Cinemática 2 dimensiones

Introducción a la Mecánica

Nelson Zamorano Hole

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile

III

Capítulo III

CINEMATICA EN DOS DIMENSIONES

III.1. VECTORES

III.1.1. Representación de vectores en dos dimensiones

Hasta ahora hemos descrito el movimiento en una dimensión. En este caso basta una coordenada para identificar la posición de un punto. Obviamente, en dos dimensiones necesitamos dos números para localizarlo. Por ejemplo, para ubicar una calle en el mapa de la guía de teléfonos se dispone de dos datos, una letra y un número; con la letra se ubica la posición en el eje vertical y con el número, la posición del bloque en el eje horizontal. En otras palabras, al usar [A–16] como una coordenada, estamos identificando las letras del alfabeto con la línea vertical (*ordenada*) del mapa y los números con la coordenada horizontal (*abcisa*).

Para precisar la posición de un punto en el plano, debemos recurrir a un par de números reales. Necesitamos dar los dos números como un *par ordenado* para identificar su significado sin ambigüedades. Por convención, el primer número corresponde a la abcisa (eje horizontal) del punto a identificar y el segundo número a la ordenada (eje vertical). Usualmente, el punto con sus coordenadas respectivas se escribe como P(x,y).

La recta que une el origen O con el punto P, se denomina el **vector OP**, se escribe $\overrightarrow{OP}$, y contiene información acerca de la *dirección, sentido y magnitud del vector.*

La *dirección* es la línea que atraviesa los puntos O y P de la Figura, el *sentido* es la flecha que se instala en el extremo del trazo y la *magnitud*, es el largo del trazo, que también se denomina el módulo del vector.

La magnitud o módulo de un vector se indica mediante dos barras verticales a cada uno de los lados del vector: $|\overrightarrow{OP}|$. El módulo (o largo) del vector, es un número que se

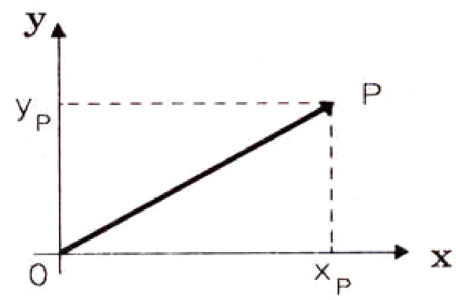


Figura III.1: Componentes Cartesianas de un vector. La proyección del vector en el eje x es la sombra que proyecta sobre dicho eje al trazar una perpendicular al eje x desde el extremo del vector. Lo mismo es válido para la proyección sobre el eje y.

obtiene usando el teorema de Pitágoras:

$$|\ \overrightarrow{OP}\ | \equiv [x_P^2 + y_P^2]^{1/2}$$

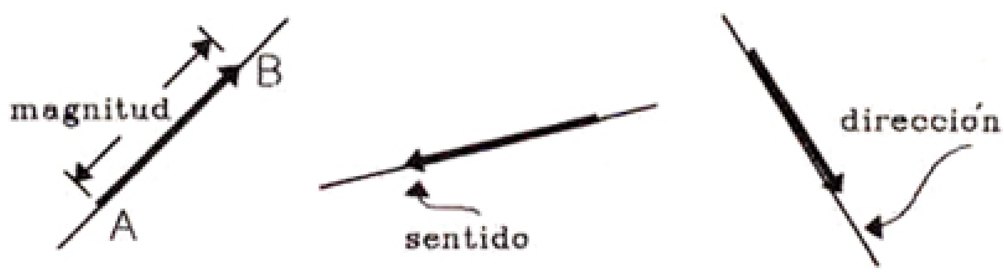


Figura III.2: Representación gráfica de distintos vectores. En cada uno de ellos se indica una de las características de un vector: magnitud, dirección y sentido.

La magnitud de un vector es *siempre* un número real positivo. Dadas las coordenadas de los dos puntos extremos de un vector: (x_A, y_A), (x_B, y_B), su valor se calcula de la siguiente forma:

$$|\ \overrightarrow{AB}\ | = \left[(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2\right]^{1/2}.$$

donde $(x_B - x_A)$ representa la sombra que proyecta el vector $\overrightarrow{AB}$ sobre el eje–x. Análogamente, $y_B - y_A$ es la proyección de este vector sobre el eje–y.

Esta es la *forma gráfica* de representar un vector: mediante una flecha. Otra forma de identificarlo, es a través de las coordenadas de sus puntos extremos: *forma analítica.* Este método se define a continuación.

Un vector se representa por un par ordenado de números. En el primer casillero se inserta la proyección del vector sobre el eje–x, y en el segundo, su proyección sobre el eje–y. Cada una de estas proyecciones se obtiene haciendo la diferencia entre la coordenada correspondiente a la cabeza de la flecha y la coordenada de la cola de la flecha.

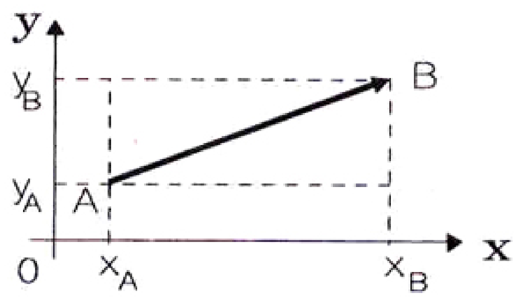


Figura III.3: Los vectores no comienzan necesariamente desde el origen. La Figura representa al vector AB, indicando sus componentes que, como se señaló, corresponden a la diferencia entre la coordenada del punto final menos la coordenada de la cola de la flecha.

Por ejemplo, los vectores $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OP}$ de las Figuras II.1 y II.3, se pueden expresar mediante este método de la siguiente forma:

$$\overrightarrow{OP}= [x_P - 0, y_P - 0] = [x_P, y_P], \qquad \overrightarrow{AB}= [x_B - x_A, y_B - y_A].$$

NO se puede intercambiar el orden de los números dentro de un casillero, por ejemplo, reemplazar x_B por x_A. Tampoco se puede cambiar las componentes desde un casillero al otro. Si realizamos cualquiera de estas operaciones estamos describiendo otro vector, no el propuesto originalmente. El orden de los números dentro de cada casillero y el de los casilleros mismos es parte de la información contenida en la descripción analítica. Esto es lo que se denomina un par ordenado de números.

Ejemplo

A continuación demostramos que al cambiar el *orden* de los números x_A y x_B dentro del primer casillero, esta nueva componente identifica a otro vector, diferente del original $\overrightarrow{AB}$ señalado anteriormente.

El nuevo vector es:

$$\overrightarrow{A'B'} = [x_A - x_B, \quad y_B - y_A] = [(-x_B) - (-x_A), \quad y_B - y_A],$$

en la segunda igualdad se escribió, de acuerdo a la convención, la coordenada de la cabeza de la flecha menos la coordenada de la cola. Allí notamos que la componente x de la cola y de la flecha son *negativas*, es decir este vector es la reflexión especular del vector original $\overrightarrow{AB}$, como se indica en la Figura.□

El vector

$$\overrightarrow{BA} = [x_A - x_B, y_A - y_B],$$

donde se ha cambiado el orden de ambas coordenadas, tiene la misma magnitud y dirección que el vector $\overrightarrow{AB}$, pero *apunta en sentido opuesto.*

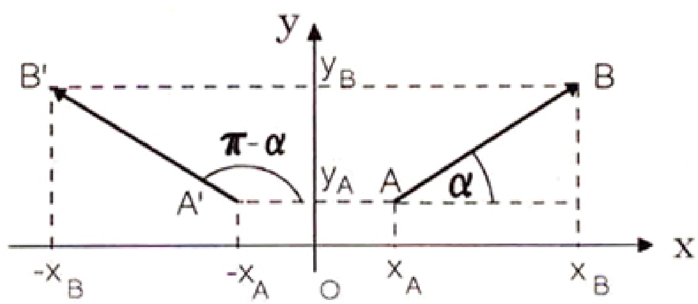


Figura III.4: La Figura representa al vector A'B'y AB, indicando sus componentes. Se señala también el ángulo α que fija la *dirección* del vector.

La razón entre la proyección sobre el eje OY y sobre el eje OX, es la tangente del ángulo que forma este vector con la abcisa (eje horizontal).

$$\tan\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}, \tag{III.1}$$

$$\tan(\pi - \alpha) \equiv \tan\alpha' = \frac{y'_B - y'_A}{x'_A - x'_B} = -\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -\tan\alpha. \tag{III.2}$$

Ejercicio

Compruebe que estas dos últimas ecuaciones son equivalentes a la igualdad trigonométrica $\tan\alpha = -\tan(\pi - \alpha)$.□

Los números x_P e y_P en la representación analítica de $\overrightarrow{OP}$ se denominan, la componente x y la componente y, del vector $\overrightarrow{OP}$. Representan la sombra que proyecta este vector sobre el eje OX, (x_P) y sobre OY, (y_P).

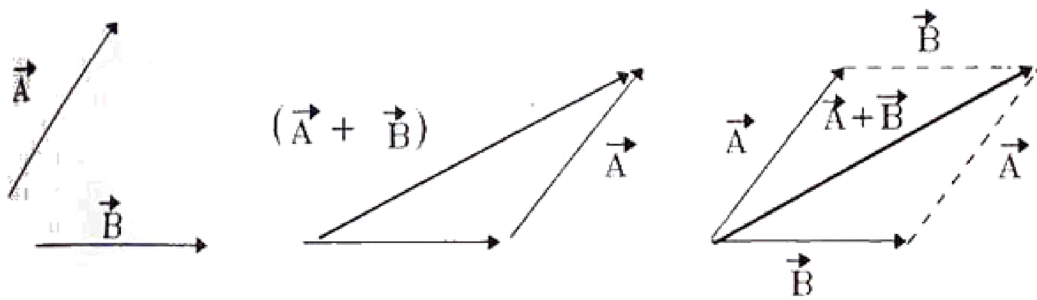


Figura III.5: Para sumar vectores basta poner una de las flechas a continuación de la otra. El vector suma es la flecha que va desde el origen del primer vector elegido hasta el final del segundo vector. En la Figura, a la derecha, se incluye el método del paralelogramo para sumar dos fuerzas.

III.2. ALGEBRA DE VECTORES

III.2.1. Método geométrico

Suma de vectores

Parece conveniente denominar los vectores con dos letras que indiquen su comienzo y fin, pero también es posible identificarlos mediante una sola letra, como lo hacemos a continuación.

Para sumar geométricamente los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, debemos poner la cola de $\vec{B}$ a continuación de la cabeza de $\vec{A}$, la flecha que parte de la cola de $\vec{A}$ y termina en la cabeza de $\vec{B}$, es el vector suma $(\overrightarrow{A+B})$.

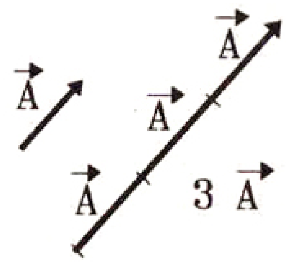
Otra alternativa para encontrar el vector que representa la suma de dos vectores consiste en construir un paralelogramo con los dos vectores dados en el orden que se incluye a continuación:
1.- Trasladamos paralelamente uno de los vectores, de modo que ambos tengan su origen (la cola de cada vector), en común (ver Figura [III.5]).
2.- Construimos un paralelógramo que tenga como lados $\vec{A}$ y $\vec{B}$.
3.- La diagonal que parte del origen común es el vector $(\vec{A}+\vec{B})$.

A partir de este paralelógramo, se puede ver que $(\vec{A}+\vec{B}) = (\vec{B}+\vec{A})$, es decir, la suma de vectores es **conmutativa**, no varía al cambiar el orden de los sumandos.

Producto de un vector y un número real

Otra operación que necesitaremos es la multiplicación de un vector por un número real. Por ejemplo: $3 \cdot \vec{A} \equiv \vec{A} + \vec{A} + \vec{A}$.

En el caso general, cuando λ es un número real, positivo o negativo $\lambda\vec{A}$ es un vector que tiene la misma dirección de $\vec{A}$, pero su magnitud (largo) es $|\lambda|$ veces la magnitud del vector $\vec{A}$. Si $\lambda > 0$, se conserva el *sentido* que el vector tenía inicialmente. Si $\lambda < 0$ se invierte el sentido del vector.



Resta de dos vectores. Método geométrico

Este caso es equivalente a la *suma* de dos vectores, en la cual uno de ellos está multiplicado por $\lambda = -1$.

De acuerdo a la definición anterior $\vec{A}' \equiv (-1)\vec{A}$, y por lo tanto $\vec{B} + (-\vec{A}) = \vec{B} + \vec{A}'$. (Ver Figura).

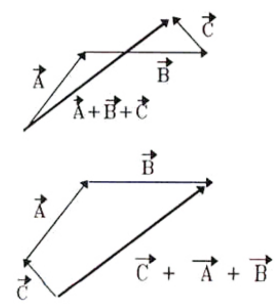
Figura III.6: El vector $(\vec{B} - \vec{A})$, se obtiene dibujando la diagonal del paralelógramo que comienza en la flecha del vector $\vec{A}$ y termina en la flecha del vector $\vec{B}$.

Suma de tres o más vectores

Para sumar más de dos vectores, se realiza la misma operación que para el caso de dos vectores: se toma un par de vectores cualquiera del grupo y se suman de acuerdo al método ya establecido; con esta operación obtenemos un nuevo vector. A este vector se le suma –usando el mismo método– otro vector cualquiera de los restantes, generando un nuevo vector y así sucesivamente hasta incluir todos los vectores que debíamos sumar.

Se puede verificar de la Figura que el resultado de esta operación es *independiente del orden* con que se haya realizado la operación suma.

Esta propiedad de la suma de vectores se denomina ASOCIATIVIDAD. Indica que no importa como se asocien los vectores para sumarlos, el resultado final es el mismo. En la Figura se detallan los pasos a seguir para sumar tres vectores: se toma un vector *cualquiera* del conjunto, a continuación de éste, se copia cualquiera de los otros dos, poniendo la cola de éste último a continuación de la cabeza del anterior, y se repite la misma operación con el vector restante. Al terminar, se traza un vector que vaya del origen del primer vector a la cabeza del último sumado. La resultante es el vector suma de todos ellos.



La asociatividad en la suma de tres vectores se expresa a través del paréntesis que agrupa a un par de ellos. Este paréntesis establece un orden para comenzar sumando esos dos vectores. Al vector resultante se le suma a su vez el tercero. La asociatividad de la suma de vectores afirma que el resultado de la suma es independiente del par de vectores por el cual se comenzó.

$$\vec{A}+\vec{B}+\vec{C} = (\vec{A}+\vec{B})+\vec{C} = \vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$$

III.2.2. Método algebraico

En este caso usamos la identificación de un vector en dos dimensiones como un par ordenado de números. La suma de dos vectores es otro vector, cuya primera componente corresponde a la suma de los términos ubicados en el primer casillero y la segunda componente se obtiene sumando los números que aparecen en el segundo casillero de los vectores, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
\vec{A} &= [x_a, y_a], \quad \text{componentes del vector } \vec{A}, \\
\vec{B} &= [x_b, y_b], \quad \text{componentes del vector } \vec{B}, \\
\vec{A}+\vec{B} &\stackrel{\text{def}}{=} [x_a + x_b, y_a + y_b], \quad \text{suma de las componentes.}
\end{aligned} \tag{III.3}$$

Producto de un escalar por un vector:

$$\lambda\vec{A} \stackrel{\text{def}}{=} [\lambda x_a, \lambda y_a]. \tag{III.4}$$

Nota

Un *escalar* es un número real. Se le denomina de esa forma para diferenciarlo de un vector.

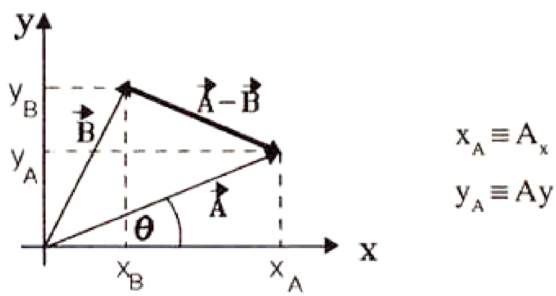


Figura III.7: La representación de los vectores mediante un par ordenado contiene la misma información que la representación geométrica. Cada operación (suma, resta... de vectores) tiene su expresión en ambos métodos.

La resta de dos vectores se define como la resta de sus respectivas componentes.

$$\vec{A} - \vec{B} = [x_a - x_b, \;\; y_a - y_b] \tag{III.5}$$

En la representación analítica de los vectores, el número que se instala en el primer casillero, es la componente del vector en el eje x, (el largo del trazo que proyecta sobre el eje x). En el segundo casillero, el número representa el largo de la proyección del vector sobre el eje y.

