Cinemática 1 dimensión

Introducción a la Mecánica

Nelson Zamorano Hole

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile

II

Índice general

Capítulo II

CINEMATICA

II.1. INTRODUCCION

La descripción matemática de la trayectoria de un objeto es lo que denominamos *cinemática*. En este capítulo estudiaremos el movimiento de una partícula en *una dimensión*. Este es un ejemplo muy simple, pero contiene todas las ideas básicas de la cinemática en más dimensiones. De aquí podemos extendernos a los casos de dos y tres dimensiones.

Cuando nos referimos a una partícula en el párrafo anterior, hablamos de un objeto puntual, despojado de dimensiones. Su descripción natural es la de un punto matemático.

Esta aproximación al mundo real es de gran utilidad, por ejemplo, cuando se estudia el movimiento de la Tierra en torno al Sol, la distancia relevante es la distancia Tierra–Sol, en este caso, el tamaño de la Tierra es despreciable y ésta puede ser tratada como una partícula. En lo sucesivo repetiremos esta misma reducción del tamaño con diferentes objetos.

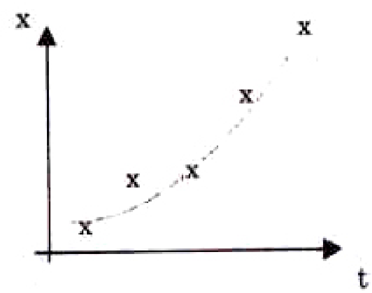
El movimiento de una partícula en una dimensión nos lo podemos imaginar como un desplazamiento a lo largo de una línea recta. En forma natural, es posible asociar esta línea con el eje de los números reales. La elección de un origen divide a esta recta en dos zonas. En forma arbitraria las denominamos lado positivo, a la derecha del origen y, negativo al restante.

La *coordenada* es un número real que se asocia –de alguna forma– con la posición de la partícula en cada punto de la curva. Si además especificamos el instante en el cual la partícula ocupó dicha posición, la descripción de su movimiento es completa. Denotaremos por $x(t)$ la posición que tiene una partícula en cada instante de tiempo t. La trayectoria es la *función* $x \equiv x(t)$.

En diversas circunstancias –en el laboratorio por ejemplo–, sólo se conoce la posición de la partícula en determinados instantes, en estos casos una *tabla de valores*, como la que se indica en la Figura, describe el movimiento.

Una *tabla de valores* establece una relación uno a uno entre dos conjuntos finitos de números.

TIEMPO	POSICION
t_0	x_0
t_1	x_1
$\vdots$	$\vdots$
t_j	x_j
$\vdots$	$\vdots$



Una buena estrategia para estudiar un movimiento es *graficando* la función $x(t)$. Por ejemplo, podemos ubicar los valores de t en el eje horizontal *(abcisa)* y la posición correspondiente a ese instante en el eje x *(ordenada)*. Una mirada a un gráfico, permite obtener una gran cantidad de información, por esta razón es importante saber interpretarlos.

Cuando una tabla de datos contiene muchos puntos podemos intentar unirlos por una línea continua. Esto genera un gráfico. En algunos casos es posible asociar esta curva con una función $f(t)$ que relacione, en forma única, la variable t con $x = f(t)$.

Generalmente existe una dispersión en los datos y no tiene sentido dibujar una curva $x = f(t)$ que pase a través de todos y cada uno de los puntos. En este caso se puede ajustar una curva elemental –una curva que tenga una expresión analítica simple–, que se aproxime lo más posible a los datos. Existen procedimientos conocidos que realizan esta tarea y que son usados en el laboratorio.

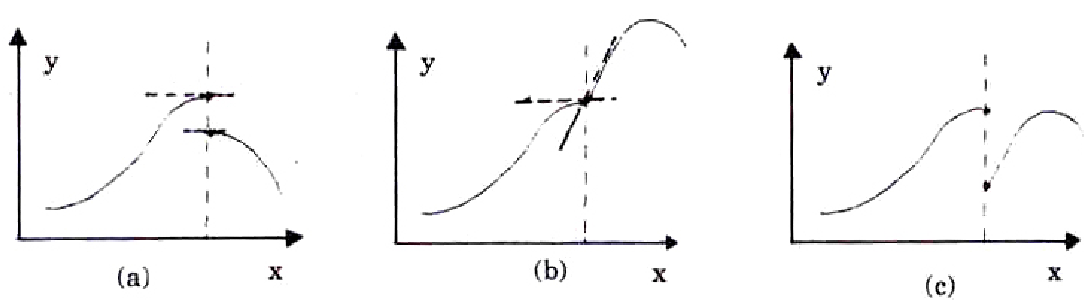


Figura II.1: Una curva es suave si la función y su tangente cambian en forma continua. En caso que existan discontinuidades de la curva (a), o su tangente (b), o ambas simultáneamente (c), debemos analizar cada tramo por separado.

Un ejemplo cuyo resultado se expresa mediante una función elemental, como polinomios, funciones trigonométricas..., constituye el caso ideal para ser analizado en detalle.

En algunos casos debemos recurrir a los métodos numéricos para resolver el problema.

Comenzaremos estudiando las curvas más simples y que se usan con mayor frecuencia: la línea recta y la parábola.

II.2. GRAFICOS

II.2.1. Ecuación de la recta.

La siguiente ecuación representa una línea recta:

$$y = mx + n. \tag{II.1}$$

Con los parámetros m y n es posible caracterizar a cualquier línea trazada en el plano.

Sabemos que dos puntos determinan completamente una recta. Basta marcar los dos puntos en la Figura II.2 y enseguida trazar con una regla una línea recta a través de ellos.

Para encontrar la relación entre los valores de m y n y las coordenadas x_P, y_P y x_Q, y_Q de los puntos P y Q, elegimos la ubicación de estos puntos de manera que simplifiquen el álgebra.

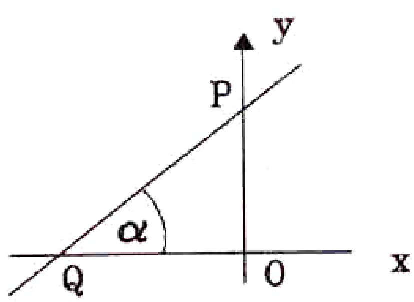


Figura II.2: Las coordenadas de los puntos P y Q determinan los parámetros m y n de la recta. Las coordenadas del punto P son los valores x_P e y_P, que se obtienen trazando por P una paralela a la *ordenada* y a la *abcisa* respectivamente.

Como el punto P pertenece a la recta, obedece la ecuación II.1 de forma que se cumple que: $y_P = m\,x_P + n$.

De la Figura II.2 se sabe que $x_P = 0$, puesto que su proyección sobre el eje x coincide con el origen y por tanto el número asociado es precisamente 0. Al reemplazar este valor en la ecuación de la recta anterior obtenemos $y_P = n$.

Un razonamiento similar indica que: $y_Q = 0 = m\, x_Q + n$ para el punto Q. De modo que $x_Q = -n/m$. Si relacionamos esta última ecuación con el valor de la coordenada $y_P = n$, obtenemos:

$$m = \frac{y_P}{-x_Q} > 0, \quad \text{puesto que } x_Q < 0.$$

Recordando la definición de tangente del capítulo anterior, descubrimos que m es precisamente la tangente del ángulo α en el triángulo $\triangle QOP$.

