  $A$  coincide con  $B$   
definido como:  $AB$

→  $B$  coincide con  $C$   
definido como:  $BC$

→  $C$  coincide con  $A$   
definido como:  $CA$

Denominamos  $T$  al tiempo indicado por el reloj de  $B$  que transcurre entre el evento: [ $A$  coincide con  $B$ ] y el otro evento [ $B$  coincide con  $C$ ]. El intervalo que transcurre entre el evento: [ $B$  coincide con  $C$ ] y el evento [ $C$  coincide con  $A$ ] es también  $T$ , según el reloj de  $C$ . Esto se puede notar en la Figura, las líneas de universo de  $C$  y  $B$  son simétricas con respecto a la vertical, porque los trazos que van desde [ $AB$ ], hasta [ $BC$ ] y desde [ $BC$ ] hasta [ $CA$ ], son idénticos y por lo tanto ambos toman el valor  $T$ .

De acuerdo al álgebra de los  $k$  el tramo entre los eventos [ $AB$ ] y [ $AC$ ] es  $[kT + T/k]$ .

Por otra parte, si en [ $BC$ ], el observador  $B$  accionó el reloj de  $C$  y lo dejó marcando  $T$  segundos, cuando  $C$  llegue al encuentro con  $A$  marcará un tiempo  $2T$ . Comparando ambas cantidades, podemos concluir:

$$\left(k + \frac{1}{k}\right)T \geq 2T$$

Estas expresiones son iguales sólo si  $k = 1 \Rightarrow v_0 = 0$ , ó  $c = \infty$ .

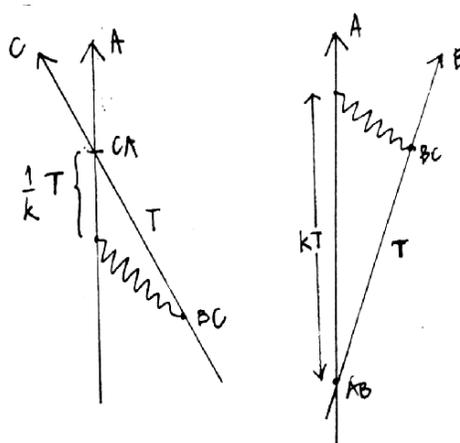


Figura V.33: El factor  $k$  y  $1/k$  aparecen cuando los observadores se alejan y cuando se están acercando, respectivamente.

$$k + \frac{1}{k} = \frac{2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \geq 2.$$

De esta forma el tiempo que marca el reloj  $C$  es menor que el indicado por  $A$ . El tiempo no es absoluto, no transcurre igual para todos los observadores.

En el caso de los gemelos la respuesta es similar a la obtenida aquí. El gemelo de viaje llega más joven al encuentro con su hermano. La diferencia de edad no es la que obtuvimos, puesto que es necesario considerar la aceleración que experimenta durante parte del viaje. En este caso no tiene sentido intentar utilizar el argumento de la simetría de los sistemas inerciales para invalidar el resultado. El gemelo que estuvo de viaje sabe perfectamente que su sistema de referencia, al menos por unos segundos, no fue inercial.

También se puede objetar que en el caso propuesto no se comparan los mismos relojes en  $A$ , pero lo esencial aquí es que el reloj  $C$  al compararlo con el de  $A$ , traía información acerca del tiempo empleado por un reloj  $B$  al recorrer el trayecto que le correspondía. Se demostró entonces que el tiempo contabilizado a lo largo del camino  $AB \rightarrow BC \rightarrow CA$ , es más corto que el tiempo contabilizado por  $S$  entre  $AB$  y  $CA$ .

## V.7.5. La contracción del largo de una barra

### Definición de longitud

Para medir la *longitud de una barra* un observador en reposo con respecto a ella, se ubica en el medio de la barra y mide el tiempo que demora un rayo de luz en viajar hacia un extremo y volver al punto de partida.

¿Cómo sabemos que estamos en el centro de la barra?

Antes de proceder a medir la longitud de la barra el observador envía en forma simultánea dos rayos de luz hacia ambos extremos de la barra donde serán reflejados. Si recibe de vuelta ambos simultáneamente entonces está justo en el punto medio de la barra. De otra forma deberá desplazarse hasta lograrlo.

¿Por qué medir longitudes con un rayo de luz y no con un metro patrón?

Porque la velocidad de la luz es una constante universal. De esta forma los resultados obtenidos utilizando la luz son válidos en cualquier sistema de referencia inercial.

### Contracción del largo

La inclusión del postulado # 3, indica que sólo está definida la distancia espacial –o el largo entre los extremos de una regla– entre dos eventos que ocurren simultáneamente en un sistema de referencia.

Estudiaremos la contracción del largo usando el álgebra de los  $k$ .

Por definición la longitud es la distancia *espacial* entre dos eventos simultáneos. Aquí vamos a comparar el largo  $L'$  de un barra en reposo en un sistema  $S'$ , con el largo de esta misma barra, pero medido en el sistema  $S$ , que lo denominamos  $L$ . La configuración se indica en la Figura adyacente.

El método que usaremos nos permitirá manipular coordenadas en distintos sistemas de referencia.

Calculemos las coordenadas del evento  $N$  en el sistema  $S$ . De la Figura se desprende que

$$c \Delta t_+ = (L + v \Delta t_+), \quad \text{y que}$$

$$c \Delta t_- = (L - v \Delta t_-).$$

Este resultado se obtiene siguiendo la trayectoria del punto  $M$  en la Figura. En  $t = 0$  su coordenada espacial es  $L$ , en  $\Delta t_+$  es  $[L + v \Delta t_+]$ , puesto que se está alejando de  $S$ .

En  $\Delta t_+$ , la barra está representada por  $NN'$  según el observador  $S$ . En ese instante se

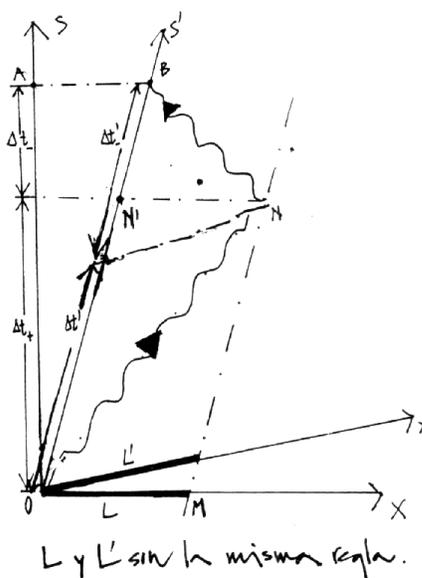


Figura V.34: Qué mide el observador  $S$  y qué mide el observador  $S'$ . Líneas de simultaneidad en cada sistema de referencia.

envía un rayo de luz hacia el origen de la barra. Lo alcanza en  $\Delta t_-$  segundos más tarde y la distancia que debe recorrer es el largo de la barra menos lo que ésta se acerca, en el intervalo de tiempo  $\Delta t_-$ , una distancia  $L - v \Delta t_-$ . Despejando  $(\Delta t_+ + \Delta t_-)$  de estas dos expresiones obtenemos:

$$\Delta t_+ + \Delta t_- = \frac{L}{c+v} + \frac{L}{c-v} = \frac{2cL}{c^2 - v^2}. \quad [i)]$$

Como los eventos marcados por A y B son simultáneos, utilizando los resultados del último ejercicio, tenemos:

$$\Delta t_+ + \Delta t_- = \frac{\Delta t'_+ + \Delta t'_-}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad [ii)]$$

Finalmente, como en el sistema  $S'$ , el rayo de luz parte del origen de la barra en  $t_0 = 0$  y vuelve a  $S'$  en  $B$ , después de rebotar en el otro extremo de la barra, entonces tenemos:

$$c[\Delta t'_+ + \Delta t'_-] = 2L' \quad [iii)]$$

Despejando  $(\Delta t_+ + \Delta t_-)$  de las ecuaciones [i)] y [ii)], e incluyendo el valor de  $(\Delta t'_+ + \Delta t'_-)$  obtenido en [iii)], tenemos la relación deseada entre  $L$  y  $L'$ :

$$L' = \frac{L}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Comprobamos que  $L < L'$ , al medir el largo de una barra en movimiento, medimos un largo menor. Como hemos señalado, este hecho es consecuencia de que la simultaneidad es relativa. A la barra no le pasa absolutamente nada, no se comprime.

### V.7.6. Las transformaciones de Lorentz.

Las transformaciones de Lorentz son las ecuaciones que relacionan las coordenadas de un evento  $P = (t_p, x_p)$ , en un sistema inercial  $S$ , con las coordenadas que describen el mismo evento  $P$ , en otro sistema  $S'$ :  $P = (t'_p, x'_p)$ .

Constituyen el equivalente a las transformaciones de Galileo para ir de un sistema inercial a otro con velocidad  $v_0$ .

El punto  $P$  es lo que hemos denominado un evento en el espacio-tiempo. Con respecto al observador  $A$ , el punto  $P$  tiene coordenadas  $P(t, x)$  puesto que consideramos sólo dos coordenadas una espacial y otra temporal, para mantener la simplicidad. En la figura, el origen del tiempo se ubica arbitrariamente en cualquier punto de la línea de universo de  $A$ .

El sistema de coordenadas se ubica con el observador  $A$ , éste tiene coordenadas  $(t, 0)$ . El punto  $Q$  es simultáneo con  $P$  y por lo tanto ambos tienen la misma coordenada temporal en el sistema  $A$ .

$$Q = Q(t, 0), \quad P = P(t, x).$$

Para enviar un rayo de luz desde  $A$  hasta  $P$ , debo gatillar el haz de luz en el instante  $(t - x/c)$ . Dicho rayo rebota en  $P$  y alcanza  $A$  en el instante  $(t + x/c)$ .

La cantidad  $(x/c)$  tiene dimensiones de tiempo.