Vectores unitarios

En física, además de la notación en componentes, se usan los *vectores unitarios*. La equivalencia entre los dos sistemas se define a continuación:

$$\vec{A} = [A_x, A_y] \stackrel{\text{def}}{=} A_x\,\hat{\imath} + A_y\,\hat{\jmath}, \tag{III.6}$$

donde $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ son vectores *unitarios*, es decir vectores cuya magnitud (largo) es la unidad (*magnitud = 1*) y apuntan en la dirección positiva del eje x y del eje y, respectivamente. El número que multiplica a $\hat{\imath}$ es la *componente–x* del vector y el número que acompaña a $\hat{\jmath}$ es la *componente–y* del vector.

Es una notación distinta para la misma representación analítica explicada anteriormente. Se usa con mucha frecuencia.

Resumen

Dos vectores son iguales si tienen las mismas componentes.

$$
\begin{aligned}
\vec{C} &= [C_x, C_y], \quad \vec{B} = [B_x, B_y] \\
\text{Si } \vec{C} &= \vec{B}, \Longrightarrow \; C_x = B_x, \; C_y = B_y. \\
\vec{A} &\equiv [A_x, A_y] \equiv A_x \, \hat{\imath} + A_y \, \hat{\jmath}, \\
|\vec{A}\,| &= \sqrt{A_x^2 + A_y^2}, \quad \text{largo del vector (módulo)}, \\
A_x &= |\vec{A}\,| cos\,\theta, \quad \text{componente en el eje } x, \\
A_y &= |\vec{A}\,| sen\,\theta, \quad \text{componente en el eje } y, \\
\frac{A_y}{A_x} &= \tan\,\theta, \\
\vec{C} &= \vec{A} + \vec{B} = [A_x, A_y] + [B_x, B_y] \\
\vec{C} &= [A_x + B_x, A_y + B_y]
\end{aligned}
$$

III.3. POSICION, VELOCIDAD Y ACELERACION.

III.3.1. Posición

La posición de la partícula en cada instante está determinada por un vector que la señala. A medida que la partícula cambia de posición en el tiempo, el vector se desplaza con ella. La dependencia de $\vec{x}$ en el tiempo, se indica $\vec{x} = \vec{x}(t)$.

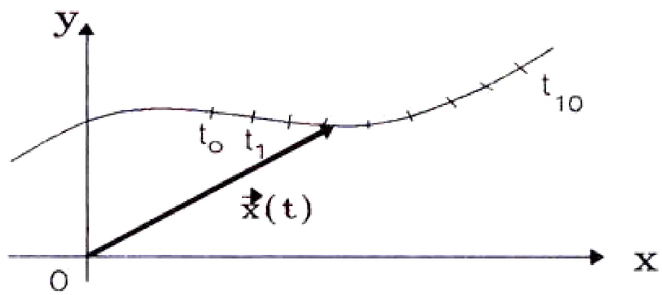


Figura III.8: A cada punto de la trayectoria de la partícula le asociamos un *número*, que corresponde al tiempo que indica el reloj del viajero. También se puede usar la distancia recorrida a lo largo de la trayectoria para identificar cada uno de sus puntos.

III.3.2. Velocidad

Definición:

Se define como el desplazamiento dividido por el intervalo durante el cual ocurre dicho cambio,

$$\vec{v} = \lim_{t_2 \to t_1} \left\{ \frac{\vec{x}(t_2) - \vec{x}(t_1)}{t_2 - t_1} \right\}, \tag{III.7}$$

escribiendo el vector en componentes,

$$= \lim_{t_2 \to t_1} \left\{ \frac{[x(t_2), y(t_2)] - [x(t_1), y(t_1)]}{t_2 - t_1} \right\},$$

y ahora restando las componentes respectivas, de acuerdo a la forma de operar establecida en la Sección anterior,

$$= \lim_{t_2 \to t_1} \left\{ \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}, \; \frac{y(t_2) - y(t_1)}{t_2 - t_1} \right\}. \tag{III.8}$$

Para encontrar el límite de una diferencia entre dos vectores en dos instantes de tiempo muy próximos entre sí, se debe calcular el límite de cada una de sus componentes en forma separada, como se ilustra a continuación.

$$\vec{v} \overset{\text{def.}}{=} [v_x, v_y], \tag{III.9}$$

$$v_x = \lim_{t_2 \to t_1} \left\{ \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \right\}, \quad \text{(III.10)}$$

$$v_y = \lim_{t_2 \to t_1} \left\{ \frac{y(t_2) - y(t_1)}{t_2 - t_1} \right\}. \quad \text{(III.11)}$$

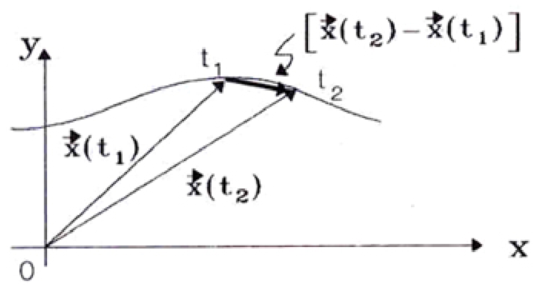


Figura III.9: El vector velocidad es la flecha que une los puntos señalados por t_1 y t_2. En el límite estos dos puntos se tienden a confundir y la velocidad instantánea corresponde a la tangente a la curva en dicho punto.

III.3.3. Aceleración

Tal como en este caso estudiado, para calcular la *aceleración* debemos considerar el cambio que experimenta cada una de las componentes del vector velocidad entre dos instantes muy próximos.

$$\vec{a} \stackrel{\text{def.}}{=} [a_x, a_y], \quad \text{(III.12)}$$

$$a_x = \lim_{t_2 \to t_1} \left\{ \frac{v_x(t_2) - v_x(t_1)}{t_2 - t_1} \right\}, \quad \text{(III.13)}$$

$$a_y = \lim_{t_2 \to t_1} \left\{ \frac{v_y(t_2) - v_y(t_1)}{t_2 - t_1} \right\}. \quad \text{(III.14)}$$

III.4. VELOCIDAD RELATIVA

Antes de proseguir con la aceleración estudiaremos el *movimiento relativo* o, en otras palabras, la *velocidad relativa*. Un ejemplo típico de movimiento relativo, es el caso de una persona caminando sobre la cubierta de un barco. Su velocidad con respecto (*velocidad relativa*) al barco se puede determinar usando las definiciones dadas anteriormente, tomando como *sistema de referencia* el barco. Ahora, para un observador ubicado en la orilla, la velocidad del pasajero, *relativa a la orilla*, es diferente, pues debe *sumar* a la velocidad del pasajero relativa al barco, la velocidad del barco mismo. La suma **vectorial** de estas velocidades es la velocidad del pasajero con respecto a la orilla.

Hay tres cosas que conviene destacar:

• Al definir el vector posición en la sección anterior, nos dimos un origen, un punto de referencia con respecto al cual medimos. Esto es lo que llamamos el *sistema de referencia*. En el ejemplo del barco, el sistema de referencia estaba dibujado en la cubierta misma del barco.

• Cuando hablamos de velocidad (o rapidez) debemos indicar el sistema de referencia con respecto al cual estamos midiendo la velocidad. En este sentido empleamos la palabra *velocidad relativa*. En estricto rigor, todas las velocidades son relativas, pero en la práctica, se emplea la palabra *relativa* cuando hay más de un sistema de referencia que interviene explícitamente en el problema al que nos referimos. En el ejemplo anterior, los dos sistemas de referencia son: el barco y la orilla (o tierra firme).

• Finalmente, el punto más importante: hemos *supuesto* que la velocidad del pasajero con respecto a la orilla es la suma vectorial de la velocidad del barco con respecto a la orilla más la velocidad del pasajero con respecto a la cubierta. Esta suposición, que pertenece a Galileo Galilei, se ve confirmada con la experiencia cotidiana, y es la que nosotros adoptaremos en este texto.

Es importante insistir que este último punto es –como ya se hizo notar– una *suposición*, cuya validez debe decidirse a través de un experimento. En la actualidad sabemos que es una *excelente aproximación* para los casos en los cuales las velocidades relativas son muy pequeñas comparadas con la velocidad de la luz. Esto es lo que ocurre en la vida diaria.

La teoría de la relatividad especial de Albert Einstein establece otra expresión para la suma de velocidades. Ambas expresiones coinciden para el caso de velocidades pequeñas comparadas con la velocidad de la luz, 300.000 km/s.

En este texto nos ocuparemos de aquellos casos en los cuales las velocidades involucradas son bajas.

Estos últimos comentarios pretenden destacar la importancia de juzgar en forma crítica las suposiciones que se utilizan al construir una teoría y la necesidad de su verificación experimental, en diversas circunstancias, para determinar su rango de validez.

Ejemplo

La corriente de un canal tiene una velocidad de 10 km/h en dirección Este. Un transbordador navega en una dirección de 30° Nor–oeste con una velocidad de 20 km/hora *con respecto* a la corriente del canal. ¿Cuál es la velocidad y dirección del transbordador según un observador situado en la ribera?

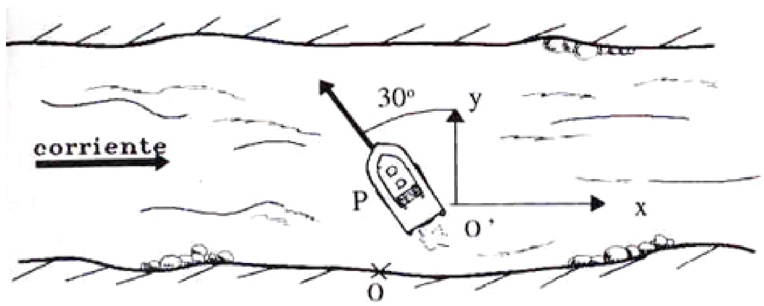


Figura III.10: Con este problema aparecen las velocidades relativas. La Figura describe la situación del transbordador en el río y las distintas velocidades relevantes para este ejercicio.

En este esquema, el transbordador está representado por el rectángulo P. Hemos supuesto que el punto O'se mueve **junto** con la corriente del canal. A ésta le hemos asociado un sistema de referencia (x, y) *imaginario* que, por supuesto, se mueve junto con la corriente, siempre con el eje O'X, paralelo a la orilla del canal y el eje O'Y, perpendicular a la ribera. La posición del transbordador con respecto al observador parado en la ribera, al cual identificamos con el punto O, está dada, en cualquier instante, por el vector:

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'P} \tag{III.15}$$

$\overrightarrow{OP}$: posición del transbordador con respecto al observador en la orilla.

$\overrightarrow{OO'}$: posición del punto O'que se desplaza junto con la corriente del canal, tal como lo ve el observador O en la orilla.

$\overrightarrow{O'P}$: desplazamiento del transbordador con respecto al sistema de coordenadas fijo a la corriente del canal: $(O'X, O'Y)$.

Los tres vectores mencionados cambian de dirección y magnitud en el tiempo.

$\overrightarrow{OO'}$: cambia porque la corriente se desplaza con respecto a la orilla.

$\overrightarrow{O'P}$: cambia solamente de *magnitud*, si hemos elegido el punto Oácertadamente. En este caso, el transbordador se desplaza con respecto a la corriente del canal pero su *dirección permanece constante*, como lo afirma el enunciado. Podemos imaginar una balsa llevada río abajo arrastrada por la corriente. Un observador parado en esa balsa observa que el barco se aleja siempre en la dirección indicada en el enunciado.

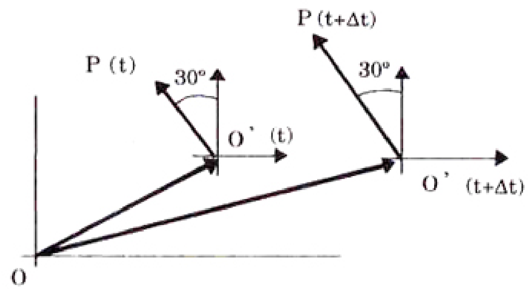


Figura III.11: Los vectores posición definidos en el problema cambian en el tiempo. La diferencia entre dos posiciones consecutivas divida por el tiempo define la velocidad de cada uno de los puntos especificados.

Ya hemos visto cómo se define velocidad en dos dimensiones. Apliquemos esa definición aquí. Comencemos descomponiendo el vector $\overrightarrow{OP}$:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P},$$

enseguida calculamos la velocidad del transbordador con respecto a la orilla:

$$\vec{v}_{\text{transb/ orilla}} = \lim_{\Delta t \to 0} \left\{ \frac{\overrightarrow{OP}\,(t+\Delta t) - \overrightarrow{OP}\,(t)}{\Delta t} \right\}, \tag{III.16}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_{\text{transb/ orilla}} &= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\overrightarrow{OO'}\,(t'+\Delta t') - \overrightarrow{OO'}\,(t')}{\Delta t'} \right) + \\ &+ \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\overrightarrow{O'P}\,(t+\Delta t) - \overrightarrow{O'P}\,(t)}{\Delta t} \right). \end{aligned} \tag{III.17}$$

En el último paso hemos usado la siguiente propiedad: el límite de una suma es igual a la suma del límite de los sumandos.

También hemos usado t' en lugar de t al derivar el vector $\overrightarrow{OO'}$ para indicar que estamos derivando con respecto al tiempo medido por un observador en el transbordador. Galileo supuso que el tiempo transcurre igualmente en cualquiera de los dos sistemas, O

y O', y de esta forma es posible reemplazar t' por t, el tiempo medido por un observador en reposo en la orilla del canal. Como ya señalamos, esta suposición es falsa, pero sus efectos son despreciables cuando las velocidades relativas son muy pequeñas comparadas con la velocidad de la luz.

$$\vec{v}_{transb/orilla} = \vec{v}_{transb/corriente} + \vec{v}_{corriente/orilla} \tag{III.18}$$

Esta regla de composición es fácil de memorizar: es idéntica a la multiplicación de una fracción por la unidad: $\frac{a}{b} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b}$.

$$\frac{\text{transb}}{\text{orilla}} = \frac{\text{transb}}{\text{corriente}} + \frac{\text{corriente}}{\text{orilla}}.$$

Volviendo al ejemplo, reemplazamos en la regla de composición de velocidades los datos del problema y usando la notación de los vectores unitarios, introducida anteriormente tenemos:

$$\vec{v}_{transb/orilla} = (v_t \cos 30^\circ \hat{\jmath} - v_t sen\, 30^\circ \hat{\imath}) + v_{o'} \hat{\imath} \tag{III.19}$$

Recordemos que $\hat{\imath} \equiv$ representa un vector unitario en la dirección positiva del eje O'X, tiene magnitud 1 ($\equiv$ largo unitario) y $\hat{\jmath} \equiv$ es su equivalente en la dirección O'Y.

Como al sumar vectores se suman las componentes respectivas tenemos que:

$$\vec{v}_{\text{transb / orilla}} = [v_{o'} - v_t \text{sen}\, 30^\circ]\hat{\imath} + v_t cos\, 30^\circ \hat{\jmath}.$$

Resumen

Para desprendernos de la notación usada en el último ejercicio y generalizar estos resultados, supongamos que un objeto A se mueve con respecto a un sistema de referencia que designamos como O', y éste a su vez se mueve con respecto a otro sistema de referencia O.

El vector de posición de A con respecto a O es $\vec{x}_{A/O}$, y referido al sistema O' es:

$$\vec{x}_{A/O} = \vec{x}_{A/O'} + \vec{x}_{O'/O}. \tag{III.20}$$

Derivando esta ecuación con respecto a t, obtenemos la ley de velocidades relativas:

$$\vec{v}_{A/O} = \vec{v}_{A/O'} + \vec{v}_{O'/O}. \tag{III.21}$$

A su vez derivando esta ecuación con respecto al tiempo encontramos la ley de composición de las aceleraciones:

$$\vec{a}_{A/O} = \vec{a}_{A/O'} + \vec{a}_{O'/O}. \tag{III.22}$$

Esta última deducción de la ley de composición de velocidades, es general. Demuestra que mantiene su forma aún en la presencia de aceleraciones relativas entre los distintos sistemas de referencia.

III.5. PRINCIPIO DE SUPERPOSICION

Usaremos el ejemplo del transbordador analizado en la sección anterior para ilustrar el Principio de Superposición.

Supongamos que nos damos un intervalo arbitrario, por ejemplo una hora (por ser más útil) y en este intervalo realizamos un experimento pensado: imaginamos que la corriente del canal se detiene y calculamos el desplazamiento del barco sujeto a esa condición. En esa situación, el barco se desplaza 20 km, desde O'hasta el punto Pén el transcurso de la hora.

