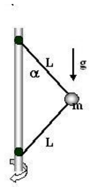
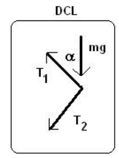




Control Recuperativo: Soluciones   (N.Zamorano)

Problema 1:

a.- (1 pto.) Un individuo situado en el borde de un abismo arroja al aire dos pelotitas. Una de ellas es lanzada verticalmente hacia arriba. La otra, verticalmente hacia abajo. La rapidez inicial de ambas es la misma: V_o. Desprecie el roce con el aire. ¿Cuál de ellas llega al fondo del abismo con mayor rapidez? Justifique brevemente su respuesta.

Solución

a.- Si no existe roce, el tiempo que la pelota tarda en alcanzar la altura máxima es el mismo que tarda en volver al punto de lanzamiento.

$v_f = v_0 - g\,t \quad \Rightarrow \quad 0 = v_0 - g\,T$. De este modo la velocidad final al pasar por el punto de lanzamiento es: $v = v_0 - 2gT = v_0 - 2v_0 = -v_0$.

b.- Por tanto, ambas llegan al fondo del abismo (o el piso) con la misma rapidez.

0.5 puntos por respuesta correcta.

0.5 puntos por precisión y corrección de la justificación.

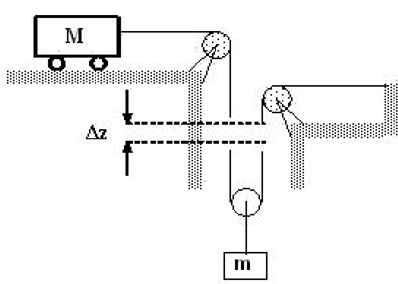
b.- (2.5 ptos.) Considere el sistema de la figura. Las dos masas M y m están unidas mediante las poleas y cuerdas que aparecen en la figura. No existe roce en ningún punto y tanto la cuerda como las poleas tienen masa despreciable. Encuentre la relación entre la aceleración de cada una de las masas.

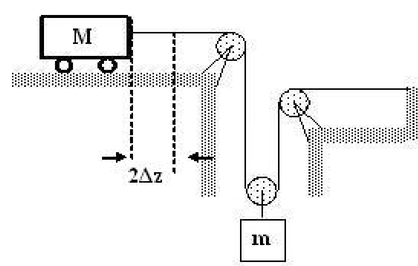
Utilizaremos un Método Geométrico.

¿Cuánta cuerda debo añadir para que m se desplace ΔZ, mientras M permanece inmóvil?

Solución

Debo agregar $2 \cdot \Delta Z$ como se aprecia en la figura.





Si la cuerda tiene un largo fijo, entonces M se debe desplazar adecuadamente para cubrir los tramos abiertos con la operación (virtual) anterior.

$$\Delta x_M = 2\,\Delta\,Z_m$$

Por tanto

$$\Delta x_M = 2\,\Delta\,Z_m, \Rightarrow \frac{\Delta x_M}{\Delta t} = \frac{2\,\Delta\,Z_m}{\Delta t} \Rightarrow v_M = 2\,v_m.$$

Análogamente:

$$\Delta v_M = 2\,\Delta\,v_m \Rightarrow a_M = 2\,a_m$$

Si la resolvemos analíticamente, debemos designar los tramos convenientemente. Designamos x_M como la distancia entre la masa M y la polea fija en el vértice. a, b y c designan los tramos del hilo bajando y subiendo alrededore de la pole que sostiene la masa m. Entonces: $x_M + a + b + c = L$, largo de la única cuerda. Si m baja una distancia $\Delta\,Z$, entonces se verifica que: $x_M + \Delta\,x_M + (a + \Delta\,Z) + (b + \Delta Z) + c = L$. De este modo se debe cumplir que $\Delta x = -2\,\Delta Z$ y el resto de los segmentos permanece inalterado. $\Delta x < 0$ indica que la distancia entre la masa M y la polea disminuye.

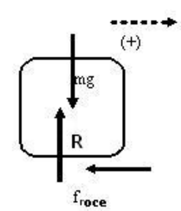
1 punto: respuesta correcta, 1,5 puntos explicación correcta del método aplicado.

c.- (2,5 ptos.) Un conductor debe detener su automóvil en una emergencia. Al aplicar los frenos, los neumáticos resbalan sobre el pavimento y dejan una marca de 169 m de longitud. Se sabe que el coeficiente de fricción dinámico es mayor o igual a 0.9. Demuestre que el vehículo excedía el límite de velocidad de 120 km/hr al momento de aplicar los frenos. Utilice un valor numérico para g sólo en este problema:$g = 10\,m/s^2$.