La generalización de esta definición para cualquier par de puntos 1 y 2 es la siguiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \equiv \textit{pendiente de la recta.} \tag{II.2}$$

Ejercicio

Demuestre que esta definición generalizada de m, coincide con el valor obtenido para m en el caso particular de la Figura II.2. □

Algunos casos particulares de la ecuación de una recta.

Si ponemos $n = 0$, la ecuación II.1 queda: $y = mx$, y representa una recta que pasa a través del origen.

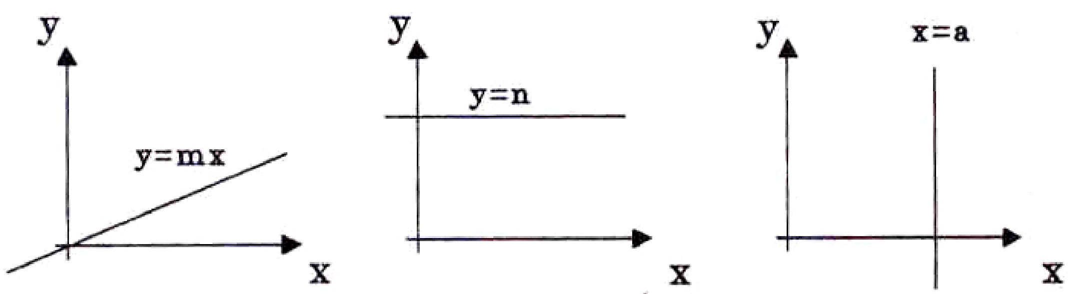


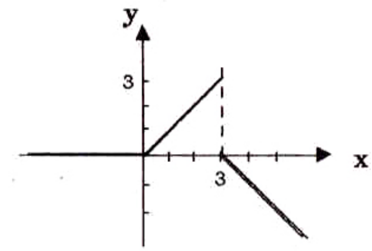
Figura II.3: Ejemplos de la ecuación de una recta. Cada una de las Figuras representa un caso particular de las ecuaciones estudiadas.

Si $m = 0$, la pendiente de la recta es nula y por tanto es paralela al eje x. En este caso $y = n$, independiente del valor asignado a x.

Otro caso particular es la ecuación $x = a$. Esta ecuación corresponde a una recta perpendicular al eje x que lo corta en el punto $x = a$. En rigor, esta ecuación no es una función: no queda definido cómo asociar en forma única un sólo valor de y al punto x=a.

En algunos ejemplos de cinemática, la pendiente de una función –o la función misma– sufren un salto repentino. *En estas situaciones, cada discontinuidad señala el comienzo de una nueva ecuación para la recta.* A continuación se incluye un par de estos casos.

Ejemplo

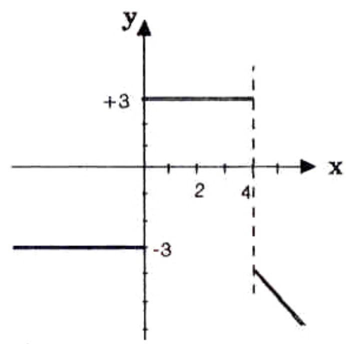


$$y = 0 \quad x \leq 0,$$

$$y = x \quad 0 \leq \, x \leq 3,$$

$$y = -x + 3 \quad x > 3.$$

a) En $x = 0$ la función es continua pero la *pendiente* es discontinua. En $x = 3$ se produce una discontinuidad de la función y de la pendiente.



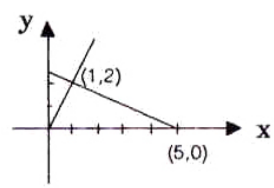
b) Otro caso del mismo tipo es:

$$y = -3, \quad \text{para} \quad x < 0,$$

$$y = +3 \qquad 0 \leq x < 4,$$

$$y = -x \qquad x \geq 4.$$

Ejercicio



Escriba la ecuación correspondiente a cada uno de los lados del triángulo rectángulo de la figura adyacente.□

II.2.2. La parábola.

La ecuación de una parábola es:

$$y = ax^2 + bx + c \tag{II.3}$$

Los valores que toman los parámetros a, b y c determinan las distintas formas que adopta la parábola. Algunos de estos casos se incluyen en la Figura II.4.

La intersección de la parábola con el eje x (cuya ecuación es $y = 0$) son las raíces de la ecuación cuadrática. Cuando la parábola no corta al eje x, las dos raíces son números complejos conjugados. Cuando la toca en un solo punto, las dos raíces de la ecuación son iguales.

Familiarizarse con el gráfico de una parábola es fundamental. El movimiento de una partícula sometida a una aceleración constante –por ejemplo, en caída libre sobre la superficie de la tierra–, queda descrito precisamente por esta curva.

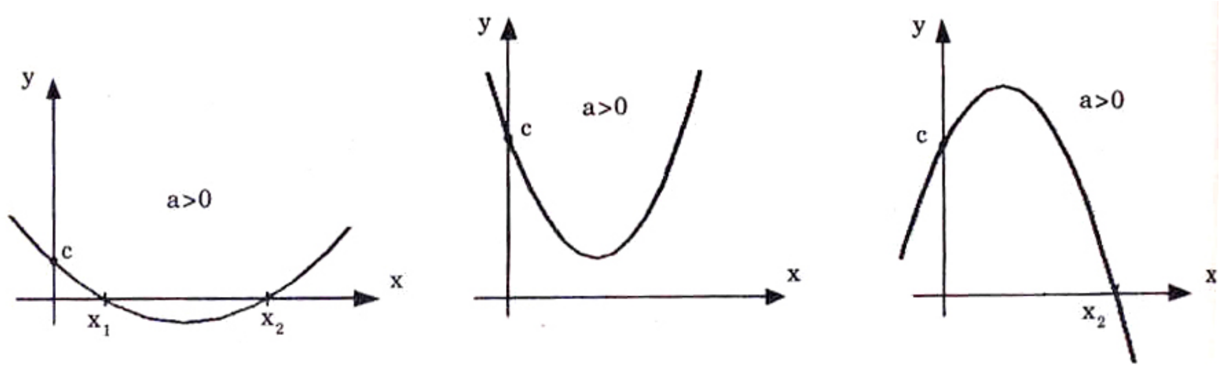


Figura II.4: Significado geométrico de a, b y c. $a > 0$: indica concavidad ($\bigcup$), $a < 0$: convexidad ($\bigcap$). c: indica la coordenada del punto donde la parábola corta a la ordenada y b la pendiente en dicho punto.

$$\forall\, a,\ [b^2 - 4\,a\,c] > 0, \quad y = \quad ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{posee dos raíces reales: } x_1,\, x_2;$$

$$\forall\, a,\ [b^2 - 4\,a\,c] < 0, \quad y = \quad ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{dos raíces complejas: } z_1,\, z_1^*\,;$$

$$\forall\, a,\ [b^2 - 4\,a\,c] = 0, \quad y = \quad ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{dos raíces reales iguales: } x_1 = x_2.$$

($\forall \equiv$ para todo).

Ejemplo

Encontrar las coordenadas de los puntos donde una recta intercepta una parábola. La ecuación de la parábola es $y = -x^2 + 2$ y la recta obedece a la ecuación $y = x$.