Supongamos que existe otro observador inercial  $B$ , que asigna al evento  $P$ , las coordenadas  $(t', x')$ . La relación entre  $(t, x)$  y  $(t', x')$ , que respeta los postulados de la relatividad especial, se denominan las transformaciones de Lorentz. Ubicamos el origen del tiempo en la intersección de las líneas de universo de  $A$  y  $B$ . Al enviar un rayo de luz desde  $A$ , este cruza la línea de universo de  $B$  en  $(ct' - x')$  y posteriormente alcanza el punto  $P$ . De vuelta toca la línea de universo de  $B$  en  $(ct' + x')$  y  $A$  en  $(ct + x)$ .

Usando el método de la función  $k$ , podemos relacionar ambos sistemas de referencia.

$$ct' - x' = k(ct - x),$$

Este caso corresponde a la relación que existe entre el tiempo que transcurrió entre el origen del tiempo (intersección de las líneas de universo de  $A$  y  $B$ ) y el instante en que se envía el primer rayo desde  $A$  y el tiempo que tarda  $B$  en recibirlo:  $T' = kT$ .

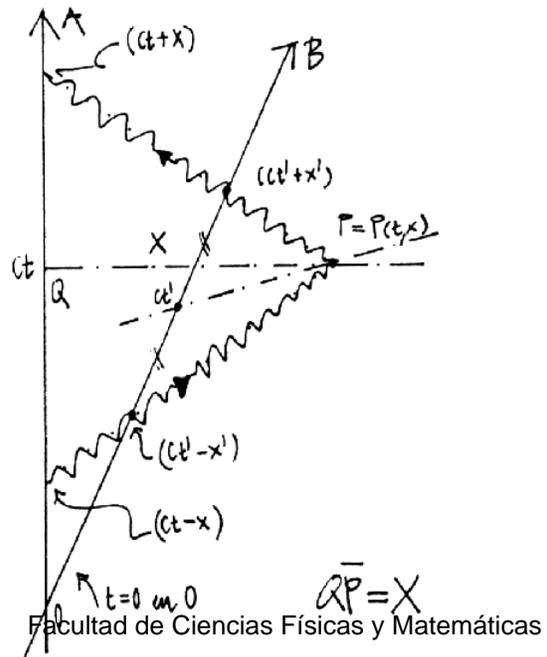


Figura V.35: Un rayo de luz cruza a los dos observadores.

El siguiente caso, corresponde al rayo de luz reflejado desde el punto  $P$  y relaciona el tiempo que ha transcurrido según el reloj de  $B$  cuando recibe el rayo de luz, con el tiempo que ha transcurrido para  $A$  cuando recibe de regreso el mismo rayo de luz:

$$(ct + x) = k(ct' + x')$$

De estas dos ecuaciones se puede despejar  $x'$  y  $t'$  como funciones de  $x$  y  $t$ .

$$2ct' = k(ct - x) + \frac{1}{k}(ct + x),$$

$$2x' = -k(ct - x) + \frac{1}{k}(ct + x),$$

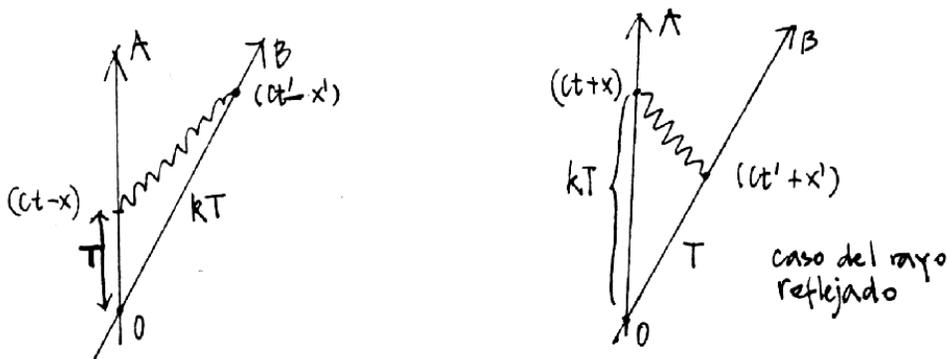


Figura V.36: En la figura de la izquierda debemos identificar  $T$  con  $(ct - x)$  y  $kT$  con  $(ct' - x')$ .

pero recordando que:

$$\frac{1}{2}\left(k \pm \frac{1}{k}\right) = \begin{cases} \gamma \\ \beta\gamma \end{cases} \quad \text{con} \quad k = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

Donde hemos definido  $\beta = v/c$  y  $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ .

Despejando  $x'$  y  $t'$  de las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma\{x - vt\}, \\ t' &= \gamma\left\{t - \frac{v}{c^2}x\right\}. \end{aligned} \tag{V.19}$$

### Composición de velocidades usando el factor $k$ del efecto Doppler.

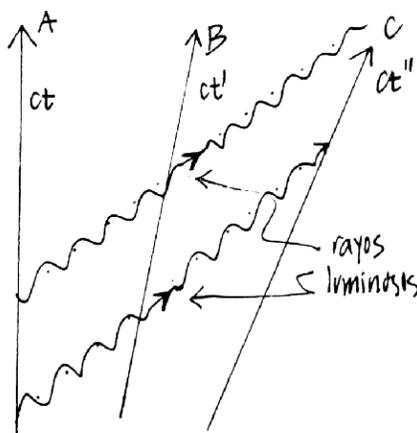
Usaremos el álgebra de las funciones  $k$  para encontrar la composición de velocidades.

Los tres sistemas de coordenadas están relacionados mediante las transformaciones siguientes, el sistema A con B:  $T' \xrightarrow{u} k_{AB}T$ , el sistema B con C:  $T'' \xrightarrow{v} k_{BC}T'$ . A partir de estas relaciones podemos conocer  $T$  en función de  $T''$ :  $T'' \xrightarrow{V} k_{AB}k_{BC}T$ . Si  $V \equiv V_{AC}$ , es la velocidad relativa del sistema C con respecto a A entonces se debe cumplir que  $k_{AC} = k_{BC}k_{AB}$ . Reemplazando cada uno de los  $k$  por sus respectivas velocidades tenemos:

$$\frac{V_{AC}}{c} = \frac{k_{AC}^2 - 1}{k_{AC}^2 + 1} = \frac{k_{AB}^2 k_{BC}^2 - 1}{k_{AB}^2 k_{BC}^2 + 1}$$

De aquí, haciendo el álgebra correspondiente, obtenemos la Ley de Composición de velocidades.

$$V_{AC} = \frac{(u + v)}{1 + \frac{uv}{c^2}}$$



Para poner a prueba esta relación, supongamos que un carro se mueve con velocidad  $c/2$  con respecto a la tierra.

Sobre el mismo carro un atleta, super-lenteja corre con una rapidez  $c/2$  en el mismo sentido que el movimiento del carro. ¿Cuál es la velocidad de este super atleta con respecto a la tierra?

Reemplazando en la fórmula anterior, tenemos:

$$V_{AC} = \frac{(c/2 + c/2)}{1 + \frac{c^2}{4c^2}} = \frac{4c}{5}.$$

La velocidad resultante es menor que la velocidad de la luz. La suma de velocidades relativistas es una expresión no-lineal, a diferencia del caso no-relativista.

## V.8. El Sistema de Posicionamiento Global (GPS)

Resumen de un artículo de Neil Ashby, Universidad de Colorado.

El artículo aparece en [http : //www.phys.lsu.edu/mog/mog9/node9.html](http://www.phys.lsu.edu/mog/mog9/node9.html)

El GPS está adquiriendo la relevancia tecnológica esperada. Por esta razón proponemos leer este artículo para saber más acerca de este instrumento de gran relevancia en la vida diaria.

El Sistema de Posicionamiento Global (GPS) consiste de 24 satélites que orbitan la Tierra, V.38, cada uno llevando un reloj atómico estable y de gran exactitud. Cuatro satélites están en cada uno de los seis planos orbitales diferentes, cada uno con una inclinación de  $55^\circ$  con respecto al Ecuador de la Tierra. El período orbital son 12 horas (siderales, tiempo medido con respecto a las estrellas fijas), así que la posición aparente de un satélite con el escenario de las estrellas se repite cada 12 horas. Transmisores activados por los relojes envían señales de tiempo

sincrónicas, con la información de la posición y el tiempo de transmisión. De esta forma el receptor en la Tierra puede determinar su posición y tiempo mediante la decodificación del mensaje enviado por cuatro satélites diferentes. El satélite también lleva detectores de rayos gamma. Los satélites pueden determinar las coordenadas espacio tiempo de un evento nuclear midiendo los tiempos de arribo de la señal y resolviendo de nuevo cuatro ecuaciones de propagación simultáneas.

Sin considerar los aceleradores de alta energía, no hay otro sistema de ingeniería en existencia hoy día en el cual la relatividad general y la especial tengan tantas aplicaciones. El Sistema se basa en el principio de la constancia de la velocidad de la luz en un sistema de referencia inercial: el sistema inercial centrado en la Tierra o como lo denominaremos: sistema ECI (Earth Centered Inertial ). La dilatación del tiempo, el fenómeno de la relatividad especial, es signi-

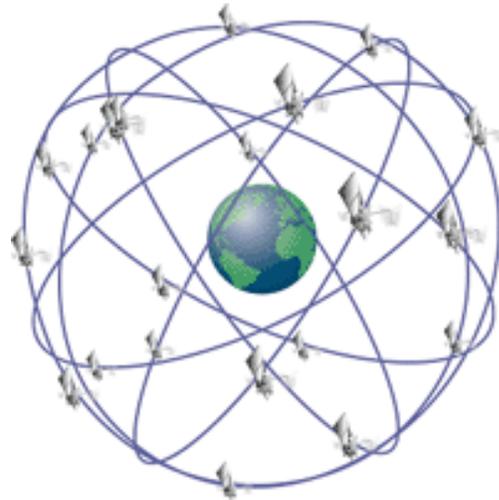


Figura V.38:

ficativa para los relojes en movimiento tanto para los relojes ubicados en los satélites como para los relojes en reposo en la Tierra. El principio de equivalencia encuentra su expresión en la presencia de varias fuentes de corrimientos de las frecuencias de las señales debido al campo gravitacional. También, debido a que la Tierra y sus satélites están en caída libre en el campo gravitacional del Sol, se generan corrimientos en la frecuencia de origen gravitacional nacidos debido al potencial gravitacional de la Luna y el Sol, sin embargo éstos afectan en una pocas partes en  $10^{16}$  y por tanto pueden ser despreciados.