Solución

c.- La forma más corta es usar $v_f^2 - v_i^2 = 2\,a\,(x_f - x_i)$. Cálculo de la aceleración: la reacción del piso sobre la masa es $R = m\,g$. La fuerza de roce $f_{roce}|_{\text{mínima}} = -\mu\,m\,g$. ar Debo usar $\mu_{\text{mínimo}}$ porque ese valor conduce al cálculo de la velocidad mínima posible que tenía ese automóvil. Si infringe un reglamento con esta velocidad inicial, seguro lo hará considerando los otros valores de μ.

$F = m\,a \quad \Rightarrow \quad -\mu\,g = a$, además: $v_f = 0, \quad v_0^2 = 2\,\mu\,g\,\Delta x$. Por otra parte $\Delta x = 169 = 13^2$ y $\mu\,g = 0.9 \times 10 = (3)^2$,$\Rightarrow v_0 = 3 \times 13 = 39 m/s = 140 km/h$.



0.5 ptos. justificación de $\mu = 0.9$

1,5 ptos. por el desarrollo.

0.5 ptos. por respuesta correcta

Problema 2

a.- (1.5 ptos.) Se tiene una cadena homogénea, de masa total M y largo L, que inicialmente cuelga verticalmente y está sostenida por una persona desde su extremo superior a la altura de la mesa. Esta persona comienza a subir la cadena arrastrándola a lo largo de la superficie de la mesa (sin roce) con rapidez constante V_o. Dibuje el gráfico de: fuerza aplicada por la persona *versus* el largo del tramo de la cadena que cuelga por el extremo de la mesa.

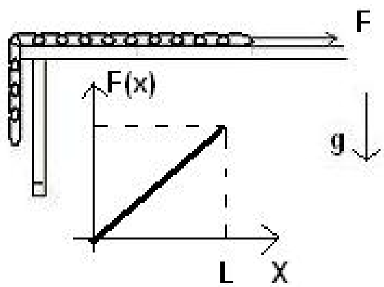
Solución

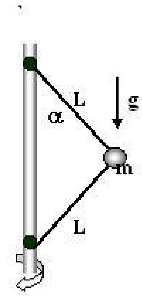
a.- Como se desplaza con velocidad constante, la fuerza es la misma que debe ser aplicada para sostener la cadena en reposo. Corresponde al caso estático.

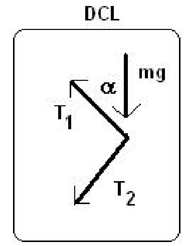
0.5 puntos $F_{\text{aplicada}} = m(x) \cdot g$

0.5 puntos Para calcular el peso de la cadena en cada instante uso la proporción: $\frac{m(x)}{x} = \frac{M}{L} \Rightarrow m(x) = (\frac{M}{L})\,x$

0.5 puntos: Gráfico **consistente** con la ecuación obtenida. $F_{\text{aplicada}} = (\frac{M\,g}{L}) \cdot x$.







b.- (2.5 ptos.) Una pelota de masa m está girando alrededor de una barra vertical. Permanece unida a la barra mediante dos cuerdas de masa despreciable y largo L. La pelota gira con una velocidad angular ω, constante y cuya magnitud mantiene a las dos cuerdas tensas. El ángulo α entre la cuerda y la barra es conocido.

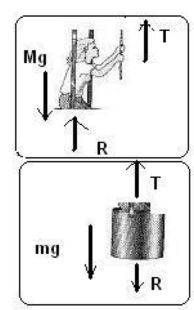
Solución

b.-
i.- Evaluar la distinción entre las tensiones: $T_1 \neq T_2$. (.5 pts.=
Descontar 0.5 pts. si $T_1 = T_2$
ii) 1) $-T_1 \text{ sen}\,\alpha - T_2 \text{ sen}\,alpha = -m\,\omega^2\, L \text{ sen}\,\alpha$
2) $T_1 \cos\,\alpha - mg - T_2 \cos\,\alpha = 0$
iii) $T_1 + T_2 = m\,\omega^2 L, T_1 - T_2 = \frac{mg}{\cos\,\alpha} \Rightarrow T_2 = 0, T_1 = \frac{m\,g}{\cos\alpha} \Rightarrow \omega^2 = g/L \cos\,\alpha$

c.- (1.5 ptos.) Una joven se instala dentro de un cilindro de masa m que está sostenido por una cuerda, que a su vez pasa sobre una polea que cuelga desde una cierta altura. La joven tira del otro extremo de la cuerda y comienza a levantarse. Haga el diagrama de cuerpo libre correspondiente a la niña cuya masa es M y otro para el cilindro que la sostiene.