La intersección de las dos curvas indica que ambas tienen al menos un punto en común, llamémosle P. Como el punto pertenece a ambas curvas, sus coordenadas, x_P e y_P, deben satisfacer las ecuaciones de ambas curvas simultáneamente. En P se cumple entonces que:

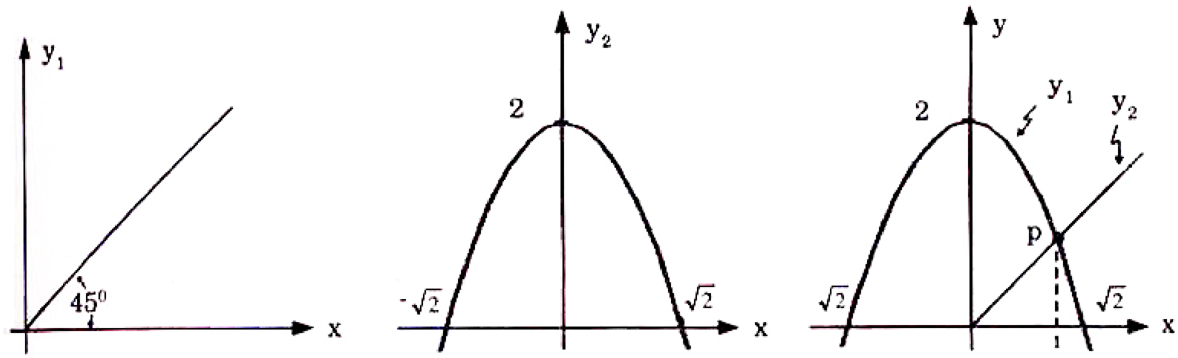


Figura II.5: A la izquierda se dibujan los gráficos de la recta y la parábola, con las letras y_1 e y_2. A continuación se superponen ambos gráficos. En el ejercicio se pide encontrar las coordenadas de los puntos de intersección.

Ecuación de la recta:	Ecuación de la parábola:		Como se cumple para ∀ x:
$y_P \;=\; x_P,$	$y_P = -x_P^2 + 2,$	$\Longrightarrow$	$x = -x^2 + 2.$

Las dos soluciones de esta ecuación cuadrática son: $x_P = 1 = y_P$, y $x_Q = -2$, $y_Q = -2$.

Ejercicio

Grafique el polinomio $y = x^3 + b\,x + c$, para distintos valores de b y c, hasta obtener una combinación tal que solo exista *una* raíz real para la ecuación cúbica.

Indicación: Recuerde que las raíces de un polinomio se obtienen poniendo y = 0. Por ejemplo, si $c = 0$ y $b < 0$, entonces existen tres raíces reales, un de ellas es $x = 0$ y las otras dos son $x = \pm\sqrt{-b}$. Examine a continuación qué sucede con $b \geq 0$. $\Box$

Ejemplo

Encuentre las coordenadas del vértice del rectángulo que encierra el área máxima y que está inscrito en una elipse, cuya ecuación es $x^2/m^2 + y^2/n^2 = 1$.

Para hacer contacto con la ecuación de una parábola vamos a considerar el cuadrado del área en lugar del área. Este es un truco que no afecta el resultado puesto que el área es positiva: si $\mathcal{A}$ es el área máxima, $\mathcal{A}^2$, también lo es.

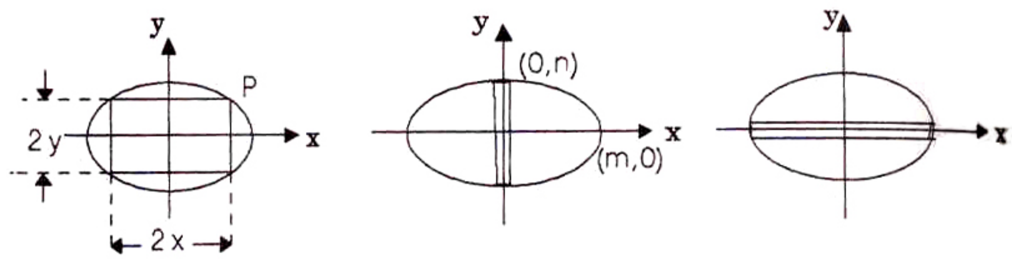


Figura II.6: Rectángulo inscrito en una elipse, cuya ecuación está dada en el texto. A la derecha se indican los casos extremos, en los cuales el valor del área $\mathcal{A}$, tiende a cero.

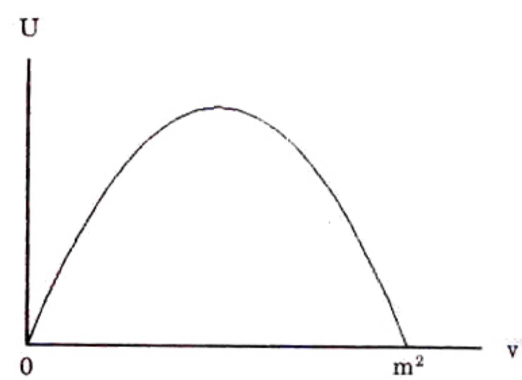
De la Figura, sabemos que $\mathcal{A}^2 = 16\,x^2\,y^2$, pero como el punto P se ubica en la elipse, debe cumplir la ecuación de la elipse, es decir:

$$y^2 = n^2\,[1 - x^2/m^2], \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{A}^2 = 16\,n^2\,x^2\,[1 - x^2/m^2].$$

Definiendo $v \equiv x^2$ y $U \equiv \mathcal{A}^2$ obtenemos la ecuación:

$$U = -16\,\frac{n^2}{m^2}\,v^2 + 16\,n^2\,v,$$

esta es la ecuación de una parábola, con $a = -16\,\frac{n^2}{m^2}$, $b = 16\,n^2$ y $c = 0$, de acuerdo a la definición de estas letras dadas inicialmente. Cuando $v = 0 \Longrightarrow x = 0$, $U = 0$ y por lo tanto el área $\mathcal{A}$ es nula. Lo mismo sucede si $v = m^2 \Longrightarrow x = m$, el área $\mathcal{A} = 0$. Como $a < 0$, la parábola tiene forma de $\bigcap$, de acuerdo a lo señalado anteriormente. También como $c = 0$, sabemos que pasa por el origen.



Para calcular el máximo de $\mathcal{A}$ debemos graficar la función, dándonos previamente los valores de m y n. En el caso más simple, con $m = n = 1$, se obtiene $U = -16\,v^2 + 16\,v$, y graficando esta función –o haciendo una tabla de valores–, encontramos que $v = 1/2$ maximiza U. De aquí se obtiene $x = y = 1/\sqrt{2}$, y por lo tanto, con estos valores de m y n, el área máxima se logra con un cuadrado. Este es un resultado esperado, puesto que al poner $m = n = 1$, la elipse se transforma en una circunferencia.

Ejercicio

Demuestre que para el caso $m \neq 1$ y $n \neq 1$, el máximo de la función U definida anteriormente ocurre para $v = m^2/2$ y que el valor del Area del rectángulo es: $\mathcal{A}_{\text{máx}} = 2 \text{ m n.}$ □

II.3. VELOCIDAD

II.3.1. Velocidad constante.

Como mencionamos anteriormente, iniciamos el estudio de la trayectoria de los cuerpos restringiéndonos a movimientos en una dimensión.

Para determinar la posición que ocupa el móvil en cada instante, usamos una línea recta, cuyos puntos identificamos con los números reales. Esta es la coordenada del cuerpo en movimiento.