El efecto Sagnac tiene una gran influencia en este sistema de medición. Ya que la mayoría de los usuarios de GPS están en reposo (o casi) sobre la superficie de la Tierra, sería altamente deseable sincronizar los relojes en un sistema de referencia que estuviera rotando fijo a la Tierra (un sistema fijo Earth Fixed, Earth Center Frame o sistema ECEF). Sin embargo, debido a que la Tierra rota, esta sincronización no es posible. Este es el efecto Sagnac. Es suficientemente importante en los GPS para que deba ser considerado. Inconsistencias que ocurrirían en

procesos de sincronización realizados en la superficie de la Tierra mediante rayos de luz, o con relojes portables que se muevan lentamente, dependen del camino recorrido y pueden llegar a ser del orden de varias docenas de nanosegundos, (una mil millonésima de segundo:  $10^{-9}$  segundos) demasiado grandes para ser tolerados en el sistema del GPS. De esta forma el efecto Sagnac obliga a diseñar una convención diferente para la sincronización de los relojes. También, el campo de una señal en el ECEF no es una línea recta. En el GPS, la sincronización es realizada en el sistema ECI; esto soluciona el problema de la inconsistencia debido a la dependencia del camino.

Varias fuentes de efectos relativistas se introducen al determinar la unidad de tiempo, el segundo SI (Sistema Internacional) está definido por el Observatorio Naval de Estados Unidos (USNO). Para un reloj que permanece fijo sobre la Tierra, la dilatación del tiempo generada por el movimiento de rotación de la Tierra puede ser visto alternativamente como una contribución, en el sistema ECEF, al potencial efectivo gravitacional el cual incluye las contribuciones provenientes de la no esfericidad de la Tierra. Relojes fijos a la Tierra ubicados en la misma superficie equipotencial de este campo gravitacional, marcan el tiempo con la misma rapidez. Considerando tiempos geológicos, la forma de la Tierra se ha distorsionado así que se acerca a una de estas figuras equipotenciales - la geodésica de la tierra al nivel promedio del mar. El segundo SI está definido por la rapidez de los relojes atómicos ubicados sobre la geodesia. Esta rapidez esta determinada con una suficiente exactitud, relativa a relojes en infinito, teniendo en consideración tres efectos:

- la dilatación del tiempo debido a la rotación de la Tierra
- los cambios de frecuencia debido al monopolio gravitacional
- y al potencial cuadrupolar debido a la deformación de la Tierra.

En relatividad general (GR), el tiempo coordinado se expresa en forma aproximada suponiendo un movimiento lento de la tierra y que el sistema solar es un campo gravitacional débil. El tiempo propio transcurrido en un reloj que está en movimiento depende de la posición de los relojes y la velocidad de los objetos masivos cercanos, y puede ser calculado si las velocidades y posiciones y la masa de estos objetos son conocidos.

Los efectos relativistas en los relojes de los satélites pueden ser combinados de forma tal que solo dos correcciones necesitan ser consideradas. Primera, el cor-

rimiento, en promedio de la frecuencia de los relojes en órbita es corregido en frecuencia por algo así como 446, 47 partes en  $10^{12}$ . Esta es una combinación de 5 fuentes distintas de efectos relativistas: corrimiento gravitacional de la frecuencia de los relojes en la Tierra debido al monopolo de la Tierra y a su momento cuadrupolar, corrimiento de la frecuencia de origen gravitacional del reloj del satélite, y corrimientos del tipo del efecto Doppler de segundo orden debido al movimiento del satélite y los relojes fijos en la Tierra.

Segundo, si la órbita es excéntrica, una corrección adicional aparece de las combinaciones del campo gravitacional que varía y el corrimiento de la frecuencia debido al movimiento debido a que las distancias del satélite con respecto a la Tierra cambia. Esta corrección es periódica y es proporcional a la excentricidad de la órbita. Para una excentricidad de .01 la amplitud de este término es del orden de 23 nanosegundos. Debido a una falta de computadores en los satélites en los primeros días del GPS, se decidió que esta última corrección era de responsabilidad del software en los GPS de los receptores (aquellos ubicados en la Tierra).

Para el lanzamiento del primer satélite NTS-2 (Junio de 1977), el cual transportaba el primer reloj de cesio que se pondría en órbita, había algunos que dudaban que los efectos relativistas fueran efectivos. Se construyó un sintetizador de frecuencia en el sistema de relojería del satélite de forma que después del lanzamiento, si llegara a ocurrir que la rapidez del reloj en su órbita final era la que efectivamente predecía la relatividad general, entonces el sintetizador debería ser activado para poner al reloj coordinado con la rapidez necesaria para una operación efectiva del instrumento.

El reloj atómico funcionó por alrededor de 20 días para poder medir su rapidez antes de iniciar el sintetizador. La frecuencia medida durante esos 20 días, fue de 442,5 partes en  $10^{12}$ , más rápido que los relojes en el piso; si esta señal permaneciera sin corregirse habría resultado en errores en los tiempos de alrededor de 38.000 nanosegundos por día. La diferencia entre la predicción de la relatividad general acerca de la frecuencia y la observada en el satélite en órbita distaba solamente en 3,97 partes en  $10^{12}$  de lo que se observó. Un valor adecuado a la precisión del reloj que está en órbita. Esto entonces dio una aproximación al 1 % considerando el movimiento combinado y los corrimientos gravitacionales para un reloj que orbita alrededor de la tierra en un radio de 4,2 veces el radios de la Tierra.

Varios efectos relativistas son demasiados pequeños para afectar el sistema a la precisión actual de este, pero pueden llegar a ser importantes a medida que el

sistema es mejorado; estos incluyen retardos del tiempo de origen gravitacional, cambio de la frecuencia de los relojes en satélites debido al momentum cuadrupolar de la tierra y curvatura especial. Este sistema fue conseguido inicialmente para algún uso de navegación militar teniendo acceso a transmisiones codificadas de los satélites las cuales no están disponibles para los usuarios civiles. La incertidumbre en la oposición en tiempo real usando el código de posicionamiento preciso es ahora del orden de 2,4 metros. Promediando sobre el tiempo y sobre muchos satélites reduce esta incertidumbre al punto donde algunos usuarios están actualmente interesados modelar muchos efectos hasta el nivel del milímetro. Aún sin estos ímpetus, el GPS provee una fuente muy fértil para las aplicaciones del concepto de relatividad.

Nuevas y sorprendentes aplicaciones de la determinación de la posición y en la transferencia del tiempo basada en sistemas GPS están siendo continuamente inventadas. Aplicaciones civiles incluye por ejemplo: registro del movimiento de los elefantes en África, estudio de los movimientos de las placas, exploración, mapeo, salvamentos en el océano abierto, bitácora de vehículos de flete, falla en línea de alto poder y sincronización de los nodos telecomunicacionales. Alrededor de 60 fábrica producen sobre 350 aparatos comerciales **GPS**. Millones de recibidores son hechos cada año, el precio del receptor local debe ser de alrededor de US\$ 200.

### Ejemplo: Esquema del funcionamiento de un GPS

Para formarse una idea del funcionamiento del GPS (Global Positioning System), considere el siguiente ejemplo simplificado.

Dos satélites, con sus respectivos relojes atómicos, viajan a una altura  $H$  sobre el nivel del piso. Estos relojes están sincronizados en el sistema de referencia en que ambos están en reposo. Su separación, medida en este mismo sistema de referencia es  $L'$ . Estos satélites envían señales periódicamente a Tierra. Esta señal trae codificado el instante en que fue enviada, de acuerdo al reloj de la nave y la posición con respecto a la Tierra de dicho reloj. Si

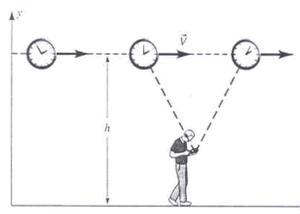


Figura V.39:

el observador en Tierra recibe simultáneamente una señal de ambos satélites, se pide:

- a.- Utilizando un diagrama de espacio - tiempo, muestre que el observador debe encontrarse ubicado entre los dos satélites.
- b.- De acuerdo al observador en Tierra, de cuál de los relojes salió la señal antes que la otra. ¿Cuál es la diferencia  $\Delta t$ , que tarda cada uno de los satélites en enviar la señal un extremo a otro?
- c.- ¿Cuál es la posición (coordenada  $x$ ) del observador en tierra con respecto a las posiciones de ambos satélites? (En otras palabras, qué se debe calcular para encontrar la posición  $x$  del observador).
- d.- Si en el espacio existen 24 satélites orbitando a 27.000 km de altura, muestre que las correcciones relativistas calculadas aquí, son relevantes si queremos una precisión de 2 - 5 metros.

a) Observador en Tierra

b) Dado que ambos relojes emiten la señal simultáneamente en su sistema de referencia, tenemos que:

$$t'_B - t'_A \equiv \Delta t' = 0 = \gamma[(t_B - t_A) - \frac{v}{c^2}(x_B - x_A)] = \gamma[\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x]. \text{ ec.1}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} x'_B - x'_A \equiv L' &= \gamma[(x_B - x_A) - v(t_B - t_A)] \\ &= \gamma[\Delta x - v\Delta t] \quad \text{ec.2} \end{aligned}$$

Tenemos dos ecuaciones para dos incógnitas  $\Delta t$  y  $\Delta x$ . Despejando, obtenemos

De la ecuación [ec.1]

$$\Delta t = \frac{v}{c^2}\Delta x$$

De la ecuación [ec.2],

$$\Delta x = \frac{L'}{\gamma} = v \cdot \Delta t.$$

Reemplazando  $\Delta x$  en la ecuación, tenemos

$$\Delta x = \frac{c^2 \Delta t}{v} = \frac{L'}{\gamma} + v \Delta t, \text{ obtenemos}$$

$$(c^2 - v^2) \Delta t = L' \sqrt{1 - v^2/c^2} \Rightarrow \Delta t = \frac{L' \gamma}{c^2}.$$

También:  $\Delta x = \frac{L' \gamma}{v}$ .