Enseguida –y siempre en nuestra imaginación– dejamos fluir la corriente del canal pero ahora suponemos que el barco no se propulsa, simplemente flota arrastrado por dicha corriente. En este caso, el desplazamiento debido al arrastre del canal, actuando también durante una hora, lleva al barco desde el punto P'hasta P (10 km hacia la derecha), como mostramos en la Figura.

El *desplazamiento total* durante esa hora es la superposición de ambos desplazamientos: el vector de O hasta P. Además, como el desplazamiento ocurrió en una hora, este vector representa también la velocidad del barco con respecto al observador ubicado en la orilla, medida en km/h.

Lo que hicimos fue *SUPERPONER* los dos movimientos, congelando uno primero y después el otro. Hemos supuesto que el resultado de esta operación, que sólo se puede realizar en la imaginación, arroja los mismos resultados que en la realidad donde ambos movimientos ocurren simultáneamente. Esta es, sin duda una suposición que confirma la experiencia (es decir, que da resultados semejantes a los que se obtienen haciendo el experimento correspondiente). Denominamos esta hipótesis, el **PRINCIPIO DE SUPERPOSICION**.

En forma algebraica este principio se materializa en la ley de composición de velocidades escrita anteriormente:

$$\vec{v}_{A/O} = \vec{v}_{A/O'} + \vec{v}_{O'/O},$$

el primer término indica lo que sucede en el sistema O', y el segundo lo que ocurre en el sistema O, y el resultado final es la suma (superposición) de ambos.

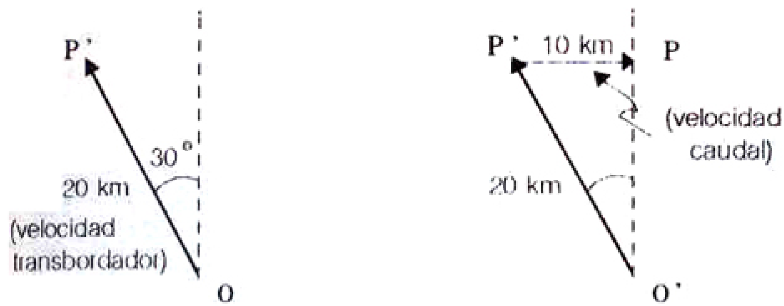


Figura III.12: Superposición de los movimientos del caudal y del barco. Hemos supuesto que el movimiento en una de las direcciones no afecta en absoluto al movimiento que se realiza simultáneamente en la dirección perpendicular.

Otra forma –equivalente a la anterior– de establecer este principio es la siguiente:

El Principio de Superposición nos garantiza que el movimiento en la dirección $\hat{\imath}$ no altera las leyes que rigen el movimiento en la dirección $\hat{\jmath}$, y viceversa. Por lo tanto ambos movimientos pueden ser analizados en forma separada.

Enunciado de esta manera, el principio de superposición tiene aplicación inmediata en la resolución de problemas en dos (o más) dimensiones.

III.5.1. Caída libre (dos dimensiones)

En los tiempos de Galileo, la idea que un movimiento arbitrario se pudiera estudiar como la *superposición* de dos movimientos independientes, que no se influencian entre sí era absolutamente nueva y de hecho todo un descubrimiento. Para ilustrarlo, reproducimos brevemente un párrafo de su libro *Dos Nuevas Ciencias*:

> *Supongamos una partícula que se desplaza con velocidad uniforme sobre la superficie de un plano hasta que llega al extremo, donde al abandonar dicho punto, adquiere* **además** *de su movimiento previo, una inclinación a caer hacia el centro de la tierra, debido a su propio peso; de forma que el* **movimiento resultante** ...**está compuesto** *por un desplazamiento, el cual es uniforme y horizontal y el otro vertical y naturalmente acelerado*

Con las palabras *movimiento resultante* y *está compuesto*, Galileo estableció su *Hipótesis* de trabajo. En su opinión, la validez de esta hipótesis se basaba en su *simplicidad* y en el hecho que sus predicciones *concordaban con las observado en la vida diaria.*

En el ejercicio anterior la hemos usado al afirmar que el movimiento del barco es la suma de sus dos desplazamientos y que éstos no interfieren entre sí.

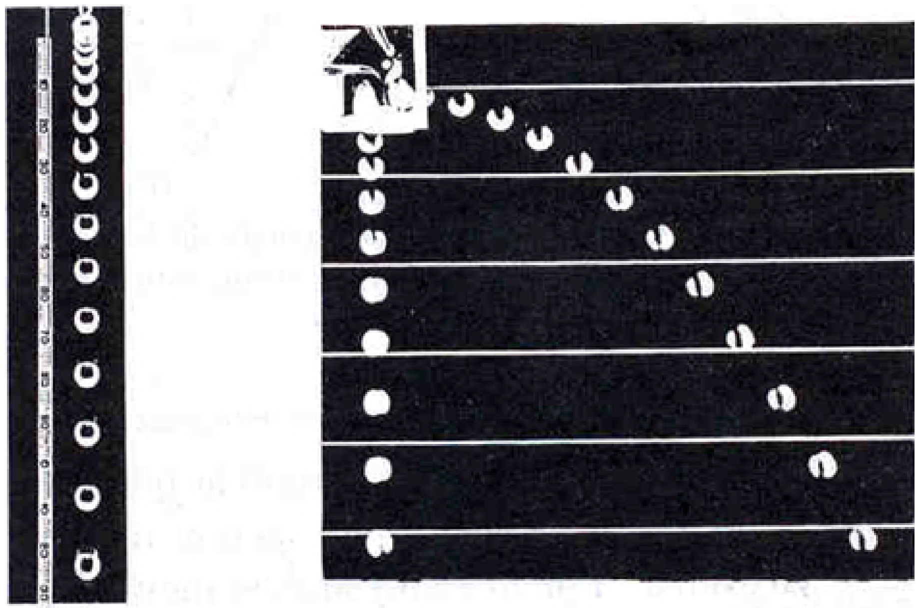


Figura III.13: A la izquierda se superponen las fotografías de la caída libre de un cuerpo. A la derecha se muestra el caso de un movimiento parabólico, considerado como la superposición de dos movimientos independientes: uno horizontal con velocidad constante y la caída libre.

La Figura [III.13] muestra una pelota en caída libre. La foto permite calcular el camino recorrido entre cada destello puesto que éstos ocurren a intervalos iguales.

En la misma Figura se incluye una foto que compara la caída libre de un cuerpo con el movimiento parabólico que describe una partícula que tiene inicialmente una velocidad horizontal.

Antes de Galileo, los filósofos habían dedicado mucho tiempo intentando explicar el *origen* de este movimiento. Galileo centró su interés en su *descripción*. Para ello elaboró un argumento sencillo y directo.

El movimiento parabólico cuya secuencia aparece en la fotografía, Galileo lo analizó como una superposición de dos componentes: una era la tendencia *natural* de los cuerpos a mantener su velocidad (Ley de Inercia) y por lo tanto el cuerpo mantenía su desplazamiento horizontal después de abandonar el borde de la mesa y la otra componente era la caída libre. Ambos movimientos se *superponen* simultáneamente y dan origen al *movimiento parabólico* (la curva que describe la pelota es una parábola). Galileo fue el primero en descomponer de esta forma la trayectoria de un cuerpo en caída libre en dos dimensiones.

Una vez aceptado que este movimiento es una superposición de dos desplazamientos que ocurren simultáneamente, continuamos con la descripción cuantitativa del movimiento en dos dimensiones.

Para comenzar debemos especificar el sistema de referencia con respecto al cual referimos los vectores posición, velocidad y aceleración usados en la cinemática de dos dimensiones.

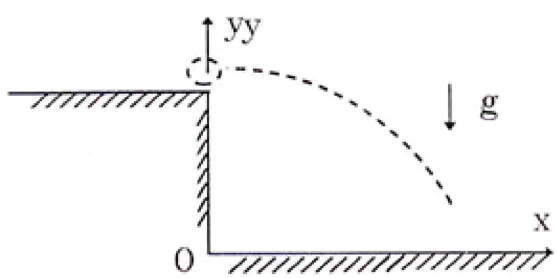


Figura III.14: Definimos el instante inicial cuando la partícula se encuentra justo al borde del precipicio y con una velocidad que apunta en la dirección positiva del eje **x**. El origen de coordenadas se ubica en O.

Sabemos que éste se puede descomponer en la superposición de dos movimientos independientes, en consecuencia las fórmulas que debemos usar en *cada una de las direcciones* corresponden a las ya conocidas para el movimiento acelerado en una dimensión. A continuación las escribimos explícitamente.

COMPONENTE–X:

$$x(t) = x_0 + (v_0)_x \cdot t + \frac{1}{2} a_x t^2 \tag{III.23}$$

$$v_x(t) = (v_0)_x + a_x \cdot t \tag{III.24}$$

$$v_x^2 - (v_0)_x^2 = 2a_x \cdot (x - x_0) \tag{III.25}$$

COMPONENTE–Y:

$$y(t) = y_0 + (v_0)_y t + \frac{1}{2} a_y \cdot t^2 \tag{III.26}$$

$$v_y(t) = (v_0)_y + a_y \cdot t \tag{III.27}$$

$$v_y^2 - (v_0)_y^2 = 2a_y(y - y_0) \tag{III.28}$$

En el caso de una partícula cayendo por el borde de una mesa, como se indica en la Figura, estas cantidades toman los siguientes valores:

$$\vec{v}_0 = [v_0, 0], \quad \vec{x}_0 = [0, h], \quad \vec{a} = [-g, 0].$$

Introduciendo estos valores en las ecuaciones anteriores, obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= v_0\, t \\ v_x(t) &= v_0 \end{aligned}\right\} \quad \text{Componente–X}$$

$$/$$

$$\left.\begin{aligned} y(t) &= h - \tfrac{1}{2} g \cdot t^2 \\ v_y(t) &= -g \cdot t \\ v_y^2 &= -2\, g \cdot (y - h) \end{aligned}\right\} \quad \text{Componente–Y}$$

Con estas ecuaciones escritas, ya estamos preparados para resolver un problema. Inventemos un enunciado que combine con la Figura hecha anteriormente:

Ejemplo

Un bombardero vuela con una velocidad horizontal v_0, constante, y a una altura h dirigiéndose directamente hacia su objetivo.

¿A qué distancia L el piloto debe *soltar* la bomba, para alcanzar el blanco asignado? Exprese su respuesta en función del ángulo ϕ.

Nota:

Al decir que *suelta* la bomba, estamos aclarando que, en el instante que se deja libre, la bomba tiene la *misma* velocidad que el bombardero .

Queremos saber en qué momento el piloto debe accionar el mecanismo para que la bomba, considerada como una partícula puntual sin fricción, comience su caída parabólica y dé en el objetivo.

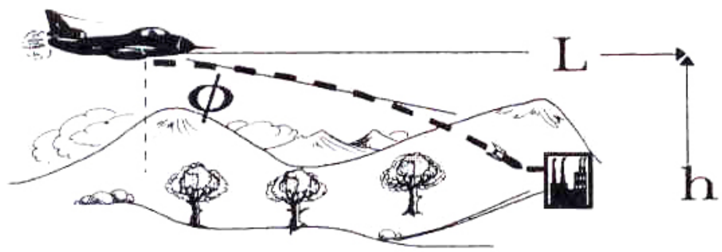


Figura III.15: Para esta situación se desea encontrar el valor del ángulo que debe medir el artillero para saber cuando accionar el misil. Este es, conceptualmente, el mismo problema que aquel de una partícula cayendo del borde de una mesa con una velocidad inicial.

Cabe notar que el considerar la bomba como una partícula es una mala aproximación. En realidad, deberíamos considerar la viscosidad del aire y la presencia de las aletas que permiten planear al misil, para calcular correctamente el punto donde tocará tierra. Esta es una primera aproximación, la más simple, a este problema típico.

La Figura correspondiente a este problema es, salvo detalles, igual a la anterior, donde se examinó la caída de un objeto puntual desde el borde de una mesa. El problema es el mismo y, en consecuencia, las ecuaciones son las mismas.

Nos interesa conocer el ángulo ϕ, tal que $\tan\phi = \dfrac{L}{h}$

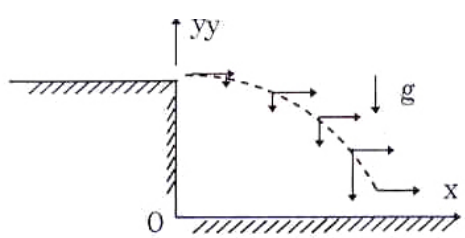


Figura III.16: La bomba sigue una trayectoria parabólica, tal como el movimiento de caída libre de un objeto puntual. Esta es una primera aproximación.

De la componente horizontal x, tenemos:

$$\begin{aligned} x = &\quad v_0\, t \\ \Downarrow & \\ L = &\quad v_0\, T. \end{aligned}$$

Pero, en el mismo instante T, la bomba, de acuerdo al sistema de referencia elegido, alcanza $y = 0$, entonces:

$$0 = h - \frac{1}{2}\, g\, T^2.$$

De aquí , obtenemos:

$$T = \left\{ \left[\frac{2h}{g} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Examinando las dimensiones, vemos que T tiene las dimensiones de tiempo:

$$T = \left\{ [L] \frac{[T^2]}{[L]} \right\}^{\frac{1}{2}} = [T]$$

Como h y g son datos, T es conocido. Reemplazando en L:

$$\begin{aligned} L &= v_0 \left[\frac{2h}{g} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \Rightarrow \tan\phi &= \frac{L}{h} = \left[\frac{2 v_0^2}{g h} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Analicemos ahora las dimensiones:

$$[v_0^2] = \left[\tfrac{L^2}{T^2} \right] \qquad\qquad [g \cdot h] = \left[\frac{L}{T^2} \cdot L \right]$$

$$\Rightarrow \left[\frac{2\, v_0^2}{g\, h} \right]^{\frac{1}{2}} \qquad\qquad \text{no tiene dimensiones,}$$

como corresponde, puesto que $\tan\phi$ es adimensional.

Al trabajar en dos dimensiones, no se necesita memorizar más fórmulas que las ya conocidas en una dimensión. Lo que se debe hacer es escribir las mismas fórmulas anteriores en forma *vectorial*:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot t^2 \tag{III.29}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t \tag{III.30}$$

$$\Longrightarrow \qquad v^2 - v_0^2 = 2 a_x\, (x - x_o) + 2 a_y\, (y - y_o) \tag{III.31}$$

$$\begin{aligned}
\vec{x} &= [x(t), y(t)], && \text{(III.32)}\\
&\quad \text{posición de la partícula en el instante t,} \\
\vec{x}_0 &= [x(0), y(0)], && \text{(III.33)}\\
&\quad \text{posición inicial de la partícula,} \\
\vec{v}_0 &= [(v_0)_x, (v_0)_y], && \text{(III.34)}\\
&\quad \text{velocidad de la partícula en el instante inicial,} \\
\vec{v} &= [v_x(t), v_y(t)], && \text{(III.35)}\\
&\quad \text{velocidad de la partícula en el instante t,} \\
\vec{a} &= [a_x, a_y], && \text{(III.36)}\\
&\quad \text{componentes de la aceleración } \textit{constante.}
\end{aligned}$$

Ejemplo (Revista **Quantum**, Sep.– Oct. 1992, pág 16.)

Dos atletas están parados en los puntos A y B, sosteniendo una cuerda elástica. A una señal, el corredor A se mueve en dirección Este (eje–x) con una velocidad v_o y el corredor B se desplaza hacia el sur (eje–y) con *aceleración constante*. Ambos atletas mantienen su movimiento a lo largo del eje x y el eje y sin desviarse.

La razón $|AC|/|CB| = 1/4$ fija la posición del punto C en la cuerda al inicio del movimiento.

Determine el valor de esta aceleración, si sabemos que el nudo C de la cuerda elástica pasa por el punto D, cuyas coordenadas son ℓ y h (ver Figura).

Tomamos como origen del eje de coordenadas el punto A. La coordenada y apunta hacia el borde inferior de la página. Los puntos A, B y C se identifican mediante los subíndices a, b y c.

La distancia entre los puntos A y B *no* es constante, puesto que la cuerda es elástica.

Vamos a suponer que *la cuerda se estira uniformemente*, es decir, la razón entre la distancia de C a cada uno de los extremos A y B permanece *constante* durante el movimiento. Su valor es $|AC|/|CB| = 1/4$.