Aún en el caso que dibujemos el móvil con sus dimensiones correspondientes, el cuerpo efectivamente estará representado sólo por un **punto**, de esta forma no existe ambigüedad al identificar la posición del cuerpo con el número real correspondiente a su coordenada.

Para describir el movimiento podemos usar una Tabla, como la mostrada al comienzo del Capítulo, que contenga en una columna el tiempo y a su derecha la posición en dicho instante.

Otra manera de representar esta trayectoria, es mediante un gráfico.

Línea recta

La representación gráfica es útil para visualizar las propiedades de la trayectoria de una partícula. La Tabla de Datos se usa de preferencia en los Laboratorios para guardar información.

Usualmente en un gráfico se asigna la variable independiente, el tiempo en este caso, al eje horizontal y la variable dependiente, la posición, al eje vertical.

A continuación analizaremos con detalle el significado de una línea recta en un gráfico *distancia* vs. *tiempo*. Comenzamos con la siguiente afirmación:

El gráfico más simple de distancia versus tiempo, es una línea recta y representa una partícula viajando con velocidad constante.

La tangente de una recta es independiente del punto donde la midamos: es constante.

$$\tan \alpha = \frac{\Delta x}{\Delta t} \equiv \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \tag{II.4}$$

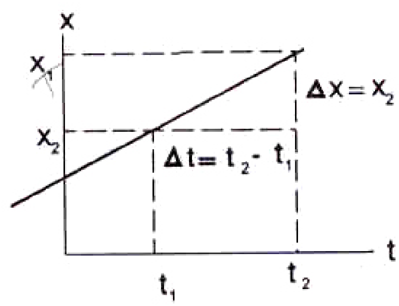


Figura II.7: El gráfico indica las distintas posiciones que toma una partícula a lo largo del tiempo, cuando viaja con velocidad constante. La pendiente (o inclinación) de la recta permite conocer su velocidad. La Figura ilustra el significado de la Δ introducida en el texto.

Como es un movimiento unidimensional la velocidad puede ser positiva o negativa dependiendo si $x_2 > x_1$ o viceversa.

Notación

La *diferencia* entre dos cantidades de la misma naturaleza y consecutivas, como por ejemplo: dos posiciones, dos instantes de tiempo, dos velocidades...etc., se indica mediante una Δ. Por ejemplo, Δx es la diferencia entre la posición x_2 y la posición x_1. $\Delta t \equiv [t_2 - t_1]$, es la diferencia entre el tiempo correspondiente a la posición x_2 y x_1, respectivamente. $\square$

La diferencia entre la coordenada de una partícula en el tiempo t_2 y la coordenada en el tiempo t_1, (con $t_2 > t_1$), se denomina *desplazamiento*:

$$\text{Desplazamiento} \equiv [x_2 - x_1] \equiv \Delta x.$$

El desplazamiento es una cantidad que tiene signo. Si la coordenada x de la partícula se incrementa en el tiempo, el desplazamiento es un número positivo; si al contrario, decrece en el transcurso del tiempo, el desplazamiento es negativo.

Definición:

Velocidad de una partícula es el cuociente entre el desplazamiento y el tiempo que transcurrió durante dicho desplazamiento.

$$v = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}. \tag{II.5}$$

En un gráfico $x(t)$ versus t, esta definición corresponde a la tangente del ángulo que forma la recta que une (x_1, t_1) y (x_2, t_2) con el eje horizontal.

A partir de esta expresión podemos determinar la ecuación que relaciona x con t en cualquier instante:

$$v \equiv \text{velocidad constante} = \frac{x - x_0}{t - t_0}. \tag{II.6}$$

x es la posición correspondiente al tiempo t y x_0 es la posición ocupada por el móvil en t_0. Despejando:

$$\begin{aligned} x - x_0 &= v\,(t - t_0), \\ x &= x_0 + v\,t - v\,t_0. \end{aligned}$$

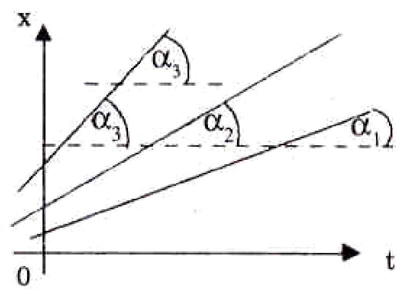
Supongamos que $t_0 = 0$, es decir, el reloj comienza a funcionar cuando la partícula se encuentra en x_0. (Es lo que sucede, por ejemplo, en una carrera de atletismo). Entonces:

En un movimiento con *velocidad constante*, la posición en un instante cualquiera, viene dada por:

$$x = x_0 + v \cdot t. \tag{II.7}$$

En un gráfico x versus t, esta ecuación representa una línea recta.

La inclinación de la recta con respecto al eje del tiempo es una medida de la velocidad de la partícula. $\tan\alpha_1 \equiv v_1$, $\tan\alpha_2 \equiv v_2$, $\tan\alpha_3 \equiv v_3$, con $v_3 > v_2 > v_1$.
Una recta horizontal corresponde a una partícula en reposo y una recta vertical (perpendicular al eje del tiempo) representa un objeto que tiene velocidad infinita.



II.3.2. Velocidad media

Es muy difícil encontrar un movimiento con velocidad constante. Lo natural es que la velocidad cambie a lo largo de la trayectoria. En el caso de un vehículo, los semáforos, los baches en el camino, el tránsito... etc. impiden mantener una rapidez uniforme. En estas condiciones un gráfico posición versus tiempo, adopta una forma complicada: el cambio de velocidad produce, de acuerdo al razonamiento anterior, un cambio en la pendiente de la curva y el gráfico deja de ser una línea recta y se transforma en una curva. En este caso, sólo tiene sentido definir una velocidad instantánea –asociada a cada instante de la trayectoria–, pero aquí postergamos esta definición e introducimos en su lugar el concepto de *velocidad media*.

La idea detrás de la *velocidad media* es intuitiva: por ejemplo, cuando se prepara un viaje, se desea saber cuánto se tardará en llegar allí. Si tenemos experiencia en este tipo de viajes, sabemos que si acostumbramos a viajar a una velocidad de 90 km/h, entonces, para estimar el tiempo de viaje, debemos considerar una velocidad de sólo 70 km/h, con ello tenemos presente las posibles detenciones, la demora en adelantar a los vehículos más pesados en las subidas... etc. Esta velocidad de 70 km/h, es precisamente lo que se denomina *velocidad media*. Indica que si enviamos un automóvil con una velocidad constante e igual a 70 km/h llegará simultáneamente con nosotros. Con esta *velocidad media* se compensan exactamente las detenciones y los tramos de la carretera en la cual viajamos más rápido.

Esta es la explicación intuitiva de la velocidad media.

Definición:

La *velocidad media* entre O y el punto P de la trayectoria, se define como el cuociente entre el camino recorrido, $x_P - x_O$, y el tiempo total empleado en recorrerla Δt. En geometría, esto corresponde a la tangente del ángulo α que se indica en la Figura. II.8.