Vemos que  $t_B - t_A = \frac{\gamma L'}{c^2}$ ,  $t_B = t_A + \frac{\gamma L'}{c^2}$ .

De acuerdo al observador en Tierra, el reloj  $A$  disparó primero.

- c) Para calcular la coordenada  $x_P$  del observador todo esto referido al sistema del observador tenemos las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} (x_P - x_B)^2 + H^2 &= c^2(t_P - t_B)^2 \\ (x_P - x_A)^2 + H^2 &= c^2(t_P - t_A)^2, \end{aligned}$$

Estas dos ecuaciones indican que el evento  $A$  (y  $B$ ) están en el cono de luz del evento  $P$  que corresponde al instante en que el observador recibe los pulsos de  $A$  y  $B$ . Note que estas ecuaciones<sup>4</sup>

Tenemos 6 incógnitas  $x_P, t_P, x_B, x_A, t_B, t_A$ . Se requieren 4 ecuaciones adicionales. Éstas son:

$$\begin{aligned} x_B - x_A &= \gamma L', \\ t_B - t_A &= \gamma \frac{v}{c^2} L', \\ x_P &= 0, \\ t_A &= 0. \end{aligned}$$

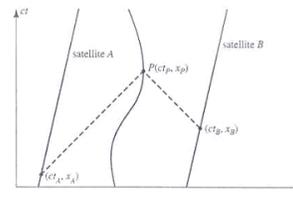


Figura V.40:

<sup>4</sup>no distinguen el presente del pasado, por tanot en algún momento debemos escoger el signo correcto de la variable.

En las dos últimas ecuaciones, instalamos el origen del sistema de coordenadas junto al observador  $P$ . En la última ecuación  $t_A = 0$ , los relojes parten cuando el satélite  $A$  emite el destello que alcanza al observador  $P$ . Estas coordenadas hacen más fácil los cálculos. Sería más físico poner  $x_A = t_A = 0$ , establecer el origen de coordenadas espaciales junto con el destello que alcanza a  $P$ , pero las ecuaciones son un poco más complejas.

Con esta elección, las ecuaciones quedan:

$$\begin{aligned}x_B^2 + H^2 &= (ct_P - \gamma \frac{v}{c} L')^2 \\x_A^2 + H^2 &= (ct_P)^2 \\x_B &= x_A - \gamma L'\end{aligned}$$

La ecuación para  $x_A$  es

$$(\gamma L' + x_A)^2 + H^2 = [(x_A^2 + H^2)^{1/2} - \gamma \frac{v}{c} L']^2$$

La ecuación para  $t_P$  es:

$$[((ct_P)^2 - H^2)^{1/2} + \gamma L']^2 + H^2 = (ct_P - \gamma \frac{v}{c} L')^2$$

Las dos soluciones que aparecen se deben a la ecuación del como la luz que no distingue el presente del pasado.

Como ejemplo, Ud., puede resolver el caso  $H = 0$  y obtener

$$-ct_P = x_A \quad (t_P > 0)$$

## V.9. Ejercicios Resueltos

El siguiente ejemplo ilustra una situación que no corresponde a lo que estamos acostumbrados y que sucedería si existieran objetos *macroscópicos* que viajaran a velocidades cercanas a las de propagación de la luz. O, a la inversa, qué sucedería si la velocidad de la luz tuviera un valor más pequeño.

Nuestra experiencia indica que si un avión (o helicóptero) se acerca a una muralla iluminándola con un foco, como se ilustra en la Figura, la zona iluminada se acerca desde infinito hacia la muralla. Mostraremos en este ejemplo, que es posible que el movimiento de la sombra proyectada por una muralla debido al foco en movimiento, puede desplazarse desde la muralla hacia infinito, si el foco (o el avión) se acerca a velocidades cercanas (pero inferiores) a la velocidad de propagación de la luz.

### Ejemplo

Un avión viaja en forma rectilínea a una velocidad  $u$ , cercana a la velocidad de la luz y a una altura  $H$  sobre el suelo. Una linterna, encendida al pasar el avión, emite un rayo de luz pasando apenas sobre el muro.

Dos observadores  $A$  y  $B$  en reposo, descansan detrás del muro de altura  $h$ .  $B$  se ubica justo detrás del muro, mientras que  $A$  permanece a una distancia  $\ell$  de  $B$ .

Al pasar sobre la muralla (punto  $D$ , en la figura) el avión enciende otra linterna que ilumina al observador  $B$ . En este ejemplo, nos interesa sólo estas dos linternas, la situada en el punto  $P$  y apuntando sobre el borde superior de la muralla y la situada en el punto  $D$ , justo sobre la muralla y apuntando en forma vertical sobre  $B$ .

a) Encuentre el valor que debe tomar la velocidad  $u$  del avión de modo que el destello (fotón) emitido desde la linterna en  $P$ , al ser encendida por el paso del avión, alcance al observador  $A$  justo en el instante en que el fotón, emitido desde la linterna situada en el punto  $D$ , alcanza al observador  $B$ .

Hallar el rango de valores del ángulo  $\phi$  para el cual ocurre esta situación.

b) Demuestre que si la velocidad del avión es mayor que el valor encontrado en la pregunta anterior (pero siempre menor que la velocidad de la luz), entonces la oscuridad que hay en el lado izquierdo del muro se propaga desde  $B$ , al lado de la muralla, hacia  $A$ . Justo lo opuesto a lo que dicta el sentido común.

Este es un ejercicio de cinemática no-relativista.

### Solución

a) Para encontrar el valor buscado para  $u$ , calcularemos el tiempo que tarda el

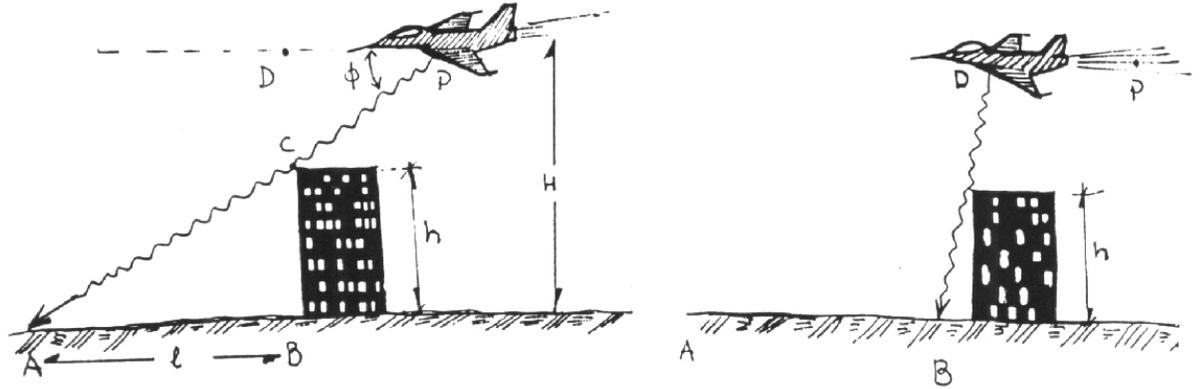


Figura V.41: Al pasar por los puntos **P** y **D** el avión enciende una linterna ubicada en cada uno de dichos puntos y que apunta en la forma indicada.

rayo de luz en recorrer los dos caminos propuestos en el enunciado (ver Figura):

$$T(P \rightarrow C \rightarrow A) \equiv T_A,$$

$$T(P \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B) \equiv T_B.$$

Calculemos  $T_A$ .

Como los triángulos rectángulos  $\triangle CDP \sim \triangle CBA$ , entonces

$$\frac{\bar{AP}}{\bar{AC}} = \frac{H}{h}, \quad \text{de aquí se obtiene } \bar{AP} = \frac{H}{h} \bar{AC} = \frac{H}{h} \sqrt{\ell^2 + h^2},$$

donde hemos usado  $\bar{CA} = \sqrt{h^2 + \ell^2}$ .