Solución

c.-
1 punto: R: reacción de la carga sobre la niña. T: La niña tira de la cuerda con una fuerza T y la cuerda tira a la niña con una fuerza T hacia arriba.
0.5 puntos. T: tensión de la cuerda. R: Acción de la niña contra el piso.



Problema 3:

Un paquete de masa m, se mueve con rapidez V_0 sobre una superficie de hielo de roce despreciable. En un punto de su trayectoria entra en el tablero horizontal, rugoso, de un trineo de masa M, que se puede deslizar sin roce sobre el hielo, como se ilustra en la figura. El coeficiente de roce cinético entre el paquete y el trineo es μ. El paquete se desliza sobre el trineo hasta que finalmente queda en reposo con respecto al tablero.

a.- (1 pto.) Escriba el diagrama de cuerpo libre para la masa m y el trineo de masa M cuando ambas masas están en contacto.

b.- (.5 ptos.) Encuentre las aceleraciones correspondientes a cada una de las masas.

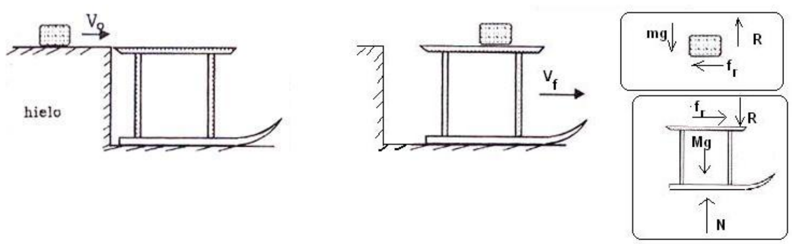
c.- (2 ptos.) Dibuje el gráfico rapidez *versus* tiempo para ambos cuerpos. En algún instante las dos masas alcanzan la misma velocidad con respecto al piso. Encuentre cuánto demora esto en ocurrir. ¿Qué pasa con la fuerza de roce en este instante?

d.- (2 ptos.) ¿A qué distancia del borde del trineo m se detiene sobre la plataforma de M (están en reposo relativo)?

e.- (0.5 ptos.) ¿Cuál es la velocidad del conjunto, una vez que el cuerpo de masa m queda en reposo con respecto al trineo? Encuentre el valor del momentum final definido como $P_{\text{final}} = (M+m)\, V_{\text{final}}$.

Solución

a.- (Ver Figura).



b.- Sólo nos interesa la dirección horizontal:

1) $m\,a_1 = -f_r,\ |f_r| = \mu\, m\, g \qquad (R = m\, g)$

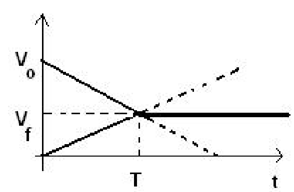
2) $M\, a_2 = f_r = \mu\, m\, g$

De modo que las aceleraciones son:

$a_1 = -\mu\, g$ (negativa, se frena), $a_2 = (\mu \frac{m}{M})\, g$ (positiva, acelera el trineo).

c.- La rapidez de la masa m es $v_1 = v_0 - \mu\, g\, t$. La rapidez del trineo: $v_2 = (\mu\frac{m}{M}) g\, t$

Las velocidades coinciden en el instante en que las dos rectas se cortan en el gráfico de las velocidades de ambas masas. En este instante desaparece la fricción ($\mu = 0$). No hay fuerzas horizontales que los aceleran. Luego siguen moviéndose juntos.



$v_1 = v_2, \quad \Rightarrow\ v_0 - \mu\, g\, T = (\mu\frac{m}{M}) g\, T$, de modo que

$$T = \left(\frac{v_0}{\mu g}\right) \cdot \frac{M}{M+m}$$

.

d.- Podemos hacerlo utilizando las **Áreas** del gráfico velocidad versus tiempo. El tramo recorrido por la masa m con respecto al piso es:

$\frac{1}{2}(V_0 + V_f)\cdot T$.

El tramo recorrido por la masa M con respecto al piso: $\frac{1}{2}\, V_f T$.

Area Neta :

$$\frac{1}{2}(V_0 + V_f)T - \frac{1}{2}\, V_f\, T = \frac{1}{2}\, V_0\, T = \frac{V_0^2}{2\,\mu\, g}\cdot\frac{M}{M+m}.$$

e.- El momentum final es, por definición, masa por velocidad. Como ambos objetos viajan juntos al final del proceso, la masa es la suma de ambas. El momentum final es:

$$(m+M)\, V_f = (m+M)\,\frac{\mu\, m\, g}{M}\,\frac{V_0\, M}{\mu\, g\,(M+m)} = m\, V_o.$$

El momentum se conserva puesto que no hubo ninguna fuerza externa (relevante) durante esta interacción entre las masas.