Antes de comenzar a calcular, analicemos qué es lo que se pide. Debemos encontrar la trayectoria del punto C, de forma que pase por D, cuyas coordenadas son conocidas. Como el atleta B tiene una aceleración constante, el punto C también la tiene, y debemos

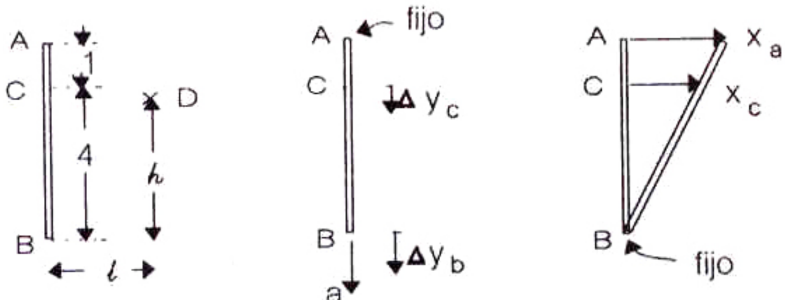


Figura III.17: Los atletas estiran la cuerda *uniformemente* de forma que el punto C, pasa por el punto D. A la derecha se incluyen dos figuras: en una se suprime el movimiento horizontal y en la otra el movimiento vertical.

calcularla. De igual forma, el punto C, debido a la velocidad de A, también tiene una velocidad horizontal, que a su vez debemos encontrar en base a los datos. Con estas cantidades establecidas: la aceleración vertical de C y su velocidad horizontal, el ejercicio se reduce a calcular la trayectoria de una partícula de forma que pase por un punto pre–establecido, D. Para ello podemos regular la aceleración vertical de B solamente.

Como se señala en la Figura, usaremos el *Principio de Superposición* para resolver este problema. Para ello desconectamos uno de los movimientos: el del atleta A, es decir, consideramos sólo el movimiento en la dirección y. Designamos v_a como la velocidad del punto A. Con esta suposición tenemos $v_a \equiv v_o = 0$.

El objetivo del cálculo que haremos a continuación es encontrar la relación entre las aceleraciones de los puntos C y B.

Las posiciones de cada uno de los puntos de la cuerda están relacionadas por la fórmula de la aceleración constante:

$$\begin{aligned} y_c(t) &= y_c(0) + \tfrac{1}{2}\, a_c\, t^2 \\ y_b(t) &= y_b(0) + \tfrac{1}{2}\, a_b\, t^2, \end{aligned}$$

donde a_c y a_b son las aceleraciones verticales de los puntos A y B. Del enunciado se desprende que $a_a = 0$, puesto que se mueve sobre el eje horizontal.

Como la cuerda se estira uniformemente, la razón entre sus posiciones permanece constante en el tiempo:

$$\frac{y_c(t)}{y_b(t)} = \frac{y_c(0)}{y_b(0)} = \frac{|AC|}{|AC| + |CB|} = \frac{1}{1+4} = \frac{1}{5}.$$

Donde hemos usado que $|AC|/|CB| = 1/4$. Con esta información podemos encontrar las relaciones entre las coordenadas de C y B y sus respectivas aceleraciones. Después de reordenar la última expresión, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{y_c(t)}{y_c(0)} &= \frac{y_b(t)}{y_b(0)} \quad \text{y componiendo la fracción,} \\
\frac{y_c(t)-y_c(0)}{y_c(0)} &= \frac{\frac{1}{2}\,a_c\,t^2}{y_c(0)} = \frac{y_b(t)-y_b(0)}{y_b(0)} = \frac{\frac{1}{2}\,a_b\,t^2}{y_b(0)},
\end{aligned}$$

donde usamos la ecuación de movimiento, para los puntos C y B, escrita anteriormente. Finalmente esto se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
\frac{\dfrac{1}{2}\,a_c\,t^2}{y_c(0)} &= \frac{\dfrac{1}{2}\,a_b\,t^2}{y_b(0)} \\
\frac{a_c}{a_b} &= \frac{y_c(0)}{y_b(0)} = \frac{1}{5},
\end{aligned}$$

$$a_c = \frac{1}{5}a_b. \tag{III.37}$$

Donde a_b es la aceleración que debemos regular para que C pase por el punto D.

Ahora, en el siguiente paso en la aplicación del Principio de Superposición, anulamos la aceleración vertical $a_b = 0$ y ponemos $v_o \neq 0$, es decir, conectamos sólo el movimiento horizontal.

De la Figura es fácil ver que:

$$\begin{aligned}
\frac{x_a}{|AB|} &= \frac{x_c}{|BC|} \Rightarrow \frac{x_a}{x_c} = \frac{|AB|}{|BC|}, \\
x_c &= \frac{|BC|}{|AB|}\,x_a = \frac{4}{5}\,x_a.
\end{aligned}$$

Como la velocidad es constante,

$$\frac{x_c - 0}{\Delta t} \equiv v_c = \frac{4}{5}\,\frac{x_a - 0}{\Delta t} = \frac{4}{5}\,v_o.$$

En resumen usando el Principio de Superposición y la hipótesis de elongación uniforme de la cuerda, hemos logrado encontrar la velocidad horizontal de C, v_c y su aceleración vertical (Norte–Sur) en función de la aceleración de B: a_b.

Para determinar el valor que debe tomar a_b, usemos el dato que C cruza el punto D, es decir, en un cierto instante τ

$$x_D = \tfrac{4}{5}\, v_o\, \tau = \ell, \quad \text{y}$$

$$y_D = \tfrac{1}{2}\, a_c\, \tau^2 = \tfrac{1}{10}\, a_b\, \tau^2 = h.$$

Despejando τ y a_b de estas dos ecuaciones,

$$a_b = \frac{10\, h}{\left[\dfrac{5\,\ell}{4\, v_o}\right]^2} = \frac{32}{5}\, \frac{h\, v_o^2}{\ell^2}.$$

Este es el valor buscado para la aceleración del atleta B.

Ejercicio

a) Verifique que el resultado anterior tiene las dimensiones correctas.
b) Resuelva este mismo problema sin usar el Principio de Superposición. □

Ejemplo

En el problema de la figura, [III.18], se pide calcular la máxima distancia Δ que un objeto puede alejarse del borde del precipicio para evitar ser alcanzado por los objetos lanzados desde el punto A. La velocidad de lanzamiento es v_0 y la distancia de A hasta el borde del precipicio es L y h su altura.

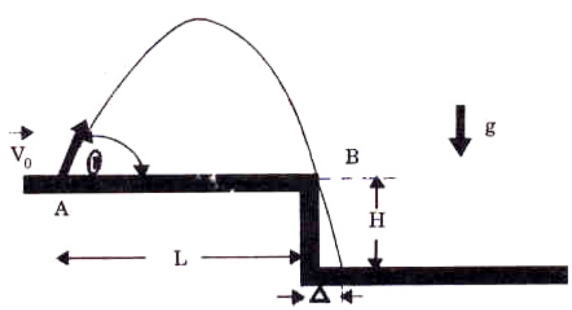


Figura III.18: En este problema debemos imponer la condición que la partícula cruce (o apenas toque) el borde del precipicio. De las dos soluciones que existen, una sola de ellas corresponde al máximo de Δ.

Datos
$v_0 = |\vec{v}_0|$, g, L y H conocidas.

$\theta = ?$

Debemos calcular θ de forma que el proyectil se aproxime lo más posible al punto B.

Método

i) Calculamos θ de forma que el proyectil pase justo por B (puesto que necesitamos conocer el valor mínimo de Δ)

ii) Una vez conocido θ, calculamos Δ.

En el primer punto, es relativamente simple adelantar la relación que existirá entre las variables conocidas del problema L y v_0, usando análisis dimensional.

$$[L] = \left[\frac{v_0^2}{g}\right].$$

$\Rightarrow L \propto \dfrac{v_0^2}{g}$, sospechamos que para reemplazar el signo *proporcional* por una igualdad se debe incluir el otro parámetro que afecta la respuesta: el ángulo θ, ya que $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\operatorname{sen}2\theta, \ldots$ son adimensionales.

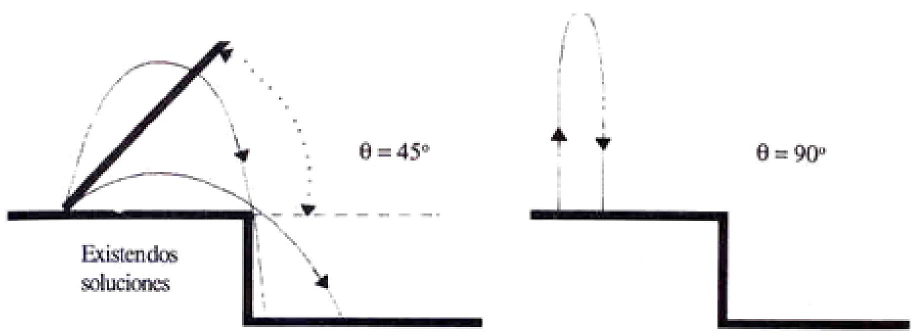


Figura III.19: La Figura indica las distintas posibilidades que pueden ocurrir dependiendo del valor del ángulo de lanzamiento. No aparece $\theta = 0$, que equivale a enviar la bomba rodando por el piso...

Solución:

$$\begin{aligned}
\text{Componente} \quad x: \quad x &= (v_0 \cos\theta)t \\
\text{Componente} \quad y: \quad y &= (v_0 \operatorname{sen}\theta)t - \tfrac{1}{2}gt^2 \\
v_y &= v_0 \operatorname{sen}\theta - g\,t \\
v_y^2 - v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta &= -g(y-o)
\end{aligned}$$

Si nos detenemos a pensar lo que significa que el movimiento sea una superposición de un desplazamiento con velocidad constante hacia la derecha y una caída libre con aceleración $(-g)$, es posible darse cuenta que al tocar B en el instante $t = T$, se debe cumplir que:

$$v_y(T) = -(v_0 \operatorname{sen}\theta).$$

Repase el ejemplo de la caída libre de un objeto.

En ese mismo instante $x(T) = L = T \cdot v_0 \cos\theta$ y usando la ecuación para la velocidad:

$$v_y(T) = -v_0 \operatorname{sen}\theta = v_0 \operatorname{sen}\theta - g\,T$$

$$2\,v_0 \operatorname{sen}\theta = g\,T = \frac{g\,L}{v_0 \cos\theta}$$

De forma que:

$$(*) \qquad \operatorname{sen} 2\theta = \frac{g\,L}{v_0^2}, \qquad\qquad L = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\,\theta}{g}.$$

Conviene examinar mejor la fórmula $(*)$. Al graficar la función $\operatorname{sen}\alpha$ vs. α vemos que $\operatorname{sen}\alpha$ toma su valor máximo en $\alpha = \pi/2$ de modo que si g y v_0 permanecen inalterados y nos permitimos cambiar θ, el máximo alcance se produce cuando $2\theta = \pi/2 \Rightarrow \theta = \pi/4$.

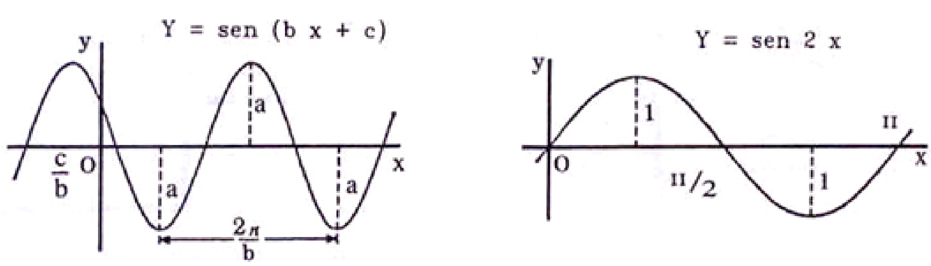


Figura III.20: Gráfico del seno del ángulo doble. Esta Figura indica que el ángulo de mayor alcance corresponde a 45 grados. En ese caso b= 2, c = 0 y a= 1.

Resumiendo: dado g, L y v_0^2, usando la ecuación $(*)$ podemos determinar el ángulo θ de lanzamiento.

Ahora comenzamos la segunda etapa: el cálculo de Δ

Notemos que : $L + \Delta = x$, en el instante τ. Pero $y(\tau) = -H$, puesto que durante la trayectoria no cambia el valor de la aceleración,

$$\begin{aligned} L + \Delta = & \quad v_{ox} \cdot \tau, \\ -H = & \quad v_{oy}\, \tau - \tfrac{1}{2}\, g\, \tau^2, \end{aligned}$$

Hemos escrito dos ecuaciones independientes y contienen dos incógnitas: Δ, τ. Despejando estas dos incógnitas, obtenemos:

$$\tau^2 - \left(2 \frac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}\right) \tau - \frac{2\, H}{g} = 0$$

$$\begin{aligned} \tau = & \quad \frac{1}{2} \left[\frac{2 v_0 \operatorname{sen}\theta}{g} \pm \left(\frac{4\, v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{g^2} + \frac{8\, H}{g} \right)^{1/2} \right], \\ \tau = & \quad \frac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{g} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2\, H\, g}{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}} \right] \\ \Delta = & \quad \tau\, v_{0\,x} - L \\ \Delta = & \quad \frac{L}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2\, H\, g}{\frac{g\, L \operatorname{sen}\theta}{2\, \cos\, \theta}}} \right] - L \\ \Delta = & \quad \frac{L}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{4\, H}{L\, \tan\, \theta}} - 1 \right]. \ \square \end{aligned}$$

Esta es la distancia máxima que podemos alejarnos de la base del precipicio. La cantidad entre corchetes en la fórmula anterior no tiene dimensiones.

Otra forma de obtener el mismo resultado

$$\begin{aligned} L + \Delta = & \quad v_{ox} \cdot \tau, & \text{(eje x)} \\ -2g(-H - o) = & \quad v_{f\,y}^2 - [v_0 \operatorname{sen}\theta]^2. & \text{(eje y)} \end{aligned}$$

De esta última ecuación obtenemos el tiempo τ que tarda en llegar al fondo del precipicio.

$$v_f|_y = -[(v_0 \operatorname{sen}\theta)^2 + 2\,g\,H]^{1/2}.$$

El signo menos proviene del hecho que la raíz cuadrada tiene ambas posibilidades como resultado y el signo de $v_f|_y$ es *negativo* pues apunta en la dirección negativa del eje y.

Pero $v_f|_y = v_{oy} - g\,\tau$

$$g \cdot \tau = v_0 \operatorname{sen}\theta + [(v_0 \operatorname{sen}\theta)^2 + 2\,g\,H]^{1/2},$$

$$\tau = \frac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2\,g\,H}{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}}\,\right].$$

De aquí obtenemos Δ en forma análoga al desarrollo anterior.

III.6. MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

En la sección anterior estudiamos el caso de la aceleración constante en *magnitud* y *dirección*. Ahora proseguiremos con otro caso, donde sólo la *magnitud* de la aceleración permanece constante en el tiempo, pero su *dirección varía*.

Este es el caso del *movimiento circular*.

Se trata de una partícula que describe una circunferencia. El caso más simple, y con el cual conviene comenzar es el *movimiento circular uniforme*. El término *uniforme*, indica que la partícula recorre arcos iguales en tiempos iguales, sin importar su ubicación en la circunferencia; en consecuencia demora el mismo tiempo en cada giro completo. Este tiempo se denomina el período T del movimiento.

Para estudiar este movimiento conviene *parametrizar* la circunferencia –asignar un número a cada uno de sus puntos, su coordenada– con el fin de poder identificarlos.

III.6.1. Parametrización

Podemos identificar una curva a través de la función que relaciona x con y: $y = y(x)$. Otra alternativa, consiste en asignar a cada punto de la curva un número único y expresar cada una de las componentes, x e y, en función de este número. Esta es la forma *paramétrica* de describir una curva. El parámetro es precisamente el número asignado a cada punto, que en física es, el tiempo o el largo de la trayectoria recorrida.

Ejemplo

a) Supongamos que una partícula se mueve a lo largo de una línea recta cuya ecuación paramétrica es:

$$\vec{r}_1(t) = [x(t),\, y(t)] = [t+2,\, t]$$

¿Cuál es la ecuación de la trayectoria de esta partícula?