Pero  $T_A$  es el tiempo que el fotón demora en recorrer la distancia  $\bar{PA}$ , de modo que:

$$T_A = \frac{H}{h} \sqrt{h^2 + \ell^2} \cdot \frac{1}{c}. \quad (\text{V.20})$$

Para calcular la velocidad  $u$  de modo que el destello emitido en  $D$  llegue a  $B$  simultáneamente con el fotón que salió desde  $P$  y alcanza  $A$ , debo considerar el tramo  $PD$  que recorrió el avión.

$$T_B = T(P \rightarrow D) + T(D \rightarrow C \rightarrow B).$$

El tiempo que transcurrió entre  $P \rightarrow D$  es

$$T(P \rightarrow D) = \frac{\bar{P}D}{u}.$$

De la Figura se tiene:

$$\frac{\bar{P}D}{\bar{D}C} = \frac{\ell}{h},$$

de modo que

$$\bar{P}D = \frac{\ell}{h} \bar{D}C = \frac{\ell}{h} (H - h), \quad (\text{V.21})$$

de esta forma

$$T(P \rightarrow D) = \frac{\ell(H - h)}{h u}.$$

El tiempo de viaje del destello entre  $D$  y  $B$  es:

$$T(D \rightarrow B) = \frac{H}{c}$$

de donde se puede obtener el tiempo que tarda el rayo en alcanzar el punto B, contando el instante desde que el avión encendió la linterna en el punto P:

$$T_B \equiv T(P \rightarrow B) = \frac{\ell(H - h)}{h u} + \frac{H}{c}.$$

Si imponemos la condición que  $A$  y  $B$  reciban los destellos simultáneamente, se debe cumplir que  $T_A = T_B$ , y de esta ecuación obtenemos la condición buscada:

$$\frac{\ell(H - h)}{h u} + \frac{H}{c} = \frac{H}{c} \frac{\sqrt{h^2 + \ell^2}}{h},$$

despejando  $u/c$ , obtenemos:

$$\frac{u}{c} = \frac{\left(1 - \frac{h}{H}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{h}{\ell}\right)^2} - \frac{h}{\ell}}$$

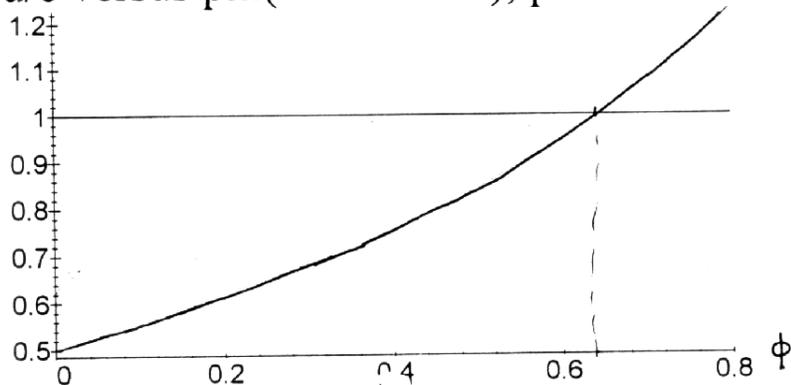
$$\text{como } \frac{h}{\ell} \equiv \tan \phi, \quad \text{entonces: } \frac{u}{c} = \frac{\left(1 - \frac{h}{H}\right)}{\left[\frac{1}{\cos \phi} - \tan \phi\right]}. \quad (\text{V.22})$$

El ángulo  $\phi$  debe cumplir la siguiente condición:

$$\frac{u}{c} < 1 \quad \implies \quad \frac{1 - \text{sen } \phi}{\cos \phi} > \left(1 - \frac{h}{H}\right).$$

En el gráfico que se acompaña se puede estimar el rango de valores posibles que puede tomar  $\phi$ .

$u/c$  versus  $\phi$ (en radianes), para  $h/H=0.5$



b) Es claro que si la velocidad del avión  $u$  aumenta, entonces el destello emitido en  $P$ , llega a  $A$  después que el emitido desde  $C$ , puesto que el avión viaja más rápido y el tiempo  $T_{PD}$  se acorta.

Si el avión viaja con una velocidad  $u = u(\phi)$  que se ajusta a la ecuación V.22, la región  $\bar{AB}$  se ilumina en forma instantánea.

Si

$$1 > \frac{u}{c} > \left(\frac{1 - \frac{h}{H}}{1 - \text{sen } \phi}\right) \cos \phi.$$

entonces la zona  $\bar{AB}$  se ilumina desde  $B$  hacia  $A$ , siempre que no emita destellos cuando  $\phi < 0,6$ . Para  $\phi > 0,6$  no se cumple que  $\frac{u}{c} < 1$ .

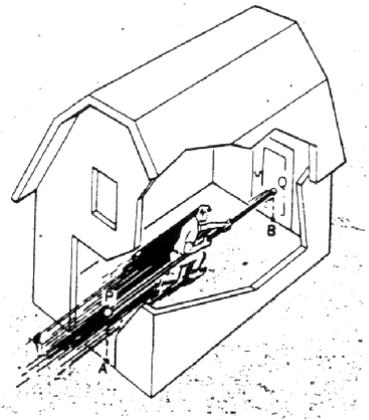


Figura V.42:

## Ejemplo

### La Paradoja del Granero

Considere un atleta corriendo con una garrocha de largo propio 20 m. (La velocidad del atleta con respecto al granero es de  $\sqrt{3} \frac{c}{2}$ ). Éste sostiene la garrocha de modo que se mantiene paralela a la dirección de movimiento del atleta. En su carrera, el deportista pasa por un granero de longitud propia = 10 m. ¿ Sería posible cerrar los dos extremos del cobertizo de manera que el atleta y la garrocha queden atrapados en su interior?

Analice su respuesta desde el punto de vista del atleta y del observador en el interior del granero.

### Solución

La paradoja del granero.

#### Solución:

Sea  $L_g \equiv$  longitud propia del granero,  $L_g = 10$  m.

$L \equiv$  longitud propia de la garrocha,  $L = 20$  m.

i) Análisis con respecto al atleta:

El atleta opina que  $L_g$  sufre una contracción puesto que ve aproximarse al granero con velocidad  $\sqrt{3}\frac{c}{2}$

$$\text{luego } L_g^{(A)} = L_g \sqrt{1 - \frac{(\frac{\sqrt{3}}{2}c)^2}{c^2}} = \frac{L_g}{2} = \frac{10}{2} = 5m$$

y como la longitud de su garrocha es  $L$  (largo propio)

$\Rightarrow$  para el atleta es imposible quedar atrapado en el interior del granero puesto que:  $L > L_g/2$

ii) Análisis con respecto al observador parado en el granero.

El observador  $B$  ve aproximarse al atleta con  $\frac{\sqrt{3}}{2}c$ , por lo tanto, la contracción de la garrocha es:

$$L^{(B)} = L \sqrt{1 - \frac{(\frac{\sqrt{3}}{2}c)^2}{c^2}} = \frac{L}{2} = \frac{20}{2} = 10m$$

y como  $L_g = 10m$  (largo propio del granero) entonces para observador  $B$  es perfectamente posible que el atleta ( $A$ ) quede atrapado en el granero, ya que:

$$L^{(B)} = L_g \quad L^{(B)} \equiv \text{long. medida por } B \text{ de la garrocha de } A$$

Alternativa # 2: Uso directo de las Transformaciones de Lorentz.

$$\begin{aligned} \text{sea } \Delta x &= x_2 - x_1 \\ \Delta x' &= x'_2 - x'_1 \end{aligned}$$

donde **1** y **2** eventos que indican la entrada y salida del granero para análisis (i) y el fin y comienzo de la garrocha en análisis (ii)

Las transformaciones de Lorentz son:

$$\begin{aligned} (*) \Delta x &= \gamma(\Delta x' + v\Delta t') \\ (**) \Delta t &= \gamma(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x') \end{aligned}$$

i)  $s'$  desea medir la longitud del granero  $\Rightarrow \Delta t' = 0$  en (\*)  $\Rightarrow \Delta x = \gamma\Delta x'$

$$\begin{aligned} \Delta x &\equiv \text{longitud granero medido por } s \\ \Delta x' &= \text{longitud granero medido por } s' \\ \Rightarrow \Delta x' &= L_g^{(A)} = \frac{L_g}{\gamma} = \frac{L_g}{2} < L \\ \Rightarrow &\text{Para } s' \text{ es imposible quedar atrapado} \end{aligned}$$

ii) Ahora

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_2 - x_1 = \text{largo garrocha con respecto } s \\ \Delta x' &= x'_2 - x'_1 = \text{largo garrocha con respecto } s' \end{aligned}$$

$S$  desea medir la longitud de la garrocha  $\Rightarrow \Delta t = 0$

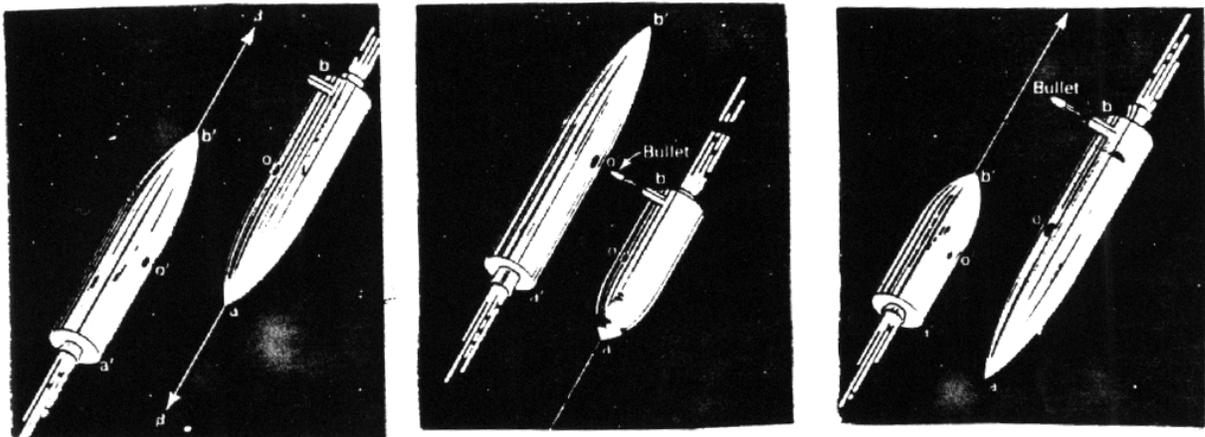
$$\text{de(**)} \Rightarrow \Delta t' = -\frac{v}{c^2} \Delta x'$$

$$\text{en(*)} \Rightarrow \Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma}$$