A continuación generamos una definición cuantitativa (matemática). Notemos que en ambos casos –el modelo con velocidad constante, y el real, con velocidad variable–, la distancia recorrida es la misma. De este modo, usando la relación entre la distancia y el tiempo empleado en recorrerla, II.7, de la fórmula anterior, tenemos:

$$\text{Distancia Recorrida} = \text{Velocidad Media} \times \text{Tiempo Total del Viaje.}$$

Para un caso real, debemos dividirlo en etapas y suponer nuevamente que viaja con velocidad constante en cada una de dichas etapas. (Sólo cuando definamos la velocidad instantánea nos podremos deshacer de esta suposición). Enseguida procedemos a sumar las respectivas distancias recorridas en cada etapa, de acuerdo a la fórmula [II.7]:

$$
\begin{array}{rcl}
\text{Distancia Total Recorrida} & = & \\
\text{Velocidad Media Etapa 1} & \times & \text{Intervalo de Tiempo en Etapa 1} + \\
\text{Velocidad Media Etapa 2} & \times & \text{Intervalo de Tiempo en Etapa 2} + \\
 & \vdots & \\
\text{Velocidad Media Etapa N} & \times & \text{Intervalo de Tiempo en Etapa N.} \\
\hline
\text{Distancia Total Recorrida} & = & \bar{V}_1 \times \Delta t_1 + \bar{V}_2 \times \Delta t_2 + \bar{V}_3 \times \Delta t_3 + ...
\end{array}
$$

donde hemos definido Δt_k como el intervalo de tiempo en el cual el móvil viaja con velocidad $\bar{V}_k$.

Reemplazando la distancia total recorrida por la fórmula correspondiente a un observador que se mueve con velocidad constante, tenemos:

$$\text{Velocidad Media} \times \text{Tiempo Total del Viaje} \equiv \sum_{k=1}^{N} \bar{V}_k \times \Delta t_k$$

$$\text{Velocidad Media } \equiv \bar{V} = \frac{\sum_{k=1}^{N} \bar{V}_k \times \Delta t_k}{\sum_{k=1}^{N} \Delta t_k} \qquad \text{(II.8)}$$

La velocidad media en el punto P, de la Figura es:

$$\bar{V}(P) = \frac{[x_P - 0]}{[t_P - 0]} = \frac{x_P}{t_P}. \qquad \text{(II.9)}$$

Note que esta definición es igual a la dada anteriormente [II.8], el numerador en esta ecuación es precisamente la distancia recorrida x_P y el denominador es también el tiempo total t_P.

En la definición de la velocidad media sólo importa la posición final, la inicial y el tiempo empleado en el trayecto. Se pierde información acerca de las variaciones de la velocidad que pudieron ocurrir durante la trayectoria. Por ejemplo, el valor calculado para la velocidad media en el ejemplo de la Figura, ignora que el móvil estuvo detenido entre t_A y t_B.

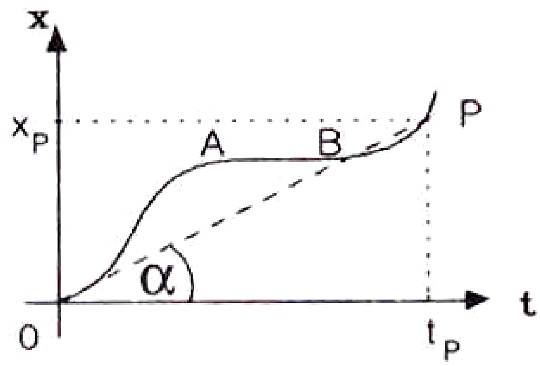


Figura II.8: La curva corresponde a un movimiento con velocidad variable. La velocidad media entre O y P se calcula dividiendo la distancia recorrida por el tiempo empleado en llegar a P. Con esto se pierde información acerca de los detalles de la trayectoria en los puntos intermedios.

Ejemplo

Un objeto se mueve con una velocidad constante $v_1 = 20$ m/s durante 20 s partiendo desde A, permanece en reposo por 20 s y continúa viaje en la misma dirección con una velocidad de 40 m/s durante otros 20 s, deteniéndose finalmente en un punto que denominamos B.

a) Graficar la velocidad media de cada uno de los intervalos versus tiempo.

b) Indique la forma del Gráfico desplazamiento versus tiempo, para este ejemplo.

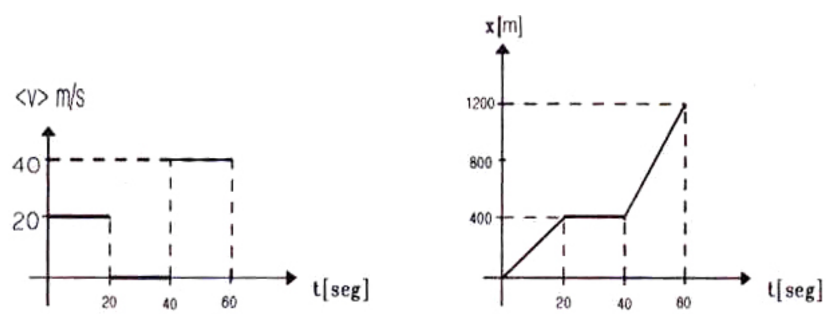


Figura II.9: Gráfico desplazamiento versus tiempo y velocidad media versus tiempo, obtenidos a partir de los datos de este ejemplo.

c) Calcule el valor de la velocidad media entre los puntos A y B de este problema.

Los valores de la velocidad en las distintas etapas son:

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 &= 20 \text{ m/s} \quad & \bar{v}_2 &= 0 \quad & \bar{v}_3 &= 40 \text{ m/s} \\ \Delta t_1 &= 20\,\text{s} \quad & \Delta t_2 &= 20\,s \quad & \Delta t_3 &= 20\,s \end{aligned}$$

$\Delta t_1 \equiv$ intervalo de tiempo en que la partícula viajó con velocidad v_1... etc.

La velocidad media se calcula sumando las distancias recorridas en cada una de las etapas y dividiendo esta cantidad por el tiempo total empleado en hacerlo.

$$\begin{aligned} \bar{v} = &\quad [\bar{v}_1 \cdot \Delta t_1 + 0 \cdot \Delta t_2 + \bar{v}_3 \cdot \Delta t_3]/(\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3) \\ = &\quad [20 \cdot 20 + 0 \cdot 20 + 40 \cdot 20]/[60s] \qquad \text{(II.10)} \\ \bar{v} = &\quad [400 + 800]/[60] = [1200]/[60] = 20 \text{ m/s} \ \square \end{aligned}$$

Ejemplo

En el equipo de la carrera de postas de un colegio, siempre ubican al más rápido en el último relevo. Si se conoce la velocidad media de cada uno de los atletas, demuestre que su distribución en la pista no mejora el tiempo del equipo.

Para simplificar el álgebra suponga que sólo participan dos atletas. No considere el posible cambio de rendimiento de un atleta debido a la presión sicológica de los últimos metros de la carrera.

Supongamos que los atletas alcanzan una velocidad media de $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$ respectivamente.

Lo que debemos calcular es la velocidad media del equipo, es decir el tiempo que les toma recorrer el total del trayecto: AB.

$$\bar{v}_{AB} = \frac{\text{trayectoria total}}{\text{tiempo empleado}} = [x_1 + x_2]/[t_1 + t_2]$$

$$x \equiv \quad x_1 = x_2 \quad \text{ambos recorren la misma distancia.}$$

$2\,x$ representa la distancia total recorrida, pero veremos que este dato no aparece en el resultado final. La explicación de este hecho es que la velocidad media del equipo debe depender de las velocidades de cada uno de los atletas y no de lo extenso de la trayectoria. Recuerde que la velocidad media de los atletas es constante, no depende de la distancia recorrida. Este es otro de los supuestos de este ejercicio: los atletas no se agotan.

