Pauta Pregunta 3

Álvaro Núnez

April 17, 2008

Parte a.- (2 ptos.)

Si la rueda gira lentamente, Penélope debe dejar caer las llaves desde el punto ms alto de la rueda, pues casi equivale a una caída libre.

Si la rueda gira rápidamente, Penélope debe soltar las llaves muy cerca del eje-x, puesto que la parábola que pasa por el centro de la rueda debe ser muy aguda por la rapidez del movimiento.

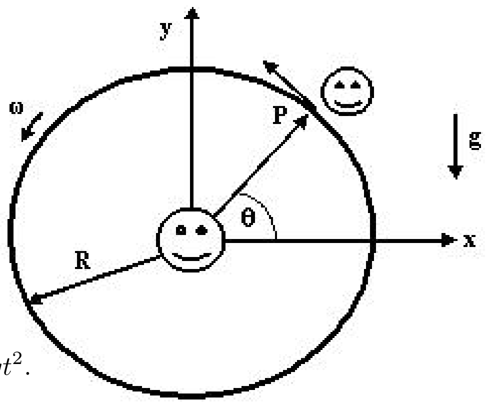
Parte b.- (3 ptos.)

Supongamos que Penélope deja caer las llaves desde el ángulo θ. La posición inicial de las llaves esta dada por

$$\mathbf{R}_0 = R\,(\cos\theta, \sin\theta) \tag{1}$$

Dado que la rueda gira con velocidad angular ω, la velocidad será:

$$\mathbf{V}_0 = R\omega\,(-\sin\theta, \cos\theta) \tag{2}$$



A lo largo del eje X no hay aceleración, de modo que la ecuación para la coordenada X de las llaves es:

$$X(t) = R\cos\theta - R\omega\sin\theta\; t \tag{3}$$

En el eje Y tenemos la aceleración de gravedad:

$$Y(t) = R\sin\theta + R\omega\cos\theta\; t - \frac{1}{2}gt^2. \tag{4}$$

Para llegar a manos de Alfonsina, en el origen, debe existir un tiempo t^* para el cual $X(t^*) = Y(t^*) = 0$. De la ecuación para el ejer X tenemos que:

$$\omega t^* = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \tag{5}$$

De este modo, usando este tiempo en la ecuación de Y e imponiendo que sea 0 derivamos la relación:

$$Y(t^*) = R\sin\theta + R\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} - \frac{1}{2}\frac{g}{\omega^2}\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} \equiv 0 \;\; (!) \tag{6}$$

Tomando la última ecuación, dividiendo por R, usando la identidad $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ y, por ultimo, multiplicando por $\sin\theta$, obtenemos:

$$\sin\theta = \frac{g}{2R\omega^2}\cos^2\theta = \frac{\lambda}{2}\cos^2\theta. \tag{7}$$

Por último, usando nuevamente la identidad, obtenemos:

$$\frac{\lambda}{2}\left(1 - \sin^2\theta\right) - \sin\theta = 0, \tag{8}$$

Con soluciones:

$$\sin\theta = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 1} \tag{9}$$

Dado que el termino de la derecha es, en módulo, siempre mayor que 1, de modo que debemos escoger el signo de positivo para que $\sin\theta$ sea menor que 1 en módulo.

$$\sin\theta = \sqrt{\lambda^2 + 1} - \lambda \tag{10}$$

Parte c.- (1 pto.)

Ahora usaremos la aproximación $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$, valida si x es un numero pequeno. Si λ es un número muy pequeno, la expresión se acerca a:

$$\sin\theta \approx 1 - \lambda + \frac{1}{2}\lambda^2 \tag{11}$$

que es cercano a 1 y por lo tanto $\sin\theta \approx 1$, de donde obtenemos $\theta \approx \pi/2$. Si por el contrario tenemos que λ es un número muy grande, obtenemos:

$$\sin\theta = \lambda\sqrt{1 + \frac{1}{\lambda^2}} - \lambda \tag{12}$$

y solo ahora usamos la aproximación pues $\frac{1}{\lambda^2}$ es un número pequeno:

$$\sin\theta \approx \lambda\left(1 + \frac{1}{2\lambda^2}\right) - \lambda = \frac{1}{2\lambda} \approx 0 \tag{13}$$

Como $\sin\theta \approx 0$ entonces $\theta \approx 0$