$$L^{(B)} = \frac{L}{\gamma} = \frac{L}{2} = L_g$$

$\Rightarrow$  Para  $S$  es posible quedar atrapado

\*\*\*\*\*



## V.10. Ejercicios Propuestos

- 1.– Un vagón de tren se mueve sobre una vía a velocidad constante  $v$ . A y B están en los extremos del vagón y los observadores C y D están de pie junto a la vía. Definimos el evento AC como ocurrencia de A al pasar frente a C, y los otros similarmente.
  - (a) De los cuatro eventos BD, BC, AD, AC, ¿cuáles sirven para que los observadores que están sobre la vía midan el paso de un reloj llevado por A?
  - (b) Sea  $\Delta t$  el intervalo de tiempo entre estos dos eventos para los observadores que están a un lado de la vía. ¿Qué intervalo de tiempo marca el reloj en movimiento?
  - (c) Supóngase que los eventos BC y AD son simultáneos en el sistema de referencia de la vía. ¿Son simultáneos en el sistema de referencia del vagón?. Si no, ¿cuál es primero?
- 2.– Determine el desplazamiento de longitud de onda por efecto Doppler relativista para la línea 6563 Å del Hidrógeno  $H_\alpha$ , emitida por una estrella que se aleja de la Tierra a una velocidad relativa de  $10^{-3}c$ ,  $10^{-2}c$ , y  $10^{-1}c$ . ¿Es una buena aproximación el resultado a primer orden?
- 3.– Un aeroplano de 40 m de longitud en su sistema de reposo se mueve a velocidad uniforme de  $630 \frac{m}{seg}$ , con respecto a la Tierra.
  - (a) ¿Qué fracción de su longitud de reposo parecerá acortarse, con respecto a un observador sobre la Tierra?
  - (b) ¿Cuánto tiempo tardará, según los relojes en tierra, para que el reloj del aeroplano se retrase un microsegundo? (Suponga que únicamente es válida la relatividad especial).
- 4.– El radio de reposo de la Tierra puede considerarse como de 6400 km, y la velocidad a que gira alrededor del Sol, como de 30 km/seg. ¿Cuánto parecería acortarse el diámetro de la Tierra con respecto a un observador en el Sol, por el movimiento orbital de aquella?
- 5.– Se mide la longitud de una nave espacial y se encuentra un valor exactamente igual a la mitad de su longitud propia.

- (a) ¿Cuál es la velocidad de la nave con respecto al sistema del observador?  
¿Cuál es la dilatación del tiempo unitario de la nave?

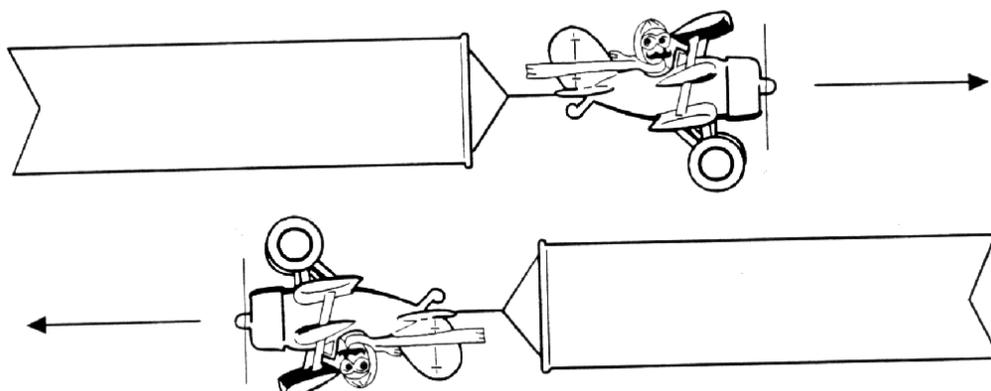


Figura V.43:

- 6.– Dos naves espaciales tienen una longitud de 100 m cada una, medidos en su sistema propio. Se desplazan en sentidos opuestos, cruzándose en el vuelo. El astronauta que va en la nariz de una nave, que la designamos por A, mide el tiempo que transcurre entre el paso de la nariz y la cola de la otra nave (B) desde su puesto de observación. Encuentra que este intervalo es  $2,50 \times 10^{-6}$  segundos. A partir de este dato, encuentre:

(a) ¿Cuál es la velocidad relativa de las naves?

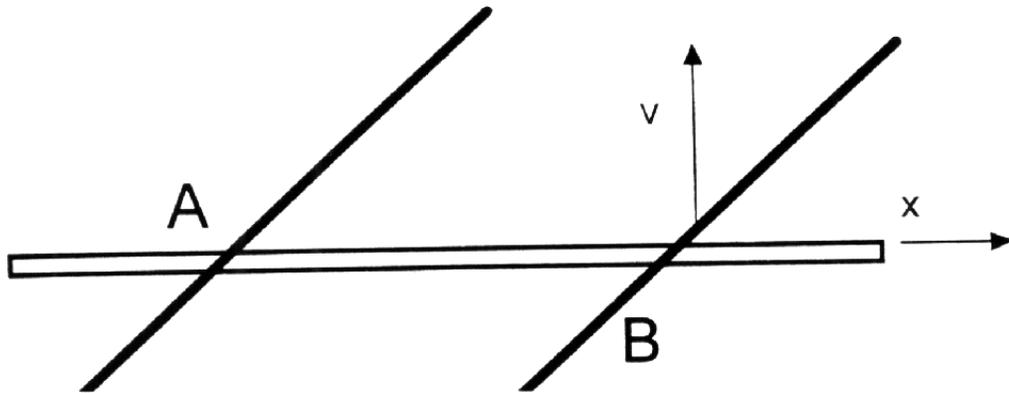
(b) ¿Cuál sería el intervalo medido en la primera nave (A), si ahora registrara el intervalo que transcurre entre que la nariz de la nave (B) pasa frente a la nariz de (A) y la cola de (B) pasa frente a la cola de (A)?

Acompañe ambas respuestas con un gráfico espacio-tiempo.

- 7.– (a) Si la vida (propia) promedio de un mesón  $\mu$  es  $2,3 \times 10^{-6}$  segundos, ¿qué distancia promedio viajaría éste en el vacío antes de morir, de acuerdo con mediciones en diferentes sistemas de referencia, donde su velocidad es de  $0,00c$ ,  $0,60c$ ,  $0,90c$ , y  $0,99c$  respectivamente.

(b) Compare cada una de estas distancias con la distancia que el mismo mesón mediría.

- 8.– A 200 km sobre el nivel del mar, una partícula de rayo cósmico primario choca contra la atmósfera de la Tierra; en esta colisión de alta energía se produce un mesón  $\pi^+$ , el cual desciende verticalmente a una velocidad de  $0,99c$  y, en su sistema propio, se desintegra  $2,5 \times 10^{-8} \text{seg}$  después de producido. Según se ve desde la Tierra, ¿a qué altura sobre el nivel del mar se desintegra el mesón?
- 9.– En la Figura, A y B son los puntos de intersección del eje  $x$  (varilla estacionaria) con una varilla inclinada (varilla en movimiento) en dos instantes diferentes. La varilla inclinada se está moviendo en la dirección  $+y$  (sin cambiar de inclinación) a una velocidad  $v$ .
- (a) Demuestre que el punto de intersección de las varillas tiene una velocidad  $u = v \cot \theta$  hacia la izquierda.
- (b) Sea  $\theta = 30^\circ$  y  $v = \frac{2}{3}c$ . Demuestre que, en este caso,  $u$  excede a  $c$  y explique porqué no existe ninguna contradicción con la relatividad.



- 10.– Un observador en un sistema inercial  $S$  informa que dos proyectiles se están moviendo en línea recta, paralelamente uno respecto del otro; el primero a una velocidad de  $0,9 c$  y el segundo a una velocidad de  $0,7 c$ . Encuentre la velocidad de un proyectil con respecto al otro.
- 11.– Un observador sobre la Tierra que llamamos A, manda una señal con una linterna cada seis minutos. Otro observador, B está en una estación espacial estacionaria con respecto a la Tierra. Designamos con C a un astronauta

que viaja en un cohete de A a B, con una velocidad constante de  $0,6 c$ , con respecto a A.

(a) ¿A qué intervalos recibe B las señales de A?

(b) ¿A qué intervalos recibe C las señales de A?

(c) ¿A qué intervalos recibe B los destellos de C?

12.– Considere la existencia de partículas que tienen vida finita y cuyo número en función del tiempo está dado por:

$$N(t) = N_o \exp \frac{-t \ln 2}{\tau}.$$

Siendo  $N_o$  el número de partículas que existen en  $t = 0$  y es la llamada vida media de las partículas, ya que en el tiempo  $t = \tau$  el número inicial se ha reducido a la mitad:

$$N(0) = N_o, \quad N(\tau) = \frac{N_o}{2}.$$

Los mesones  $\pi^+$ , por ejemplo, se producen en colisiones de alta energía entre una partícula de rayo cósmico primario y la atmósfera terrestre. Su vida media *propia* es  $\tau_o = 2,6 \times 10^{-8}$  s. Suponiendo que  $N_o$  mesones  $\pi^+$  se han formado a la altura  $h$  de la tierra y que descienden hacia ella con rapidez  $0,9999 c$  llegando solamente el 1 %:

(i) Determine la altura  $h$  a la cual se han formado los mesones.

(ii) Para esa altura, comente sobre el porcentaje que llegaría a la superficie terrestre si no se hicieran correcciones relativistas.

13.– Dos misiles de igual largo propio pasan en sentido contrario a velocidades relativistas. El observador O tiene un cañón en la cola de su nave apuntando en dirección perpendicular al movimiento relativo.