Lo que puede influir, por cierto, es la fracción del trayecto que recorre cada uno de los atletas. Por ejemplo, si uno de los atletas realiza casi todo el trayecto, entonces la velocidad media del equipo será muy parecida a la velocidad media de este atleta.

Despejamos primero t_1. Usando la fórmula de la velocidad $v_1 = x_1/t_1 = x/t_1$ tenemos $t_1 = x/\bar{v}_1$.

Análogamente $t_2 = x/\bar{v}_2$

$$\begin{aligned} \bar{v}_{AB} &= 2x/\left\{[x/\bar{v}_1] + [x/\bar{v}_2]\right\}, \\ &= 2x/\{x(\bar{v}_1 + \bar{v}_2)/(\bar{v}_1\bar{v}_2)\} \end{aligned}$$

$$\bar{v}_{AB} = \frac{2\,\bar{v}_1\,\bar{v}_2}{(\bar{v}_1 + \bar{v}_2)}$$

o, de otra forma: $$\frac{2}{\bar{v}_{AB}} = \frac{1}{\bar{v}_1} + \frac{1}{\bar{v}_2}.$$

Como esta expresión no se altera si cambiamos $\bar{v}_1$ por $\bar{v}_2$, concluimos que la velocidad media del equipo es independiente del orden en que participen los atletas.

Supongamos que $\bar{v}_2$ *permanece fijo y distinto de cero*. Averiguemos cómo depende $\bar{v}_{AB}$ de $\bar{v}_1$. Esto corresponde al caso en que uno de los atletas recién se incorpora al grupo y el entrenador desea cuantificar el progreso que experimenta su equipo con este nuevo elemento.

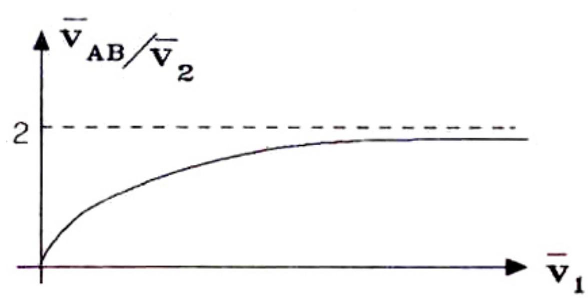


Figura II.10: Valor de la velocidad media cuando una de las velocidades del tramo permanece constante. La velocidad media depende en forma *no–lineal* con respecto a v_1. Si fuera lineal, al aumentar v_1 al doble, la velocidad media v_{AB} se incrementaría de igual forma.

Del gráfico correspondiente a esta situación se desprende que por muy rápido que sea el nuevo atleta la velocidad del equipo no puede sobrepasar el valor límite de $v_{AB} = 2v_2$.

Las aproximaciones hechas aquí parecen razonables; no hemos incluido la demora en el paso del bastón ni tampoco el aspecto sicológico: lo que un atleta puede dar si es exigido al máximo. Este último factor puede ser sin duda importante, pero hay que darse cuenta que no está relacionado con la máxima velocidad que puede alcanzar el atleta. En otras palabras, si el atleta más lento mejora notablemente su tiempo cuando es exigido –y aún sigue siendo el más lento–, conviene ubicarlo en el último tramo.□

Ejercicio

Verifique si esta última afirmación corresponde a la verdad. Suponga, por ejemplo, que $v_1 > v_2$ pero que el atleta cuya rapidez es v_1 mejora su tiempo en un 10 % en las finales, en cambio el otro lo hace en un 30 %. □

Ejercicio

a) Encuentre la velocidad media cuando participan 4 atletas.

b) ¿Cuál es la expresión para la velocidad media, en el caso de dos atletas, suponiendo que no corren distancias iguales sino que uno de ellos cubre un porcentaje $0 < \alpha < 1$ de la distancia total? □

A continuación estudiamos un movimiento en el que ocurre un cambio de signo en la velocidad. En este caso debemos asignar un sentido positivo al eje coordenado.

Ejemplo

Una pelota se lanza sobre una pared con una velocidad constante v_1. Al chocar con la muralla se devuelve con una velocidad v_2 cuyo módulo *(rapidez)* es, $\alpha\, v_1$, donde $0 < \alpha < 1$.

Si la distancia desde el punto de lanzamiento hasta la muralla es d, se pide:

a) Calcular el tiempo que demora la pelota en ir y volver al punto de partida, como una función de α.

Ida:

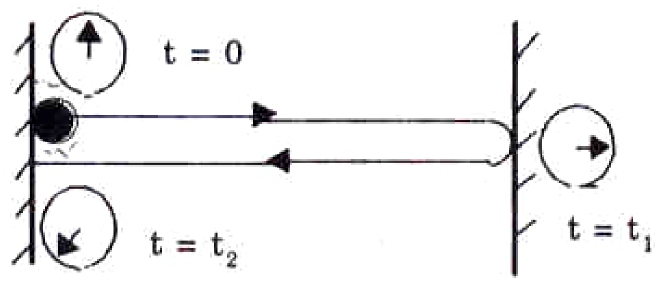
De la Figura tenemos,

$$t_1 = d/v_1.$$

Retorno:

$$v_2 < 0.$$

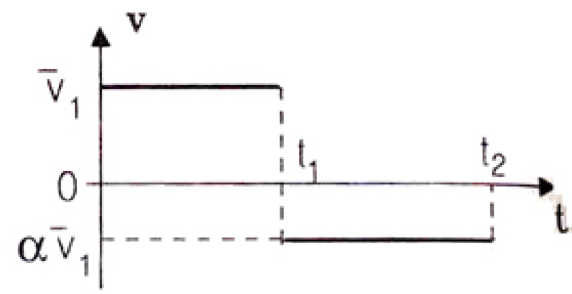
$$v_2 = [0 - d]/[t_2 - t_1].$$



Si ahora ponemos $v_2 = -\alpha\, v_1$
entonces, $t_2 - t_1 = d/[\alpha\, v_1]$.
De aquí,

$$t_2 = d[1/v_1 + 1/(\alpha\, v_1)],$$

$$t_2 = t_1[1 + 1/\alpha]$$



b) Se pide graficar velocidad y rapidez versus t (Ver Figura).

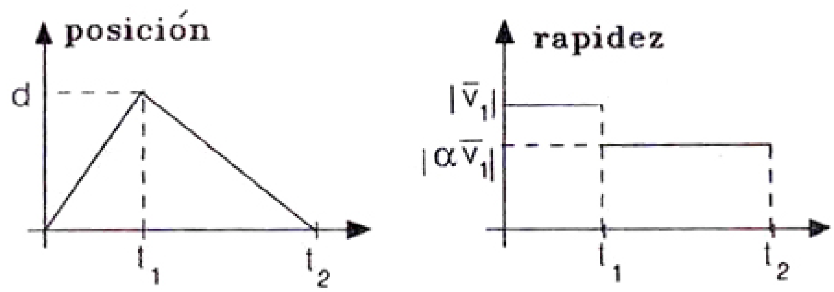


Figura II.11: Gráfico *posición* versus *tiempo* y *rapidez* versus *tiempo*. Recuerde que la rapidez sólo considera el módulo de la velocidad. Note que a pesar que la distancia recorrida es 2 d, la posición final coincide con el punto de partida.

c) Haga un gráfico de la distancia recorrida versus el tiempo empleado, tomando como origen el punto de lanzamiento.□

En el siguiente párrafo haremos una afirmación cuya validez se extiende desde aquellos ejemplos cuyo movimiento se realiza con velocidad constante hasta los casos en que la velocidad varía arbitrariamente. Su demostración la postergamos hasta más adelante.