Debemos despejar el parámetro t de esta ecuación para encontrar la relación entre la coordenada x e y.

$$\left.\begin{array}{ll} x(t) & = t+2 \\ y(t) & = t \end{array}\right\} \quad x = y+2, \;\Rightarrow\; y = x-2.$$

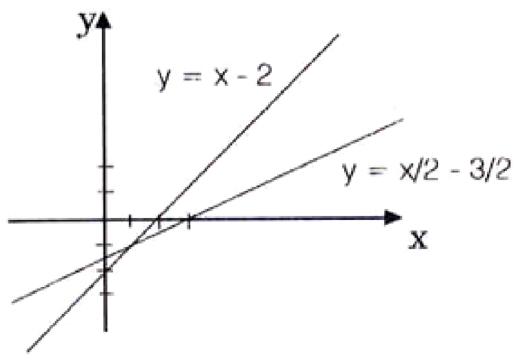


Figura III.21: Se muestra las trayectorias de dos partículas y su punto de encuentro. En este ejemplo las trayectorias son líneas rectas, pero el mismo método es válido también en casos más generales.

b) Encuentre la trayectoria $y = f(x)$, de la siguiente partícula cuya ecuación de movimiento se da –en forma paramétrica–, a continuación:

$$\vec{r}_2(t) = [x_2(t), y_2(t)] = [3+2t, t],$$

La ecuación de la trayectoria se obtiene, al igual que el caso anterior, eliminando t de las dos ecuaciones paramétricas dadas. El resultado es:

$$x = 3+2y, \quad \text{o, de otra forma:} \quad y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}.$$

c) Supongamos ahora que el parámetro t corresponde, efectivamente, al tiempo que marca el reloj que acompaña a cada una de las partículas que siguen las trayectorias descritas arriba. Si los relojes de ambos observadores están sincronizados, encuentre la posición de ambas partículas en el instante $t = 0$. Además, encuentre el instante t en que ellas chocan.

En el instante $t = 0$, las partículas se ubican en:

$$\begin{array}{ll} \text{Partícula } 1: & x_1 = 2 \quad y_1 = 0, \\ \text{Partícula } 2: & x_2 = 3 \quad y_2 = 0. \end{array}$$

Cuando se encuentran, como ambas partículas tienen sus relojes sincronizados, el tiempo que marca cada uno de ellos debe coincidir. Lo mismo sucede con las coordenadas, puesto que deben ocupar el mismo punto del plano simultáneamente. Esta es la definición matemática de choque entre dos partículas.

De este modo, debe cumplirse que:

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2, \text{ en el instante } t = \tau.$$

Examinando esta condición en la coordenada–x, tenemos:

$$x_2 = 3 + 2\tau = x_1 = \tau + 2$$

y de aquí se obtiene:

$$2\tau + 3 = \tau + 2, \qquad \tau = -1.$$

Compruebe que la ecuación para la coordenada–y, no aporta información.

El punto donde ambas partículas se encuentran tiene coordenadas:

$$x_1 = x_2 = 1, \qquad y_1 = y_2 = -1. \quad \square$$

Ejemplo

Analicemos la parametrización de una circunferencia. Consideramos dos casos:
a) La circunferencia está centrada en el origen de coordenadas.
b) La circunferencia está centrada en un punto del eje x.

La ecuación de una circunferencia es:

$$x^2 + y^2 = a^2. \tag{III.38}$$

Podemos parametrizar esta Figura usando el ángulo que forma el vector que apunta hacia un punto arbitrario de la circunferencia y el eje–x. Para esto procedemos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cos\theta, \\ y(t) &= a \,\mathrm{sen}\,\theta, \end{aligned} \tag{III.39}$$

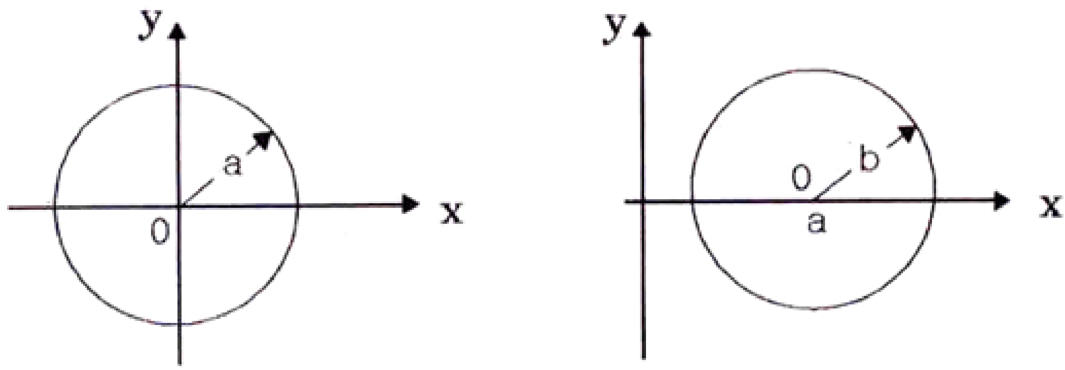


Figura III.22: Aparecen las dos circunferencias que se desea parametrizar. Una de ellas centrada en el origen y la otra en un punto arbitrario del eje x.

donde $\theta \; \varepsilon \; [0, 2\,\pi]$, es el parámetro que determina cada punto de la curva. En otras palabras, para cada valor del ángulo θ se asocia un único punto de la circunferencia.

La ecuación de una circunferencia cuyo centro O tiene las coordenadas [a, 0] es:

$$
\begin{aligned}
(x-a)^2 + y^2 &= b^2 \\
x(t) - a &= b\,\cos\,\theta, \\
y(t) &= b\,\mathrm{sen}\,\theta. \square
\end{aligned}
$$

Ejemplo

Otro caso de interés es el de una **Elipse**, que corresponde al movimiento que realizan los planetas en torno al Sol. Su ecuación es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{III.40}$$

La elipse se puede dibujar con una cuerda fija en los puntos F_1 y F_2, y de largo $(r_1 + r_2)$. F_1 y F_2 se denominan los **focos** de la elipse.

La forma paramétrica de esta curva es:

$$x(t) = a\,\cos\,\omega\,t, \qquad\qquad y(t) = b\,\mathrm{sen}\,\omega\,t, \tag{III.41}$$

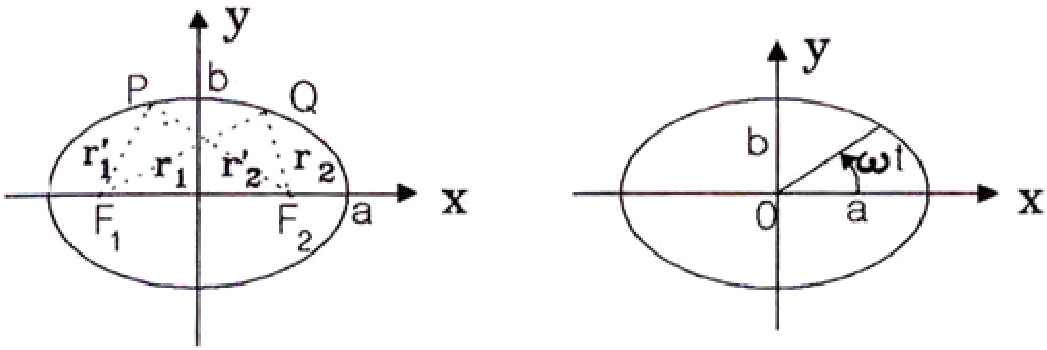


Figura III.23: La definición de la distancia focal y los semiejes a y b aparece indicada en el diagrama. Para diferenciar este ejemplo del anterior, supondremos que una partícula viaja a lo largo de esta elipse y que demora un tiempo T en completar una vuelta alrededor de la elipse.

donde t es un instante de tiempo cualquiera y $\omega = 2\,\pi/T$. T es el tiempo que demora la partícula en realizar una vuelta completa alrededor de la circunferencia. t es el parámetro usado para describir la elipse.

Al final de este capítulo se demuestra que el ángulo indicado en la Figura *no corresponde a la posición que la partícula ocupa en el instante t*. También se indica que, aun cuando ω es constante, la velocidad angular de la partícula, definida por $\dot{\varphi}$, no permanece constante a lo largo de la trayectoria. Esta parametrización de la elipse es directa, pero presenta esta dificultad.

Como se establece en el Apéndice, el argumento de la funciones trigonométricas seno y coseno, debe ser *adimensional*, por esta razón, ω tiene las dimensiones de $1/T$. Al multiplicarla por t produce un número sin dimensiones.

La suma de los largos de r_1 y r_2, indicados en la Figura, permanece constante para cualquier punto de la elipse. Es decir, dados dos puntos arbitrarios de la elipse, se cumple que $r_1 + r_2 = r_1' + r_2'$.

La forma paramétrica de una órbita cualquiera, determina las coordenadas de cada punto de la trayectoria en función del valor que toma el parámetro t. □

III.6.2. Velocidad en el movimiento circular uniforme

Comencemos resolviendo un ejercicio.

Ejemplo

Una partícula recorre una circunferencia con *rapidez constante*, $|\vec{v}_0|$.

a) Calcule la velocidad promedio entre el instante $t = 0$ y $t = 1$.
b) Calcule la velocidad instantánea en $t = 0$.
c) Calcule la velocidad instantánea para un valor arbitrario de t.

Nota

Recordemos que la velocidad es tangente a cada uno de los puntos de la trayectoria, y en este caso específico, tangente a cada uno de los puntos de la circunferencia.

Rapidez constante indica que el módulo del vector velocidad permanece sin variar, pero su dirección cambia. Si retomamos la definición de aceleración: diferencia entre el vector velocidad entre dos puntos dividido por el intervalo transcurrido, podemos darnos cuenta que, por el sólo hecho de cambiar la dirección de la velocidad en cada punto, el vector diferencia no es nulo y, en consecuencia, *existe aceleración*.

Esta es una de las características del *movimiento circular uniforme*; la aceleración aparece únicamente por el *cambio de dirección* de la velocidad. Además, es importante recordar que la dirección de la aceleración siempre *apunta hacia el centro de la circunferencia.* □

Solución

a) El vector $\vec{x}(t)$, que describe la posición de la partícula en cada instante, lo hemos definido como:

$$\vec{x}(t) = [a \cdot \cos \omega\, t, \quad a \cdot \operatorname{sen} \omega\, t].$$

De acuerdo a esta definición, en $t = 0$ la partícula se encuentra justo sobre el punto $x = a$, $y = 0$, en el eje x. Esto es lo que se denomina la condición inicial, la posición del objeto en el instante cuando se comienza a medir el tiempo.

Recordemos que la velocidad media se define como la posición final menos la inicial dividida por el tiempo empleado. Esta definición aplicada a cada una de las componentes de la velocidad, da lo siguiente:

$$\begin{aligned} < \vec{v} >_x &= a\,\frac{(\cos\,\omega - 1)}{1} = a(\cos\,\omega - 1) \\ < \vec{v} >_y &= a \operatorname{sen} \omega. \end{aligned}$$

Notemos que $< v >_x \leq 0$, $\cos\,\omega \leq 1$ (ver Figura).

b) La velocidad instantánea en cualquier punto está representada por la pendiente de la tangente a la curva (a la circunferencia, en este caso). En t=0:

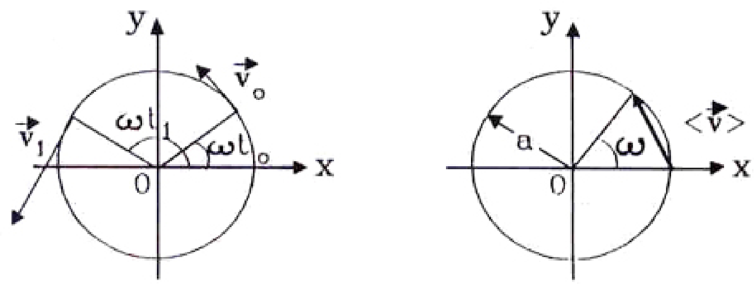


Figura III.24: El traslado a lo largo de una circunferencia es un caso particular de un movimiento en dos dimensiones. A la derecha se indica el vector velocidad promedio entre los instantes t=0 y t=1.

$$\vec{v}_x(t=0) = \lim_{t\to 0} a\,\frac{(\cos\,\omega t - 1)}{t} = a\,\lim_{t\to 0}(\frac{\cos\,\omega t - 1}{t}),$$

si t es muy pequeño, podemos desarrollar la función coseno en la serie de potencias descrita en el Apéndice, y considerar sólo los dos primeros términos de la serie:

$$\cos\,\omega t \simeq 1 - \frac{(\omega t)^2}{2} + ...$$

$$v_x(t=0) = a\,\frac{\omega^2}{2}\,\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{t} = 0.$$

Análogamente, en el eje y,

$$v_y(t=0) = \lim_{t\to 0} a\left(\frac{\operatorname{sen}\omega t}{t}\right) = a\,\lim_{t\to 0}\frac{(\omega t)}{t} = a\cdot\omega$$

c) Calculemos la velocidad en cualquier instante t. Este es un ejercicio similar al anterior, solo aumenta la complejidad matemática del desarrollo. Calcularemos la componente x de la velocidad, el cómputo de v_y será propuesto como ejercicio.

$$v_x = a\,\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\cos\,\omega(t+\Delta t) - \cos\,\omega t}{\Delta t},$$

pero,

$$\cos(\omega t + \omega\Delta t) = \cos(\omega t)\cdot\cos(\omega\Delta t) - \operatorname{sen}(\omega t)\cdot\operatorname{sen}(\omega\Delta t),$$

de aquí tenemos que:

$$\cos(\omega t + \omega\Delta t) - \cos\,\omega t = \cos(\omega t)\cdot[\cos(\omega\Delta t) - 1] - \operatorname{sen}(\omega t)\cdot\operatorname{sen}(\omega\Delta t),$$

finalmente, desarrollando en la última expresión cos $\omega\Delta t$ y sen, $\omega\Delta t$ en serie de potencias y cortando esta serie debido a que $\Delta\, t$ tiende a cero, tenemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\cos(\omega t+\omega\Delta t)-\cos\,\omega t}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t\to 0}\left[-\cos\,\omega t\,\frac{(\omega\Delta t)^2}{2\,\Delta t}-\operatorname{sen}\omega t\,\frac{(\omega\Delta t)}{\Delta t}\right],\\
&= -\omega\operatorname{sen}\omega\, t+\lim_{\Delta t\to 0}(\frac{\omega^2}{2}\,[cos\,\omega t]\cdot\Delta t),\\
&= -\omega\operatorname{sen}\omega\, t.
\end{aligned}$$

Nota

En este último paso hemos usado dos propiedades de los límites que son fáciles de comprobar en casos simples:

- $\lim_{t\to 0} k\cdot A(t) = k\,\lim_{t\to 0}\,A(t)$, donde k es una constante (no depende de t).
- $\lim_{t\to 0}[A(t)+B(t)] = \lim_{t\to 0}[A(t)]+\lim_{t\to 0}[B(t)]$

De vuelta a la penúltima línea de nuestro cálculo, allí vemos que el límite en el segundo término de la ecuación es proporcional a Δt, por lo tanto es tan pequeño como Δt, luego tiende a cero junto con Δt. Concluimos que la velocidad en la dirección x toma el siguiente valor:

$$v_x(t) = -a\cdot\omega\operatorname{sen}\omega t \tag{III.42}$$

Para la otra componente de la velocidad se opera en forma similar y se obtiene el siguiente resultado:

Ejercicio

Demuestre que:

$$\begin{aligned}
v_y(t) &= a\,\lim_{\Delta t\to 0}[\frac{\operatorname{sen}(\omega t+\omega\Delta t)-\operatorname{sen}(\omega t)}{\Delta t}]\\
v_y(t) &= a\,[1-(\frac{\omega\Delta t)^2}{2}]\,\frac{\operatorname{sen}\omega t}{\Delta t}+\omega\cdot\cos\,\omega t-\frac{\operatorname{sen}\omega t}{\Delta t}]\\
v_y(t) &= a\,\omega\,\cos\omega\, t. && \text{(III.43)}\\
\Box & && \text{(III.44)}
\end{aligned}$$

Resumiendo:

Los vectores relevantes para el movimiento circular uniforme son:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= a[\cos\,\omega t, \operatorname{sen}\omega t] \\ \vec{v}(t) &= a\cdot\omega\,[-\operatorname{sen}\omega t, \cos\omega t] \end{aligned} \qquad \text{(III.45)}$$

III.6.3. Velocidad angular

La *velocidad angular* indica el cuociente entre el ángulo descrito y el tiempo que tarda en recorrerlo. Se denomina ω y se mide en radianes por segundo.

En el caso de un movimiento circular *uniforme*, el objeto siempre viaja alrededor de la circunferencia con la misma *rapidez* (recuerde que su velocidad cambia de dirección en cada punto de la circunferencia pero la magnitud de la velocidad permanece constante). Tal como se indicó, definimos T como el tiempo empleado en describir una vuelta completa (2π radianes) a la circunferencia. De esta forma, la *velocidad angular* es:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \left[\frac{\text{radianes}}{\text{s}}\right]. \tag{III.46}$$

III.7. PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES

Dado un par de vectores arbitrarios: $\vec{A}$ y $\vec{B}$, el *producto escalar* se define como una operación matemática que asocia a estos dos vectores un número real. Este número tiene una interpretación geométrica bien definida.