Como indica la figura, O dispara cuando la punta A coincide con A'. En el sistema de referencia de O, el otro misil sufre una contracción de Lorentz. En consecuencia O sospecha que su bala no dará en el blanco. Pero en el

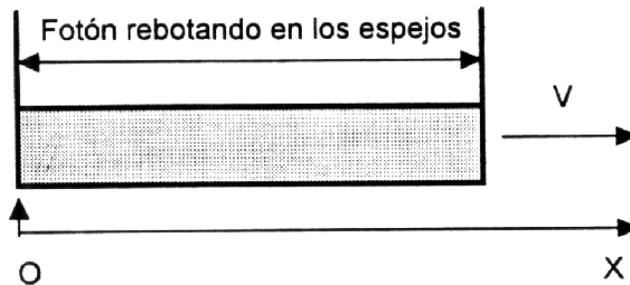
sistema de referencia de  $O'$ , es el misil  $O$  el que aparece contraído y por lo tanto, cuando  $A$  y  $A'$  coinciden el observador ve lo que aparece en la tercera figura.

(a) Uno de los diagramas contiene un error. Descúbralo.

(b) Usando las transformaciones de Lorentz descubra lo que realmente sucede en este encuentro.

Nota:  $L \equiv$  largo propio de los misiles.  $u \equiv$  velocidad del misil  $O$  con respecto a  $O'$ .

- 14.- Se tiene una barra de largo  $L$  que se desplaza con velocidad  $v$ . En los extremos de esta barra se ubican dos espejos como se muestra en la figura. Suponga que un fotón se encuentra entre ellos. Si en  $t = 0$  el espejo de la izquierda coincide con el punto  $x = 0$  y justo en ese instante el fotón está siendo reflejado en ese mismo espejo, dibuje la trayectoria del fotón y de la barra en un diagrama espacio-tiempo  $c = 1$ .



- 15.- Un tren  $A$  de largo  $L$  (largo propio: medido en su sistema de referencia) se mueve hacia el Norte con velocidad  $V$ . Otro tren  $B$ , de largo  $2L$  (largo propio) viaja hacia el sur con la misma rapidez que el anterior. ¿Cuánto tiempo demoran estos trenes en cruzarse? Definimos cruzarse como el intervalo que transcurre desde que la nariz de  $A$  enfrenta a la nariz de  $B$  hasta que el último carro de  $A$  se enfrenta al último carro de  $B$ .
- Encuentre este tiempo medido por un observador en el piso,
  - Encuentre este tiempo medido por el observador en el tren  $A$ ,
  - Medido desde un observador en el tren  $B$ ,
  - Verifique que el invariante es el mismo en los tres casos anteriores.

Debe ilustrar su respuesta con el gráfico espacio-tiempo en cada uno de los casos.

- 16.– En el sistema  $S'$ , un sujeto corre en la dirección del eje  $y'$  con velocidad constante  $V = \frac{L'}{T'}$ , donde  $L'$  es la distancia propia con respecto a  $S'$  y  $T'$  es el tiempo que marca un reloj estático con respecto a  $S'$ .

A su vez,  $S'$  se mueve con una velocidad  $U$  con respecto a otro sistema de referencia inercial  $S$ .

a) De acuerdo a un observador en reposo en el sistema  $S$ , calcule las dos componentes de la velocidad de este sujeto y a partir de este resultado encuentre la tangente del ángulo con que éste se aproxima.

b) Suponga que en el sistema  $S'$  hay una serie de interruptores separados por una distancia propia  $L'$ . A medida que el sujeto avanza los va encendiendo. Al ser activados, estos envían un fotón (o un pulso de luz, si Ud. lo prefiere) que *viaja directamente hacia  $S$  en la dirección del eje  $x$  del sistema  $S$* .

Calcule la velocidad  $\omega_y$  con que los detectores se encienden en el sistema  $S$ , a medida que van recibiendo la señal luminosa proveniente de  $S'$ . Suponga, si le ayuda utilizar este dato, que inicialmente el sistema  $S'$  se encontraba a una altura  $H$  sobre  $S$ . Recuerde que la distancias perpendiculares al movimiento relativo no sufren alteraciones.

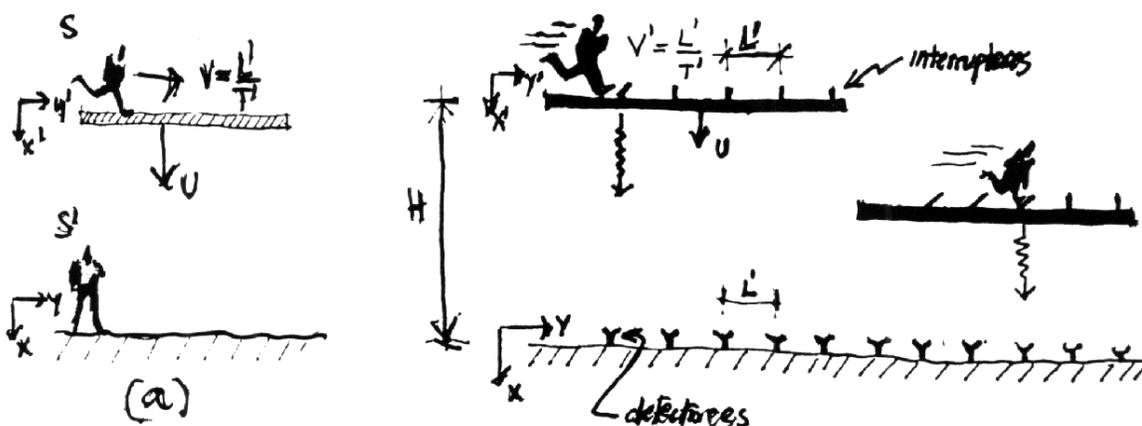


Figura V.44: Ejercicio # 19

- c) Si el observador en  $S$ ,  $U = \bar{V} \cos \theta$ ,  $V = \bar{V} \sin \theta$ , representan las

componentes de la velocidad  $\bar{V}$  con la cual se aproxima el sujeto, demuestre que la velocidad con que se encienden los detectores en el sistema  $S$  es:

$$w_y = \frac{\bar{V} \operatorname{sen} \theta}{1 - \frac{\bar{V} \cos \theta}{c}}$$

d) Demuestre que si  $\bar{V} \approx c$  (es decir,  $\beta \approx 1$ ) y el ángulo  $\theta$  es muy pequeño, la velocidad  $w_y$  toma su máximo valor para  $\theta^2 = 2(1 - \beta) \approx (1 + \beta)(1 - \beta) \Rightarrow \theta \approx 1/\gamma$ .

17.– Un observador en un sistema inercial  $S$  informa que dos proyectiles se están moviendo en línea recta, en forma paralela y en el mismo sentido. Si denominamos uno de los proyectiles por  $O_1$  y le asociamos la velocidad  $V_1 = 0,9c$  y al otro,  $O_2$  la velocidad  $V_2 = 0,7c$ :

a) Encuentre la velocidad de  $O_1$  con respecto a  $O_2$ .

b) Si los largos propios son  $L_1$  y  $L_2$  respectivamente, cuál es el largo del cohete  $L_2$ , de acuerdo a  $O_1$ .

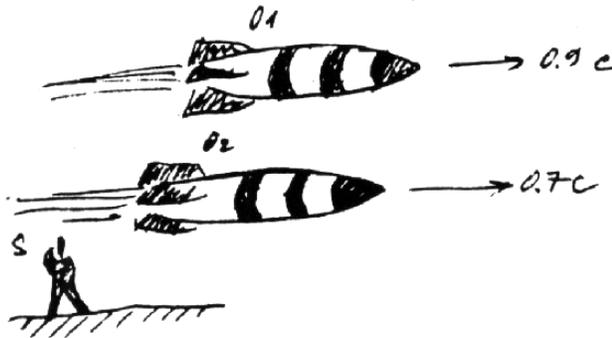
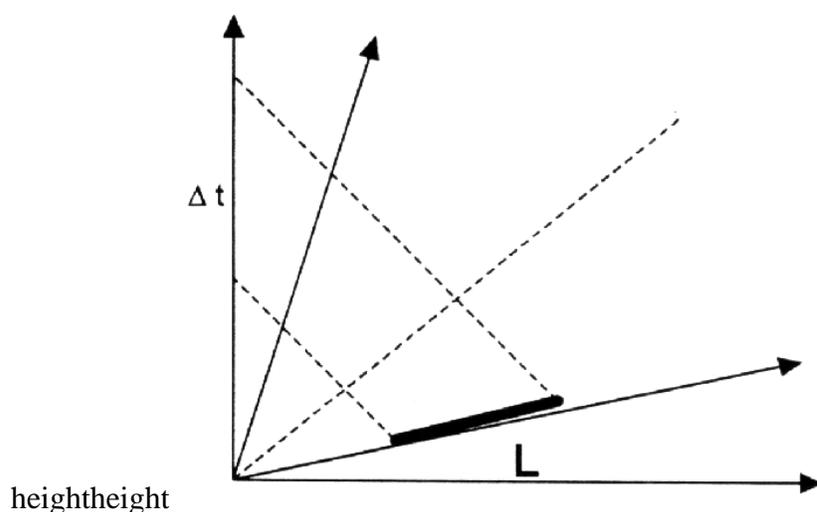
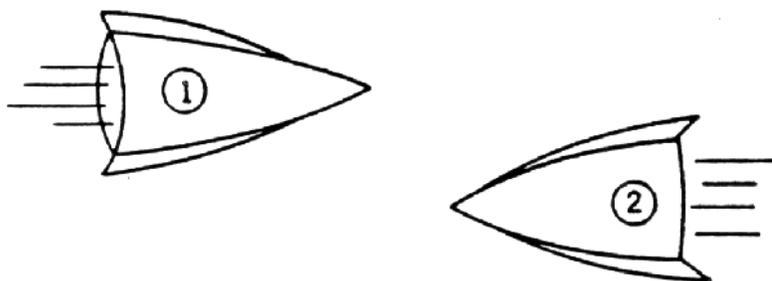


Figura V.45: Ejercicio # 20

18.– Una barra de largo  $L'$  con respecto a su sistema en reposo, se aleja con una velocidad  $V_o$  de un observador en reposo. Si desde cada uno de los extremos de la barra se envían dos destellos en forma *simultánea con respecto al sistema fijo en la barra*, calcule la diferencia de tiempo  $\Delta t$  con la cual arriba cada uno de los destellos al observador  $S$ .