> En el gráfico *velocidad* versus *tiempo*, el área encerrada bajo la curva equivale al camino recorrido durante dicho intervalo. Este es un resultado general, válido para una velocidad constante o variable.

Verifiquemos esta afirmación en el ejemplo anterior; estudiemos la trayectoria de t_1 a t_2. Por definición, el móvil parte del origen como se muestra en la Figura. Como en cada uno de los trayectos recorre la distancia d, tenemos:

$$d = v_1 \times t_1 = |v_2| \times (t_2 - t_1),$$

pero ambos productos son iguales al área encerrada en el gráfico velocidad versus tiempo, de cada uno de estos casos. De hecho en el rebote de la pelota, d es negativo, debido a que el *desplazamiento* es negativo, por esta razón consideramos el valor absoluto de v_2.

En el caso general, aquél con velocidad variable, tomaremos pequeños intervalos y aproximaremos, en cada uno de ellos, la velocidad correspondiente con una velocidad constante característica de cada intervalo. De esta forma la distancia total recorrida sigue siendo el área bajo la curva, y estará compuesta por la sumatoria de los rectángulos asociados a cada intervalo de tiempo en los que se dividió el tramo total.

El análisis de esta aproximación es el contenido de la siguiente sección.

II.4. VELOCIDAD INSTANTANEA

Una partícula que se traslada con velocidad constante corresponde al caso más simple que podemos imaginar. Sólo en casos muy particulares ocurre este fenómeno en la naturaleza. Sin embargo, como es difícil registrar la velocidad en cada punto de la trayectoria, se considera, como alternativa, la velocidad media.

Para analizar el movimiento de una partícula con más detalle se requiere conocer el valor de la velocidad en tramos intermedios de la trayectoria.

Recordemos que el valor de la velocidad media *no depende* de la subdivisión del tramo. Por ejemplo si subdividimos OP en cuatro intervalos arbitrarios y calculamos en cada uno de ellos la velocidad media y a partir de estos valores calculamos la velocidad media entre O y P de acuerdo a la fórmula II.8, esta operación, *no altera* el valor de la velocidad media calculada, por ejemplo, dividiendo el trayecto OP en sólo dos tramos.

Hasta ahora sólo podemos estudiar problemas de los cuales conocemos la velocidad media en un cierto número de intervalos. Al ir de un tramo al siguiente, la velocidad media experimenta un salto para alcanzar el nuevo valor. Obviamente esto es artificial. La velocidad varía en forma continua, no a saltos.

Para disminuir la magnitud de los saltos es necesario subdividir el tramo en intervalos más pequeños. Si pretendemos hacerlos imperceptibles, debemos aumentar el número de intervalos, haciéndolos más y más diminutos. En el límite –cuando el tramo es más pequeño de lo que podemos imaginar pero distinto de cero–, necesitamos conocer la velocidad asociada a cada uno de los puntos de la trayectoria. Esto es lo que se denomina la *velocidad instantánea.*

Para realizar este proceso debemos calcular la velocidad media entre dos puntos que estén lo más cercano posible. En el proceso de acercar un punto al otro, el valor de la

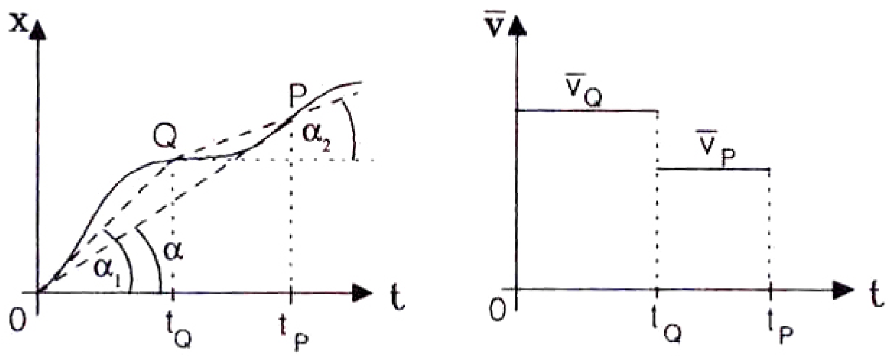


Figura II.12: El objeto se desplaza con una velocidad variable. A cada intervalo se asocia un valor para su velocidad (velocidad media), que depende del intervalo mismo. En la Figura se toma un punto intermedio Q para comparar con el caso original en el cual sólo se contabiliza el punto inicial O y el final P.

velocidad (la pendiente de la cuerda en la Figura II.13) va cambiando, pero se aproxima a un límite que se denomina la *velocidad instantánea* y que corresponde a la inclinación de la tangente a la curva en dicho punto.

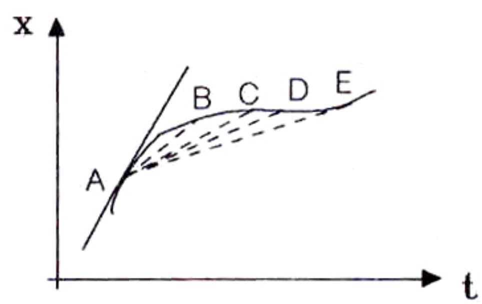


Figura II.13: En esta Figura se aprecia que al ir acercando el punto E hacia A, la cuerda se aproxima más y más a la tangente trazada por el punto A. El valor de la tangente en A, corresponde al valor de la velocidad instantánea en A.

La descripción anterior corresponde a una operación matemática bien definida, que se denomina tomar el *límite* de una función. La velocidad instantánea se define como:

$$\text{velocidad instantánea en } \; t_0 \equiv v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \left[\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} \right] \quad \text{(II.11)}$$

La operación $\lim_{t\to t_0}$, en la forma señalada corresponde a tomar la *derivada* de la función $x(t)$. En términos geométricos, la derivada es la inclinación de la tangente a la curva en el punto t_0. Esto es lo que se observa en la Figura II.13, al acercarse al punto A tanto como sea posible: $(D \to C \to B \to ...)$ la cuerda tiende a coincidir con la tangente en el punto A.

En un gráfico *desplazamiento* versus *tiempo*, la velocidad instantánea en un punto P, es la inclinación de la tangente a la curva en dicho punto.

Nota acerca del límite.

El hecho de tomar puntos tan cercanos $t \to t_0$, revela que al dividir por $[t - t_0]$ en la ecuación II.11, corremos el riesgo de estar dividiendo por cero. La respuesta a este temor es la siguiente: primero, no se está dividiendo por cero puesto que la operación lím señala que $[t - t_0]$ tiende a un valor tan pequeño como se quiera, pero *distinto de cero.* En segundo lugar, si la función $x(t)$, es continua –y este es el tipo de funciones que nos interesan–, al acercar $t \to t_0$, la diferencia entre $x(t)$ y $x(t_0)$ es también muy pequeña e igual a una suma de términos que contienen potencias de $[t - t_0]$.

$$x(t) - x(t_0) = b \cdot [t - t_0] + c \cdot [t - t_0]^2 + ...$$

donde b, c, ... son constantes que dependen del valor de $x(t_0)$. Solo diremos que este es un resultado general y que se denomina desarrollo de Taylor.