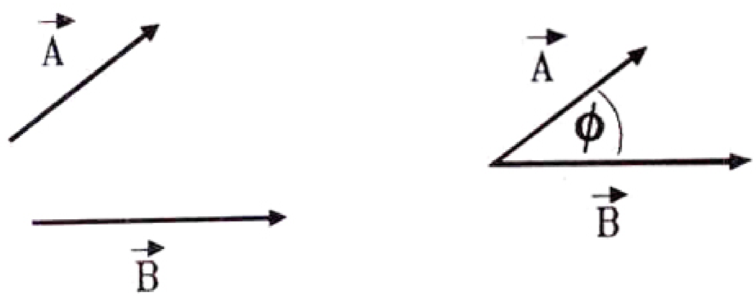


Figura III.25: Con dos vectores podemos definir una operación que consiste en el producto de los módulos de ambos vectores multiplicado por el coseno del ángulo que ellos forman. Esta operación se denomina el producto escalar entre estos dos vectores.

III.7.1. Definición del producto escalar

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \equiv |\vec{A}|\,|\vec{B}| \cos\phi, \tag{III.47}$$

en palabras, el producto escalar entre dos vectores es igual al producto de los *módulos* de ambos vectores por el coseno del ángulo más pequeño que ellos forman.

Por ejemplo, si $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$, con $\vec{A} \neq 0$ y $\vec{B} \neq 0 \Rightarrow cos\phi = 0 \Rightarrow \phi = \pm(2n-1)\cdot\pi/2$, donde n es un entero cualquiera. De acuerdo a la definición de producto escalar y el hecho que la función $\cos\phi$ es *par*, $(\cos\phi = \cos(-\phi))$, el ángulo que debemos considerar es $\frac{\pi}{2}$.

De aquí podemos concluir que:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{A} \perp \vec{B} \tag{III.48}$$

si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ no son idénticamente nulos.

III.7.2. Interpretación geométrica

El producto escalar es el producto entre la magnitud de uno de los vectores (cualquiera de los dos) por la proyección del otro vector sobre el anterior.

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}\,|\,|\vec{B}\,|\cos\phi = |\vec{B}\,|\,|\vec{A}\,|\cos\phi,$$

donde $|\vec{B}\,|\cos\phi$ es la proyección del vector $\vec{B}$ sobre el vector $\vec{A}$, o como en la expresión de la derecha, con el vector $\vec{A}$ proyectado sobre el vector $\vec{B}$: $|\vec{A}\,|$ cos ϕ.

La función cos ϕ, cumple el rol de proyectar uno de los vectores sobre el otro.

De la anterior discusión se desprende que el producto escalar es *conmutativo*, no depende del orden de los factores:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}.$$

III.7.3. Interpretación analítica

A partir de la definición de un vector a través de sus componentes,

$$\vec{A} = [a_x, a_y] \quad \text{y} \quad \vec{B} = [b_x, b_y],$$

se define el producto escalar de estos dos vectores como:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} \;\equiv\; [a_x, a_y]\cdot[b_x, b_y] = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y. \tag{III.49}$$

Esta definición de producto escalar es equivalente a la anterior y, al igual que ella *invariante*, es decir, tiene el mismo valor en cualquier sistema de referencia.

A continuación demostraremos esta propiedad. Para ello usaremos el producto escalar entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, donde hemos *rotado ambos vectores*, manteniendo constante el ángulo entre ellos ϕ. Los ángulos α y β que aparecen en la Figura, son los ángulos que estos vectores hacen con los nuevos ejes coordenados.

$$\vec{A}\cdot\vec{B} \;=\; [a_x, a_y]\cdot[b_x, b_y] = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y,$$

usando el hecho que $a_x = |\vec{A}|\,\cos\alpha$, y análogamente para el resto de las componentes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$, se tiene:

$$= \;|\vec{A}\,|\,|\vec{B}\,|[\cos\alpha\cdot\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta]$$

$$= \;|\vec{A}\,|\,|\vec{B}\,|\cos(\alpha-\beta)$$

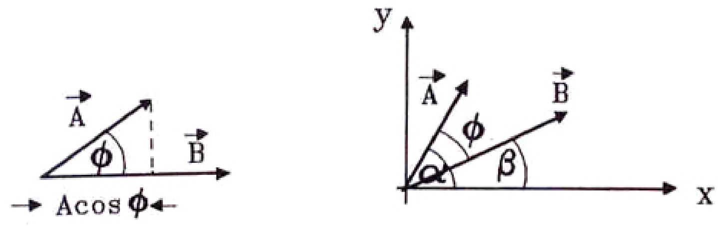


Figura III.26: El producto escalar es la proyección de un vector sobre el otro. No importa cuál de ellos se proyecte. El resultado no depende del sistema de referencia, sólo depende del ángulo entre los vectores, como se ilustra en la Figura.

Como $\alpha - \beta = \phi$, entonces la fórmula anterior se convierte en:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}\,|\,|\vec{B}\,| \cos \phi.$$

Todos los elementos que aparecen en la definición son independientes del sistema de referencia usado. Dados los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, sus módulos: $|\vec{A}\,|$ y $|\vec{B}\,|$ son únicos, lo mismo sucede con el ángulo entre ellos.

Queda claro que si cambiamos el ángulo entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, cambia el valor del producto escalar entre ellos.

Ejemplo

Usemos esta definición en el caso del movimiento circular. Veamos qué sucede con el producto escalar entre el vector posición y la velocidad de un punto que recorre una circunferencia [III.46].

$$\begin{aligned}
\vec{x} \cdot \vec{v} &= a^2\,\omega\,[\cos\,\omega\,t, \operatorname{sen}\omega\,t] \cdot [-\operatorname{sen}\omega\,t, \cos\,\omega\,t] \\
&= a^2\,\omega[-\cos\,\omega\,t \cdot \operatorname{sen}\omega\,t + \cos\,\omega\,t \cdot \operatorname{sen}\omega\,t] = 0 \\
&\Rightarrow \vec{v} \perp \vec{x} \quad \text{en todo instante t.}
\end{aligned}$$

Por ejemplo si $\omega\,t = \pi/2$, $\vec{x}(t) = a[0, 1]$ y $\vec{v}(t) = a\omega[-1, 0]$.

Analizaremos nuevamente el significado de $\omega\,t$. Como $\omega\,t$ es un ángulo, debe ser una cantidad adimensional, por lo tanto $[\omega] = \frac{1}{T}$. ω recibe el nombre de *velocidad angular* y se puede dar en diversas formas como las que se indican a continuación

$$\omega = \frac{\text{radianes}}{\text{s}} = \frac{2\pi}{T}, \qquad \text{(III.50)}$$

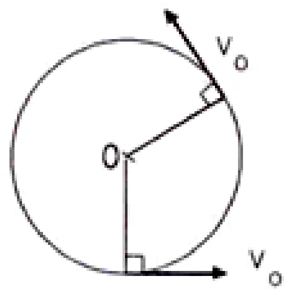


Figura III.27: El vector velocidad es siempre perpendicular al vector posición en el caso del movimiento circular.

aquí T identifica el tiempo que demora un objeto en recorrer 2π radianes, ó 360°.

$$\omega = \text{R.P.M} \;\equiv \text{Revoluciones por minuto} \equiv \frac{\text{número de vueltas}}{1 \text{ minuto}},$$

(una vuelta completa $\equiv 2\pi$ radianes, un minuto $\equiv 60$ segundos.)

Ejemplo

$$\omega = 60 \text{ RPM} = 60\,\frac{\text{vueltas}}{\text{min}} = \frac{60 \times 2\pi}{60} = 2\pi\,\frac{\text{radianes}}{\text{s}}$$

De esta forma, si ω se expresa en radianes/s y t en segundos, entonces $[\omega\, t] \equiv$ ángulo en radianes.

Ejemplo

Un automóvil recorre un camino con una velocidad promedio de 60 km/hora. Si el diámetro de sus ruedas es 60 cm, ¿cuál es el número de RPM de las ruedas del auto?

En una hora recorrió 60 km y la rueda dio $[60 \times 10^5 \text{ cm}]/[\pi \cdot 60 \text{ cm}]$ vueltas.

$$\frac{60 \times 10^5}{\pi \cdot 60} = \frac{1}{\pi} \times 10^5 \qquad \text{Vueltas por hora.}$$

$$= (10^5/\pi)\frac{\text{vueltas}}{1 \times 60 \cdot \text{min}} \simeq 5{,}12 \times 10^2 \text{ RPM.}$$

III.7.4. Aceleración en un movimiento circular uniforme

Expresión algebraica

Supongamos que un objeto se mueve sobre una circunferencia de radio **r** con una velocidad angular ω constante. Su velocidad tangencial está dada por:

$$\begin{aligned}
\vec{v}(t) &= r\,\omega[-\operatorname{sen}\omega\, t, \cos\,\omega\, t] \\
\vec{a}(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \\
a_x(t) &= -r\omega \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\omega\, t + \omega \Delta t) - \operatorname{sen}\omega\, t}{\Delta t} \\
&= -r\omega \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\operatorname{sen}\omega\, t\, \cos\, \omega\Delta t + cos\,\omega\, t \operatorname{sen}\omega\Delta t - \operatorname{sen}\omega\, t}{\Delta t}
\end{aligned}$$

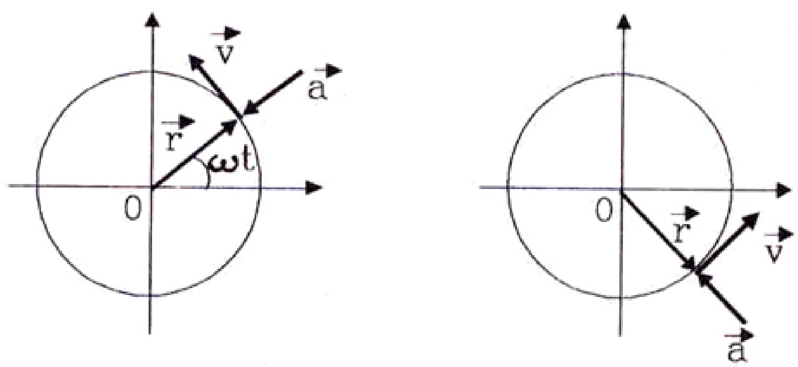


Figura III.28: Representación gráfica de los vectores posición, velocidad y aceleración en un punto arbitrario de la trayectoria del cuerpo.

Si $\omega\,\Delta t$ es muy pequeño podemos desarrollar las funciones seno y coseno en serie de potencias. Para ello usamos las expresiones del Apéndice, obteniendo el siguiente resultado.

$$a_x(t) \simeq r\omega \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\operatorname{sen}\omega\, t[1 - \frac{(\omega\Delta t)^2}{2}] + \omega\Delta t\, cos\,\omega\, t - \operatorname{sen}\omega\, t}{\Delta t} \tag{III.51}$$

En el límite, cuando Δt tiende a cero, tenemos:

$$a_x(t) \quad = \quad -r\omega \cdot \omega \cos\,\omega\, t + 0(\Delta t)$$

$$
\begin{aligned}
a_x(t) &= -r\omega^2 \cos \omega\, t, \quad \text{y, análogamente} \\
a_y(t) &= -r\omega^2 \mathrm{sen}\, \omega\, t.
\end{aligned}
\qquad \text{(III.52)}
$$

Finalmente, a partir de este resultado verificamos que:

$$
\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{v} &= 0 \\
\vec{a}\cdot\vec{r} &= r\cdot(r\omega^2)\cos\pi = -(r\omega)^2. \\
|\vec{a}| &= r\omega^2
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\vec{a}\perp\vec{v}$ y $\vec{a}\parallel\vec{r}$.

III.7.5. Interpretación geométrica de la aceleración centrípeta

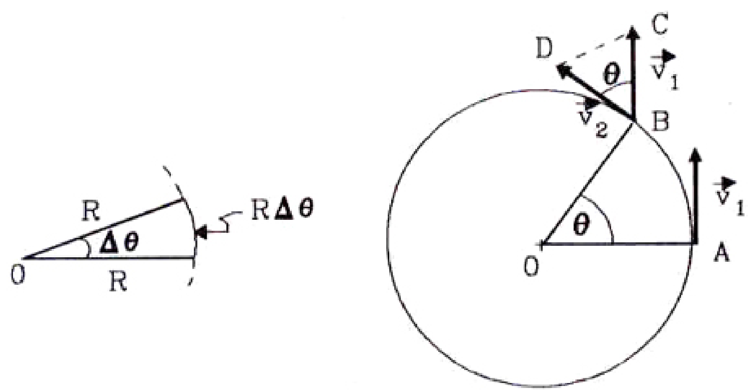


Figura III.29: Se ilustra en forma geométrica la aceleración centrípeta en el movimiento circunferencial uniforme. El ángulo θ se supone pequeño, a pesar que aparece aquí exagerado para no agrupar demasiado las componentes de la Figura.

La aceleración asociada al arco de circunferencia AB es:

$$
<\vec{a}>=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}, \qquad \text{con} \quad \Delta\vec{v}\equiv\vec{v}_2-\vec{v}_1,
$$

pero como es un movimiento circunferencial *uniforme*, (la velocidad sólo cambia de dirección):

$$|\vec{v}_2| = |\vec{v}_1|.$$

Usando la semejanza entre los triángulos:

$$\Delta\, OAB \sim \Delta\, BCD \quad (\overrightarrow{BC} \parallel \vec{v}_1),$$

se obtiene la siguiente igualdad entre su cuociente:

$$\frac{|\,\overrightarrow{AB}\,|}{R} = \frac{|\Delta \vec{v}\,|}{v}.$$

A continuación, si tomamos dos instantes muy cercanos, podemos *aproximar* $|\,\overrightarrow{AB}\,|$ por el largo de la cuerda $R\,\Delta\theta$, obteniendo:

$$|\Delta \vec{v}\,| = \Delta\theta\,|\vec{v}\,|,$$

y, finalmente:

$$|\vec{a}| = \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\,|\vec{v}| = \omega \cdot |\vec{v}| \tag{III.53}$$

En la Figura, el vector $\overrightarrow{CD}$ representa geométricamente la aceleración $\vec{a}(t)$.

Usando sólo geometría, podemos demostrar que la aceleración apunta hacia el centro de la circunferencia, como explicamos en el siguiente párrafo.

De los triángulos semejantes $\Delta\, OAB$ y $\Delta\, BCD$, definidos anteriormente, se tiene que $\vec{v}_2$ es perpendicular a OB, y de aquí se desprende que en el límite, cuando la cuerda AB tienda a confundirse con la tangente, el vector $\Delta\vec{v}$ tiende a su vez a posicionarse apuntando hacia el centro de la circunferencia.

Analíticamente podemos reforzar este argumento, mostrando que el vector aceleración en el movimiento circular uniforme apunta radialmente hacia el centro de la circunferencia. Para ello necesitamos jugar con vectores unitarios, aquellos de módulo unitario, como $\hat{\imath}$, por ejemplo.

Sabemos que $|\vec{a}| = \omega\,|\vec{v}\,|$. Hemos demostrado que a partir de *cualquier* vector $\vec{A}$, podemos construir un vector unitario en la dirección y sentido de $\vec{A}$: $\vec{A}/|\vec{A}| = \hat{A}$. Luego, $\vec{a} = |\vec{a}|\,\hat{a}$, pero a partir de las ecuaciones [III.52]:

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = -[\cos\omega\, t,\, \mathrm{sen}\,\omega\, t] = -\hat{x} \equiv -\frac{\vec{x}(B)}{|\vec{x}(B)|}$$

Recordemos que el vector posición de B es:

$$\vec{x}(B) = R[\cos\,\omega\, t, \mathrm{sen}\,\omega\, t],$$

su módulo es: $|\vec{x}(B)| = R$, y el término entre corchetes en la expresión anterior para $\vec{x}(B)$, agrupa precisamente a las componentes del vector unitario $\hat{x}$. Este resultado nos permite expresar la aceleración $\vec{a}$ en distintas formas como se señala a continuación:

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= -\omega|\vec{v}\,|[cos\,\omega\,t, \mathrm{sen}\,\omega\,t] = -\omega|\vec{v}\,|\,\hat{x}, \\
\vec{a} &= -\omega^2 R[cos\,\omega\,t, \mathrm{sen}\,\omega\,t] = -\omega^2\,\vec{x}, \qquad \text{(III.54)} \\
\vec{a} &= -\frac{|\vec{v}\,|^2}{R}\,[cos\,\omega\,t, \mathrm{sen}\,\omega\,t] = -\frac{|\vec{v}\,|^2}{R}\,\hat{x}.
\end{aligned}$$

Donde hemos usado $|\vec{v}\,| = \omega\,R$, en la segunda ecuación.