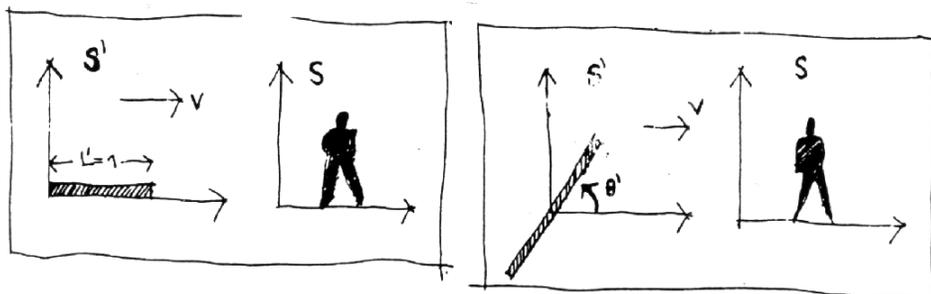
**Nota:** El intervalo  $\Delta t$ , *no* depende de la distancia a la cual se ubica la barra del origen de  $S$ . Ud. puede posicionarla donde más le acomode, respetando las condiciones impuestas en el enunciado del problema.



19.– Dos cohetes que viajan en la misma dirección pero en sentido opuesto, se cruzan, como se señala en la Figura. En el sistema  $S$ , que corresponde a la Tierra, ambos cohetes tienen rapidez  $u$  y largo  $\ell$ .

i) Calcule el intervalo –medido por un observador en Tierra–, que transcurre entre el instante que sus respectivas narices se cruzan y el instante en que comienzan a separarse.

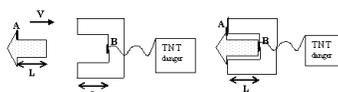
ii) Calcule el intervalo medido por un pasajero de uno de las naves –sistema  $S'$ –, entre el instante que sus respectivas narices se cruzan y el instante en que las naves comienzan a separarse.



- 20.- Considere un observador  $O$  en reposo en el sistema de referencia  $S$ . En este mismo sistema de referencia un móvil puntual que denominamos *Tranbus* se desplaza con velocidad  $V_o$  en el sentido positivo del eje  $\hat{x}$ . Otro observador  $O'$  viaja en el sentido positivo del eje  $\hat{y}$  con la misma rapidez  $V_o$ .
- ¿Qué velocidad tiene el *Tranbus* de acuerdo al observador  $O'$ ?
  - ¿En qué dirección viaja el *Tranbus*, de acuerdo a este último observador  $O'$ ? Antes de calcular este ángulo: ¿en qué dirección esperaba Ud. que viajara? (Nota: la dirección puede ser determinada a través, por ejemplo de la tangente de su ángulo.)
  - ¿A qué velocidad  $W$ , debe viajar  $O'$  para que la dirección del movimiento del *Tranbus* sea la esperada en la parte b.- ?
- 21.- Una varilla de un metro de longitud en su sistema propio, se aproxima a un observador en reposo con una velocidad  $\frac{24}{25}c$ , como se indica en la Figura.
- ¿Cuál es el largo de esta varilla en el sistema del observador?
  - Suponga ahora que la varilla está inclinada en un ángulo  $\theta' = \arccos(5/6)$ , en el sistema de referencia que viaja con la varilla. Calcule el ángulo de inclinación de la varilla medido en el sistema de referencia del observador fijo en tierra.
  - Calcule el largo de la varilla en el sistema de referencia del observador en reposo, para esta segunda configuración.
- 22.- La estructura de la izquierda (remache) tiene una protuberancia de largo  $L$  que al insertarse en el objeto con forma de U a la derecha alcanza justo a tocar el interruptor  $B$  ubicado al fondo de la cavidad. Esto ocurre cuando ambos objetos están en reposo (primera figura).  $B$  es un interruptor que, al ser tocado, gatilla la bomba de TNT señalada. Note que la cabeza del

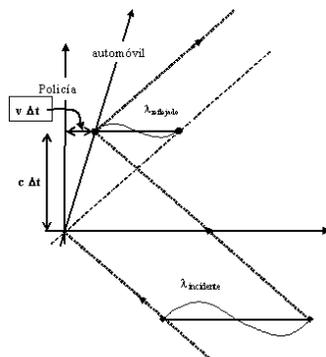
remache (por ejemplo el borde A) se apoya en los bordes del objeto en U al ser insertado.

- i.- Suponga que el mismo remache se acerca con una rapidez  $\mathbf{V}$ , con respecto a un observador en reposo en la estructura en U, como aparece en la figura. Explique cuantitativamente qué sucede con el extremo del remache cuando **A** toca el borde de U: también toca **B**, lo tocó antes, a qué distancia se encuentra según qué observador ¿ Explota la bomba? Debe acompañar un gráfico espacio-tiempo de la situación donde se especifique qué midió y su valor.
- ii.- Considere las mismas preguntas, pero ahora desde el punto de vista de un observador en reposo con respecto al remache que ve acercarse al objeto en U. Siendo un observador sistema inercial, opina que la estructura en U se acerca con rapidez  $\mathbf{V}$ . ¿ Explota o no la bomba, de acuerdo a este observador?
- iii.- En definitiva, si la bomba explota NO puede depender del observador. ¿ Cómo resuelve Ud. esta paradoja?
- iv.- En el caso i.- suponga que se conectó un dispositivo al punto A del remache tal que si **A** es presionado dispara un laser que corta el cable que une B con la bomba. En este nuevo escenario: ¿ Explota ésta o no?



- 23.- El diagrama representa un policía midiendo la velocidad de un auto mediante el efecto Doppler. Nos instalamos en el sistema de referencia de la autoridad. Del auto sólo indicamos la flecha del tiempo para no complicar el dibujo. Se indica la trayectoria de dos nodos separados por una longitud de onda ( $\lambda$ ) emitida por la pistola del policía y la recibida después de reflejarse en el auto unos instantes más tarde. (recuerde que los largos, como la longitud de onda, se miden en intervalos tipo espacio).

- i.- De la figura, demuestre (no sólo afirme, explique por qué) que:  $c\Delta t = v\Delta t + \lambda_{\text{reflejado}}$ , y que  $c\Delta t = \lambda_{\text{incidente}} - v\Delta t$ , donde  $v$  es la velocidad del auto c/r al policía.
- ii.- A partir del resultado anterior obtenga ( $f \equiv$  frecuencia),  $f_{\text{reflejada}} = k f_{\text{incidente}}$ , con  $k = \frac{1+V/c}{1-V/c}$ .
- iii.- Suponiendo que el cambio de frecuencia es pequeño debido a que  $V/c$  es muy pequeño, muestre que  $(\Delta f/f) \approx 2V/c$ . Verifique cuán pequeño es si  $V=120$  km/h.
- iv.- El radar de la policía de Santiago, opera con una frecuencia de  $10,525 \times 10^9$  ciclos/s. ¿Cuántos ciclos por segundo cambia el haz reflejado comparado con el incidente (o enviado)?
- v.- ¿Qué resolución debe tener la maquinita de la policía para poder distinguir entre un automovilista que viaja a 120 km/h y otro, infractor, que guía a 121 km/h?



# Bibliografía

- [1] **A History of the theories of Aether and Electricity**, Sir Edmund Whittaker, 1954, Tomash Publishers, Vol VII.
- [2] **Conceptos de Relatividad y Teoría Cuántica**, R. Resnik. 1976, Ed. Limusa, México.
- [3] **The Quantum Beat, The physics Principles of Atomic Clocks**, F. G. Major, Springer , New York, 1998.
- [4] **Gravitation**, C. Misner, K. Thorne and J. A. Wheeler, 1972, W. H. Freeman.
- [5] **The Emperor's New Mind**, Concerning Computers, Minds and the Laws of Physics, Roger Penrose, 1991, Penguin Book.
- [6] **Feynman Lectures on Physics**, R. P. Feynman, R. Leighton and M. Sands, Addison Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1964, Sección 18-6.
- [7] **Black Holes and Time Warps: Einstein outrageous legacy**, K. Thorne, 1994, W. W. Norton & Company.
- [8] **The illustrated Longitude**, Dava Sobel and Williams J. D. Andrews, Walker and Company, New York, 1998.
- [9] **Espacio, tiempo y Gravitación**, R. Wald, Fondo de Cultura Económica # 14315.
- [10] **Spacetime Physics**, 1966, R. Taylor and J. A. Wheeler, W. H. Freeman and Company.

- [11] *Le Temps en Physique*, M. Mashaal, La Recherche, **24**,# 260, page 1412. (Contiene un resumen de los distintos aspectos del tiempo en la física).
- [12] *Variations in the rotation of earth*, W. E. Carter et al., Sci., **224**, 1 june, page 957.
- [13] /www.das.uchile.cl/ jose
- [14] *Time Too Good to Be True*, D. Kleppner, Physics Today, **Reference Frame**, March 2006, page 10.
- [15] *Test of relativistic gravitation with a space-borne hydrogen maser*, R. F. C. Vessot et al., 1980, Phys. Rev. Lett., **45**, page 2081.
- [16] *Around the world Atomic clocks: Predicted and Observed Relativistic time gains*, J. C. Hafele y R. E. Keating, Science, **177**, 166, 1972, pag 166.
- [17] 1979, A. Brillet and J. L. Hall, Phys. Rev. Lett. **42**, 549.
- [18] *Improved Kennedy–Thorndike Experiment to test Special Relativity*, 1990, D. Hils and J. L. Hall, Phys. Rev. Lett. **64**, page 1697.
- [19] **From Alchemy to Quarks: The Study of Physics as a Liberal Art**, Sheldon L. Glashow, Brooks and Cole Publishing Company, 1993.