En las expresiones anteriores hemos escrito $|\vec{a}|$ de tres formas diferentes. Los corchetes identifican al vector unitario $\hat{a}$. Una vez que nos hemos familiarizado con las direcciones, magnitudes y sentidos de los vectores aceleración y velocidad, podemos trabajar con ellos usando simplemente sus módulos puesto que el resto de la información ya la conocemos.

La aceleración que sufre un objeto en un movimiento circular y que apunta hacia el centro se denomina **aceleración centrípeta**.

III.8. RESUMEN DEL MOVIMIENTO CIRCULAR

• El vector velocidad es tangente a la circunferencia en todo instante. Su módulo (longitud del vector) permanece *constante*, pero su dirección cambia de punto a punto en la circunferencia.
• El módulo de la velocidad es $|\vec{v}\,| = \omega R$. Donde ω es la velocidad angular de la partícula: radianes por unidad de tiempo.
• El vector aceleración apunta permanentemente hacia el centro de la circunferencia y su módulo permanece constante. Por esta razón se denomina aceleración centrípeta. Es perpendicular a la velocidad.
• Su valor absoluto es:

$$|\vec{a}| = \frac{|\vec{v}\,|^2}{R}, \text{ escrito de otra forma:} \quad |\vec{a}| = |\omega|^2 R.$$

Ejemplo

Escriba la ecuación paramétrica de una elipse centrada en el origen de coordenadas.

La ecuación de una elipse con esta característica es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Si escribimos las variables x e y de la siguiente forma:

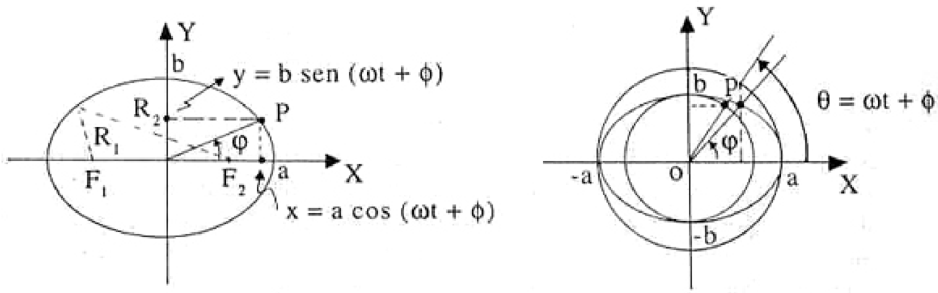


Figura III.30: La suma de R_1 y R_2 es la misma para cualquier punto de la elipse. Los valores a y b son los semiejes de la elipse. Se indica el significado del ángulo $\theta = \omega\, t + \phi$ y φ. Este último señala la posición de la partícula P.

$$\begin{aligned} x(t) &= a\, \cos\left(\omega\, t + \phi\right), \\ y(t) &= b \operatorname{sen}\left(\omega\, t + \phi\right), \end{aligned} \tag{III.55}$$

la ecuación de la elipse se satisface para cualquier instante de tiempo t. Lo que ocurre es que al reemplazar x e y por estas expresiones, la ecuación original se transforma en una identidad trigonométrica:

$$\cos^2(\omega\, t + \phi) + \operatorname{sen}^2(\omega\, t + \phi) = 1.$$

Si $a = b$, las ecuaciones anteriores corresponden a una circunferencia.

Es claro que a y b representan la amplitud máxima que logran las coordenadas sobre el eje x e y respectivamente. Esta expresión es válida para todo valor de $(\omega\, t + \phi)$.

El ángulo φ señala la posición de la partícula que orbita la elipse. θ es un ángulo que permite encontrar los valores de x e y en forma directa, pero *no identifica la posición de la partícula en forma inmediata*. La relación entre ambos ángulos es:

$$\tan\phi = \frac{y}{x} = \frac{b\,\mathrm{sen}\;\theta}{a\,\cos\,\theta} = \frac{b}{a}\,\tan\,\theta.$$

θ y φ coinciden sobre los ejes coordenados.

Relación entre $\dot{\phi}$ y $\dot{\theta}$

En lo que sigue sólo consideraremos el caso $\dot{\theta} \equiv \omega_o =$ constante. El vector OQ recorre ambas circunferencias, de radio a y b, con velocidad angular constante. Debemos relacionar este valor con $\dot{\varphi}$, la velocidad angular del vector que apunta hacia la partícula que recorre la elipse.

Para encontrar esta relación, recurrimos al resultado del problema 23 del capítulo II. Allí se establece que:

$$\lim_{\Delta\,\theta\to 0}\frac{\tan(\theta+\Delta\,\theta)-\tan\,\theta}{\Delta\,\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}\,,$$

así es que una pequeña variación de la tangente está dada por:

$$\Delta\tan\,\theta \equiv \tan(\theta+\Delta\theta)-\tan\,\theta = \frac{\Delta\theta}{\cos^2\theta}\,,$$

usando la igualdad $\tan\,\varphi = \dfrac{b}{a}\,\tan\theta$, podemos relacionar la variación de $\Delta\varphi$ y $\Delta\theta$:

$$\frac{\Delta\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{b}{a}\frac{\Delta\,\theta}{\cos^2\theta}\,,$$

suponiendo que esta variación ocurre en Δt segundos y definiendo $\omega = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$, tenemos:

$$\dot{\varphi} \equiv \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{b}{a}\frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\theta}\left(\frac{\Delta\,\theta}{\Delta t}\right) = \frac{b}{a}\frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\theta}\,\omega_o.$$

Expresando esta cantidad en función del ángulo θ :

$$\cos^2\theta = \frac{1}{1+\tan^2\theta} \quad\Rightarrow\quad \dot{\varphi} = \frac{a\,b\,\omega_o}{a^2\,\cos^2\theta + b^2\mathrm{sen}\;^2\theta} = \frac{a\,b\,\omega_o}{|\vec{r}|^2},$$

donde $|\vec{r}|$ es el módulo del vector que une el origen de coordenadas con la partícula que viaja por la elipse.

Consideremos el caso en que el ángulo θ toma la siguiente forma: $\theta = \omega_o t + \phi$, es decir, en $t = 0$, $\theta = \phi$. La partícula no comienza su movimiento de $\varphi = 0$.

¿Qué representa ϕ?

El movimiento de una partícula no tiene porqué comenzar justamente en el extremo de uno de los semiejes. Lo más probable es que en un cierto instante, digamos $t = 0$, la partícula se ubica en un punto de coordenadas $x(t = 0) = p$ e $y(t = 0) = q$, donde p y q son las coordenadas del punto P de la Figura. En base a estos datos se ajusta el valor de ϕ.

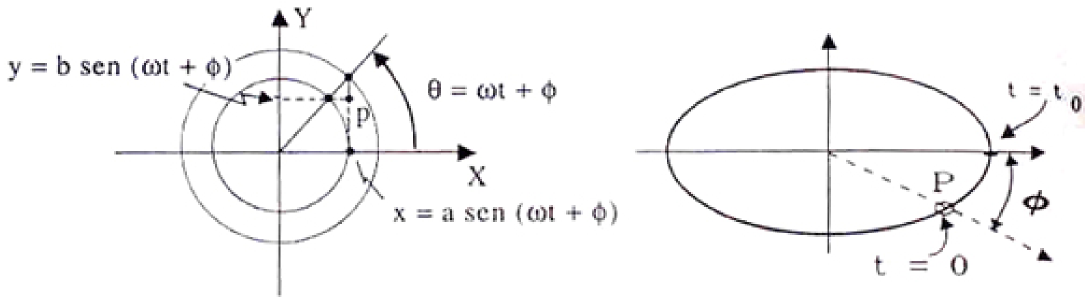


Figura III.31: El ángulo ϕ indica la posición de la partícula en la elipse en el instante t=0

Como ϕ debe ser un número adimensional podemos expresarlo como $(-\omega\, t_0)$, donde ω es la velocidad angular del punto que recorre la elipse y t_0 es una constante que determina el valor de ϕ al comenzar el movimiento. Con este reemplazo, las ecuaciones quedan:

$$x(t) = a\,\cos(\omega\, t - \omega\, t_0) = a\,\cos[\omega(t - t_0)], \quad y(t) = b\,\mathrm{sen}[\omega(t - t_0)].$$

Ejemplo

$x(t) = a\,\cos(\omega\, t + \phi)$ e $y(t) = b\,\mathrm{sen}(\omega\, t + \phi)$ forman la expresión más general para describir el movimiento de una partícula sobre una elipse generado por el movimiento circunferencial uniforme. Represente este movimiento de la siguiente forma:

$$x(t) = A\,\cos\omega\, t + B\,\mathrm{sen}\,\omega\, t, \qquad \text{(III.56)}$$

$$y(t) = D\,\cos\omega\, t + F\,\mathrm{sen}\,\omega\, t, \qquad \text{(III.57)}$$

donde A, B, D, F son constantes que dependen de a, ϕ y b.

Desarrollando cada una de las funciones trigonométricas definidas en el ejercicio anterior, tenemos:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= a\,\cos(\omega\, t + \phi) = a\,[\cos\,\omega\, t\,\cos\,\phi - \operatorname{sen}\omega\, t\operatorname{sen}\phi], \\
&= [a\,\cos\,\phi]\,\cos\,\omega\, t + [-a\operatorname{sen}\phi]\operatorname{sen}\omega\, t.
\end{aligned}
$$

Aquí hemos usado $\cos(\alpha+\beta) = \cos\,\alpha\,\cos\,\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$.

Comparando con la función trigonométrica dada, se encuentra que:

$$A = a\,\cos\,\phi, \qquad B = -a\operatorname{sen}\phi.$$

Análogamente se pueden encontrar D y F.

¿Qué sucede con la velocidad de esta partícula?

Calcularemos su velocidad tomando la razón entre el límite de dos posiciones cercanas y el tiempo que le toma en ir de la posición inicial a la final. Esto lo haremos sólo para una de las componentes y dejaremos el cálculo de la otra componente como ejercicio, porque su desarrollo es muy similar.

$$v_x(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\right] \equiv \frac{d\,x(t)}{dt}$$

$$v_x(t) = \frac{d}{dt}(a\cos[\omega\, t+\phi]) = \frac{d}{dt}[A\cos\,\omega t + B\operatorname{sen}\omega\, t]$$

Usando la propiedad que el límite de una suma es la suma de los límites de cada una de las componentes y que las constantes no son afectadas por el límite tenemos:

$$v_x(t) = A\,\frac{d}{dt}(cos\,\omega\, t) + B\,\frac{d}{dt}(\operatorname{sen}\omega\, t),$$

pero, esta derivada ya la hemos estudiado antes, en la descripción del movimiento circular uniforme. El resultado es:

$$v_x(t) = -A\,\omega\operatorname{sen}\omega\, t + B\,\omega\,\cos\,\omega\, t,$$

Reemplazando las expresiones para A y B escritas anteriormente,

$$v_x(t) = a\,\omega\,[-cos\,\phi\operatorname{sen}\omega\, t - \operatorname{sen}\phi\cos\,\omega\, t],$$

y usando la definición del valor del seno de una suma de ángulos tenemos:

$$v_x(t) = -a\,\omega\operatorname{sen}(\omega\, t+\phi). \tag{III.58}$$

Se deja propuesto demostrar que: $v_y(t) = b\,\omega\,\cos\,(\omega\, t+\phi)$. $\square$

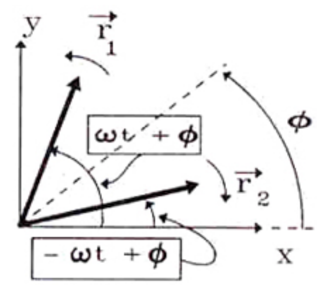
Ejercicio

Para los valores de $x(t)$ e $y(t)$, ya dados, demuestre que:

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{v_x(t+\Delta t) - v_x(t)}{\Delta t}\right] = \frac{d}{dt}v_x = -a\,\omega^2\,\cos(\omega\,t+\phi),\;\; a_y = -b\,\omega^2\,\mathrm{sen}(\omega\,t+\phi)$$

Ejemplo

Dos vectores, $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$, de igual módulo giran con velocidad angular $+\omega$ y $-\omega$ respectivamente. En t = 0 ambos apuntan en la misma dirección y sentido (ver Figura). Demostrar que el vector resultante de la suma de $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ es un vector que *no* gira, sino que oscila a lo largo de la dirección determinada por el ángulo ϕ.



Nota:
Usaremos las siguientes igualdades trigonométricas:

$$\cos(\pm\,\omega\,t+\phi) \;=\; \cos\,\omega\,t\,\cos\,\phi \mp \mathrm{sen}\,\omega\,t\,\mathrm{sen}\,\phi \tag{III.59}$$

$$\mathrm{sen}(-\omega\,t+\phi) \;=\; -\mathrm{sen}\,\omega\,t\,\cos\,\phi + \cos\,\omega\,t\,\mathrm{sen}\,\phi \tag{III.60}$$

Desarrollando cada uno de los vectores en componentes tenemos:

$$\vec{r}_1 \;=\; a[cos(\omega\,t+\phi), \quad \mathrm{sen}(\omega\,t+\phi)] = a\,\cos(\omega\,t+\phi)\,\hat{\imath} + a\,\mathrm{sen}\,(\omega\,t+\phi)\,\hat{\jmath},$$

$$\vec{r}_2 \;=\; a\,[cos(-\omega\,t+\phi), \quad \mathrm{sen}(-\omega\,t+\phi)] = a\,\cos(-\omega\,t+\phi)\,\hat{\imath} + a\,\mathrm{sen}(-\omega\,t+\phi)\,\hat{\jmath}.$$

La resultante de la suma de ambos vectores es la suma de sus componentes:

$$\vec{R} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 = a\,[cos(\omega\,t+\phi) + \cos(-\omega\,t+\phi)]\,\hat{\imath} + a\,[\mathrm{sen}(\omega\,t+\phi) + \mathrm{sen}(-\omega\,t+\phi)]\,\hat{\jmath},$$

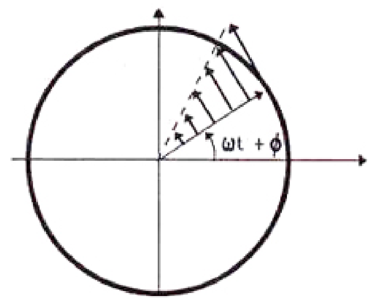
Después de aplicar las igualdades trigonométricas señaladas anteriormente, se obtiene:

$$\vec{R} = \{a\ \cos\,\omega\, t\}[\cos\,\phi\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}\phi\,\hat{\jmath}]. \tag{III.61}$$

De la ecuación anterior vemos que el vector suma de $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ permanece apuntando siempre en la misma dirección ϕ, como lo indica el vector $[\cos\,\phi\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}\phi\,\hat{\jmath}]$. Por otra parte el módulo del vector $\vec{R}$ está dado por $|\vec{R}| = a\cos\omega\, t$, de donde concluimos que varía sinusoidalmente en el tiempo.

Ejercicio

Demuestre que la magnitud de la velocidad de un punto de la rueda, en cualquier instante de tiempo, crece linealmente con la distancia de este punto al centro.
Dibuje el vector velocidad asociado a distintos radios de la rueda.



Solución

$$\vec{v} = r\,\omega\,[-\operatorname{sen}(\omega\, t + \phi), \cos(\omega\, t + \phi)]$$

$$|\vec{v}\,| = r\,\omega, \qquad \vec{v}\cdot\vec{r} = 0$$

III.9. EJERCICIOS

1.– a) Un hombre camina a lo largo de una circunferencia centrada en el origen, desde la posición $x = 5$ m, $y = 0$, a una posición final $x = 0$, $y = 5$ m. ¿Cuál es su desplazamiento?

b) Un segundo hombre camina desde la misma posición inicial a lo largo del eje x hasta el origen y luego camina a lo largo del eje y hasta $y = 5$ m, $x = 0$ ¿Cuál es su desplazamiento?

2.– Exprese los siguientes vectores en función de los vectores unitarios $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$.

a) Una velocidad de 10 m/s y un ángulo de elevación de 60°.

b) Un vector $\vec{A}$ de magnitud $A = 5$ y $\theta = 225°$ con respecto al x.

c) Un desplazamiento desde el origen al punto $x = 14$ m, $y = -6$ m.

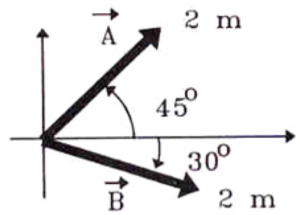


Figura III.32: Ejercicio # 3. Suma y resta de vectores

3.– Para los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ de la Figura, encuentre sus componentes según x e y. Determine las componentes, magnitud y dirección de la suma $(\vec{A}+\vec{B})$ y de su diferencia $(\vec{A}-\vec{B})$.

4.– Las componentes del vector posición de una partícula (x, y) son $(2m,\, 3m)$ en t = 0 , $(6m,\, 7m)$, en t = 2 s y $(13m,\, 14m)$ en t = 5 s.

a) Encuentre $\vec{V}_M$ (velocidad media) entre t = 0 y t = 2 s.

b) Encuentre $\vec{V}_M$ entre t = 0 y t = 5 s.

5.– Una partícula tiene un vector posición dado por $\vec{r} = (30\,t)\,\hat{\imath} + (40\,t - 5\,t^2)\hat{\jmath}$ donde t representa el tiempo y las dimensiones de los números son tales que r tiene dimensiones de longitud (metros). Encuentre los vectores velocidad y aceleración instantáneas para este movimiento.

6.– Una partícula tiene una aceleración, constante, determinada por:

$$\vec{a} = (6 \cdot \hat{\imath} + 4 \cdot \hat{\jmath})[m/s^2].$$

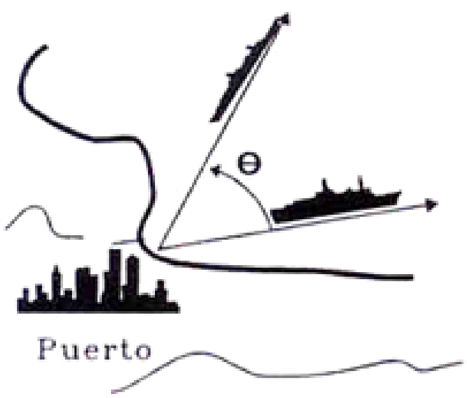
Si en $t = 0$, su velocidad es nula y su vector posición es $\vec{x}_0 = 10 \cdot \hat{\imath}$ [m]:

a) Encuentre los vectores velocidad y posición en un instante t cualquiera.

b) Encuentre la ecuación de la trayectoria en el plano y dibújela.

7.– Las direcciones de dos barcos A y B que se alejan del puerto forman un ángulo θ entre ellas como se indica en la Figura.

El barco A se aleja con una rapidez constante de 5 m/s, en tanto que el barco B se mueve con *aceleración constante* de 2 m/s^2. Si ambos partieron simultáneamente del puerto, y la rapidez inicial de B era nula, calcule:



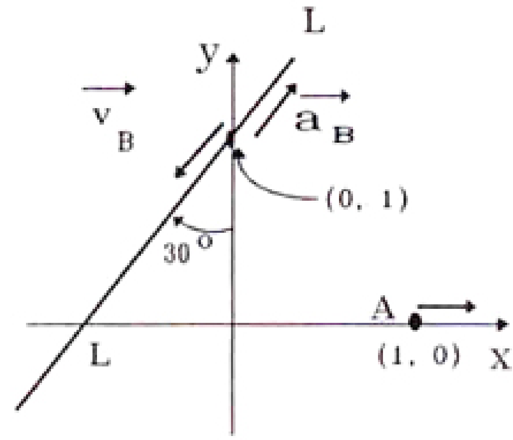


Figura III.33: Ejercicio # 7 Ejercicio # 9

a) ¿Cuál es la distancia que separa los barcos al cabo de 10 segundos?

b) ¿A qué distancia están del puerto y cuál es la velocidad de cada uno de ellos en ese instante?

8.– Desde un avión situado a una altura h = 1 km, se lanza una bomba con velocidad inicial V_0, horizontal. Por efecto del viento la bomba experimenta, además de la aceleración de gravedad, una desaceleración horizontal cuya magnitud es de 1 m/s^2. Si V_0 = 50 m/s, calcule:

a) El tiempo que demora en caer. ¿Cómo se afectaría el resultado anterior si no hubiera viento?

b) ¿A qué distancia del punto de lanzamiento toca Tierra?

9.– La partícula A de la Figura, se desliza sobre el eje x y la partícula B sobre la recta L-L que forma un ángulo de 30^{O} con el eje vertical.

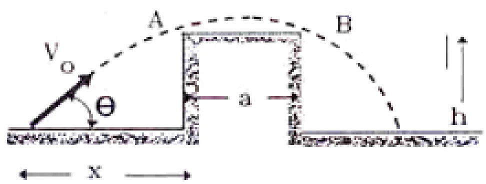
En $t = 0$, A se encuentra en (1, 0) y B en (0, 1). Sus velocidades y aceleraciones son: $V_A = 0$, $a_A = 2$ m/s^2 (constante), $V_B(0) = 4$ m/s y $a_B = 4$ m/s^2 (constante). El sentido de cada una de ellas aparece indicado en la Figura.

A partir de estos datos determine a qué distancia se encuentran ambos móviles cuando la velocidad de B se hace instantáneamente cero.

10.– Un proyectil se lanza con velocidad inicial V_0 y ángulo de lanzamiento θ, ambos conocidos. El proyectil sobrepasa una barrera rectangular de altura desconocida h, rozando sus dos vértices A y B.

a) Calcular la distancia x que separa el punto de lanzamiento, de la pared más cercana del obstáculo.

b) Calcular la altura de la barrera.



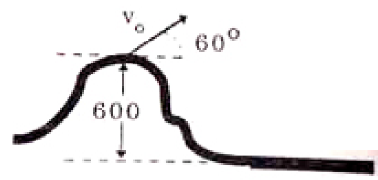


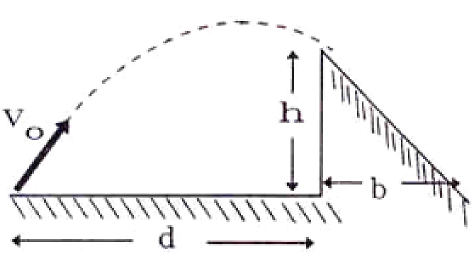
Figura III.34: Ejercicio #10 Ejercicio #11.

11.– Se lanza un proyectil desde la cima de una cumbre cuya altura es de 600 m, con una velocidad $V_0 = 200$ m/s y un ángulo $\theta = 60°$. Despreciando la resistencia del aire, ¿en qué punto toca tierra el proyectil?

12.– Desde una distancia d del borde recto de un tobogán, se dispara una bengala. Si el tobogán tiene una altura h y un largo b, determinar ambas componentes de la velocidad inicial del proyectil para que haga contacto con el tobogán justo en el vértice superior y que su velocidad en ese punto, sea paralela al plano inclinado.

13.– Desde lo alto de una escalera con peldaños de largo a y altura a, se lanza un proyectil con velocidad horizontal $\vec{v}_0$.

Determine en función de los parámetros dados, el peldaño en que caerá el proyectil.



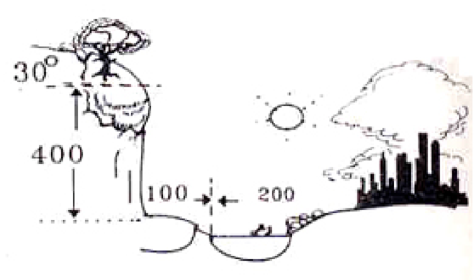


Figura III.35: Ejercicio # 12 Ejercicio# 14.

14.– Una gran roca está suelta sobre un risco de 400 m de altura, cerca de una pequeña villa, a la cual amenaza con su caída. Se calcula que la inclinación media del risco es de 30° y que al caer, tendrá una rapidez 50 m/s justo al enfrentar el precipicio.

Junto a la villa hay un lago de 200 m de diámetro y que a su vez se encuentra a 100 m de la base del risco.

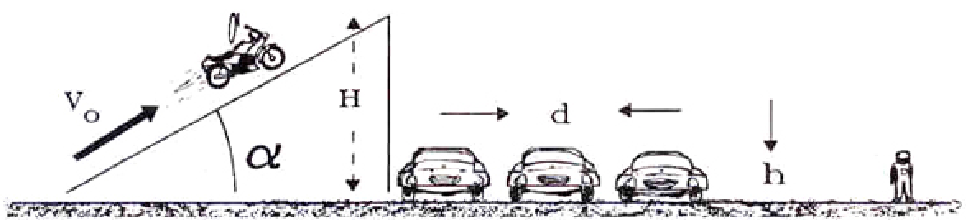
a) ¿Dónde caerá la roca?

b) ¿Qué rapidez tendrá al llegar al suelo?

15.– El motociclista de la Figura desea saltar por sobre N autos de altura h y ancho d. Para ello usará una rampa inclinada (*que no tiene roce*) en un ángulo α y de altura H. El motociclista ingresa a la rampa con una velocidad v_0 y sube por ella sin *acelerar* (ya que no puede, debido a la ausencia de roce).

Se pide que calcule la velocidad mínima con la cual debe ingresar el motociclista a la rampa, si desea saltar por sobre 14 autos dispuestos como muestra la Figura.

Los valores numéricos para las variables son: $h = 1$ m $H = 12$ m $\alpha = 45°$ $d = 2$ m.

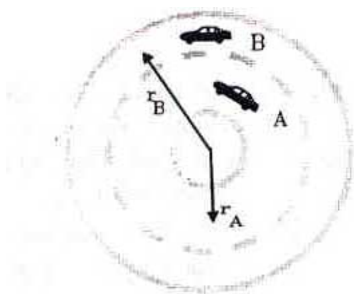


16.– La Figura muestra dos autos que corren con *rapidez constante* en un autódromo circular. El auto A corre por la pista interior de radio r_A y el auto B por la pista exterior de radio r_B, con $r_A < r_B$.

Se sabe que la rapidez de B es v_B, ¿cuál es la máxima rapidez que puede tener A, para que en el caso más adverso, alcance dos veces a B, mientras éste último describe una sola vuelta al circuito?

17.– La Figura indica la conexión en una caja de cambios de un automóvil. Si la razón entre los radios de ambos engranajes es la misma para ambos pares, encuentre este número si deseamos que en la primera marcha con el motor a 2000 RPM, el auto tenga una velocidad de 30 Km/h. Por cada cinco vueltas en la salida de la caja de cambios, las ruedas dan una vuelta. El radio de las ruedas es de 50 cm.

18.– Un agricultor se encuentra viajando en su camioneta a una velocidad tal que sus ruedas, de 40 cm de radio, giran a una razón de seis vueltas por segundo. Este



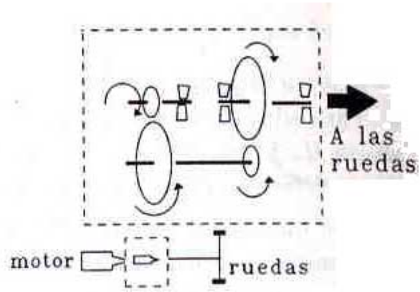
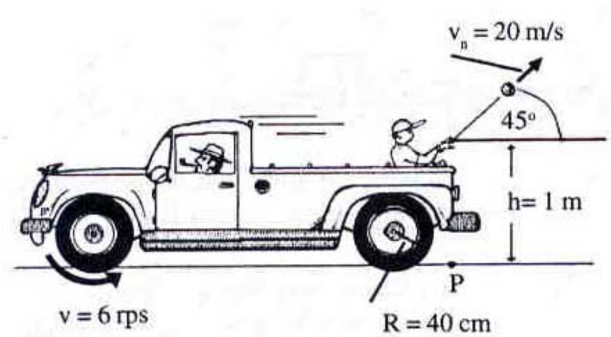


Figura III.36: Ejercicio # 16 Ejercicio# 17.

conductor –infringiendo abiertamente el reglamento,– lleva en la parte trasera a un niño. Este al encontrar una naranja en el piso, la lanza con un ángulo de 45° y con una velocidad $v_N = 20\,m/s$ *respecto a la camioneta*. Si la altura de este lanzamiento es de 1 metro; ¿ a qué distancia del punto P, que marca el lugar de lanzamiento, cayó la naranja? (No considere el roce con el aire).



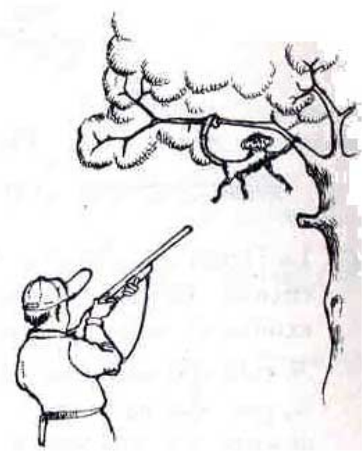


Figura III.37: Ejercicio # 18 Ejercicio # 19

19.– Un mono está colgado a una altura h de un árbol. Un cazador le apunta directamente con un rifle desde una distancia d. En el mismo instante en que dispara el rifle, el mono se suelta del árbol. ¿Cree Ud. que podrá sobrevivir este animalito?

20.– Un pájaro vuela horizontalmente con velocidad V y a una altura constante h. En el instante que sobrevuela a un rufián armado de una piedra, éste se la lanza con su máxima velocidad posible: U.

a) ¿Cuál es el valor mínimo de la velocidad U, para que el proyectil pueda alcanzar al pájaro?

b) ¿Cuál es el ángulo, medido con respecto a la normal, con el cual debe disparar la piedra?

c) ¿Qué distancia recorre el pájaro antes de ser malherido?

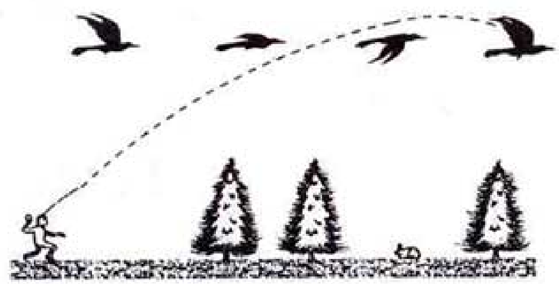


Figura III.38: Ejercicio # 20

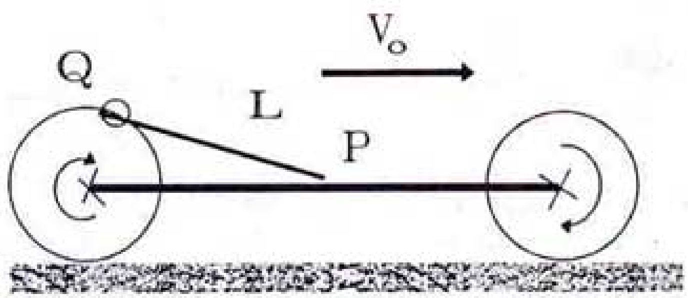


Figura III.39: Ejercicio # 21

21.– Un carro se mueve con velocidad uniforme $v_0 = 2$ m/s. El punto P se puede deslizar horizontalmente y está unido al borde de una rueda de radio $R = 3\ m$ por medio de una vara de largo $L = 5\ m$. Encuentre la velocidad del punto P en función de t si para $t = 0$ el punto Q está junto al suelo.

22.– Un objeto celeste situado a una gran distancia, emite una nube brillante de gas que viaja a la velocidad V, y formando un ángulo θ con nuestra línea visual (ver Figura).

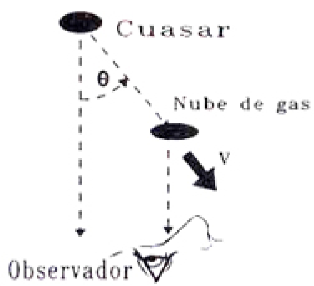
a) Teniendo presente que la velocidad de la luz es finita e igual a c, demuestre que la velocidad *transversal aparente* que mide un observador en nuestro planeta es:

$$V_{\text{aparente}} = \frac{V \operatorname{sen}\theta}{1 - \dfrac{V\ \cos\theta}{c}}.$$

b) Demuestre que esta velocidad aparente puede ser mayor que la velocidad de la luz c.

23.– La Figura muestra dos ruedas de radios r_1 y r_2, las cuales están unidas por una correa de transmisión inextensible. Los ejes de las ruedas permanecen fijos.

a) Compare las velocidades angulares y tangenciales de ambas ruedas. b) Si la rotación de las ruedas es uniforme, encuentre una relación entre las frecuencias f_1 y f_2, y los radios r_1 y r_2.



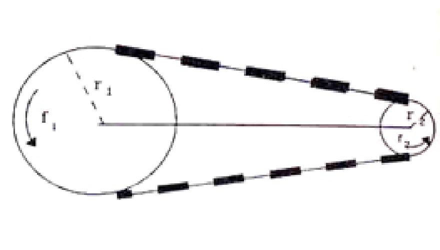


Figura III.40: Ejercicio # 22 Ejercicio # 23