Volviendo al argumento previo, al tomar el límite, cuando $t \to t_0$, las potencias de $[t-t_0]$ que aparecen en $x(t)-x(t_0)$, se hacen arbitrariamente pequeñas y no necesitamos considerarlas salvo la primera, $[t - t_o]$ que se simplifica con el denominador y da el valor de la derivada.□

II.4.1. Derivada.

Como es difícil retener y manejar tantas definicones, a continuación ilustraremos estas ideas con una serie de ejemplos resueltos.

Ejemplo

Demostrar que $\lim_{\delta\to 0}\left[\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha+\delta) - \operatorname{sen}\alpha}{\delta}\right] = \cos\alpha.$

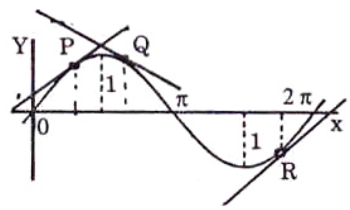


Figura II.14: El gráfico representa la función sen α. El valor de la pendiente de la tangente en cada uno de los puntos indicados tiene el mismo valor que cos α, donde α es el valor correspondiente de abcisa en P, Q y R.

Este problema está resuelto en el Apéndice, aquí lo analizaremos usando geometría. Para ello nos referiremos a la Figura que se incluye a continuación.

$$OD = 1, \quad \operatorname{sen}\alpha = DC, \quad \operatorname{sen}(\alpha+\delta) = AB,$$

$$\operatorname{sen}(\alpha+\delta) - \operatorname{sen}\alpha = AB - DC = EB,$$

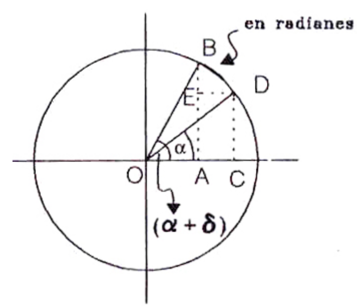
pero, $\cos(\alpha+\delta) = \dfrac{EB}{BD} = \dfrac{EB}{\delta}$.
Aquí hemos aproximado el arco BD con la cuerda BD $\simeq \delta$ (medida en *radianes*). Entonces:

$\operatorname{sen}(\alpha+\delta) - \operatorname{sen}\alpha \simeq \delta \cdot \cos(\alpha+\delta)$,

despejando $\cos(\alpha+\delta)$,

$\cos(\alpha+\delta) \simeq [\operatorname{sen}(\alpha+\delta) - \operatorname{sen}\alpha]/\delta$,

tomando el límite $\delta \to 0$, la expresión se transforma en una igualdad.



$$\lim_{\delta\to 0} \cos(\alpha+\delta) \equiv \cos\alpha = \lim_{\delta\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\delta) - \operatorname{sen}\alpha}{\delta}.$$

Para acortar la escritura usamos la siguiente notación:

$$\frac{d}{d\alpha}\operatorname{sen}\alpha = \cos\,\alpha \qquad \text{(II.12)}$$

Esta ecuación afirma que el cuociente entre la variación de $\operatorname{sen}\alpha$ debida a un incremento infinitesimal de α, (un aumento muy pequeño), dividida por este incremento δ, es un número finito que resulta igual a $\cos\,\alpha$, cuando se toma el límite $\delta \to 0$.

En el gráfico de $\operatorname{sen}\alpha$ versus α, la derivada representa geométricamente la pendiente de la tangente a la curva, como se muestra en la Figura.

En forma similar:

Ejercicio

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{\cos(\alpha+\delta) - \cos\,\alpha}{\delta} \equiv \frac{d\,\cos\,\alpha}{d\alpha} = -\operatorname{sen}\alpha,$$

y con la misma interpretación geométrica, $\dfrac{d\,\cos\,\alpha}{d\,\alpha}$ representa el valor de la tangente en el punto α del gráfico $\cos\,\alpha$ versus α.□

En general, definimos la derivada de una función como:

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} \equiv \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \tag{II.13}$$

el significado geométrico corresponde a evaluar la tangente a la función $f(x)$ en el punto x, en un gráfico de $f(x)$ versus x.

Si la tangente a una curva en un punto es una línea horizontal, la derivada en dicho punto es nula: $\tan\,0 = 0$.

Propiedades de los límites.

A continuación establecemos dos propiedades de los límites, que por definición, pertenecen también a las derivadas y que es fundamental conocerlas:

$$\begin{aligned} &\lim_{\Delta x\to 0} \{f(x+\Delta x) \;\pm\; g(x+\Delta x)\} \equiv \\ &\quad \lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x) \;\pm\; \lim_{\Delta x\to 0} g(x+\Delta x). \end{aligned} \tag{II.14}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} \{c\cdot f(x+\Delta x)\} = c\cdot \left\{\lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)\right\}. \tag{II.15}$$

En palabras: el límite de una suma de funciones $f(x)$ y $g(x)$ es igual a la suma de los límites de cada una de las funciones, y el límite del producto de una constante c por una función $f(x)$ es igual al producto de la constante por el límite de la función.

En el caso de las derivadas, estas propiedades se escriben

$$\frac{d\,\{f(x) \pm g(x)\}}{d\,x} \equiv \frac{d\,f(x)}{d\,x} \pm \frac{d\,g(x)}{d\,x}, \tag{II.16}$$

$$\frac{d\,\{c \cdot f(x)\}}{d\,x} \equiv c \cdot \frac{d\,f(x)}{d\,x}. \tag{II.17}$$

En lo que respecta al producto de funciones, en este caso la derivada satisface la *Regla de Leibnitz*:

$$\frac{d}{dx}\left[f(x) \bullet g(x)\right] = \left(\frac{d}{dx}f(x)\right) \bullet g(x) + f(x) \bullet \frac{d}{dx}g(x). \tag{II.18}$$

La regla de Leibnitz indica que la derivada de un producto de funciones es igual a la suma de la derivada de una de las funciones, $f(x)$ por la otra función, $g(x)$ más la derivada de la segunda función $g(x)$ por la primera $f(x)$.

Esta operación se puede aplicar a cualquier función. A continuación incluimos una lista de derivadas, sólo usaremos un par de ellas en los capítulos posteriores.

TABLA DE DERIVADAS

$$\frac{d}{d\,\alpha}(\operatorname{sen}\alpha) = \cos\,\alpha \tag{II.19}$$

$$\frac{d}{d\,\alpha}(\cos\,\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha \tag{II.20}$$

$$\frac{d}{d\,\alpha}(\tan\,\alpha) = +\frac{1}{\cos^2\,\alpha} \tag{II.21}$$

$$\frac{d}{d\,\alpha}(\cot\,\alpha) = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha} \tag{II.22}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,\alpha}(\csc\,\alpha) &= -\frac{\cos\,\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} \\ &= -\cot\,\alpha \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\end{aligned} \tag{II.23}$$

$$\frac{d}{d\,\alpha}(\sec\,\alpha) = +\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos^2\,\alpha} = \frac{\tan\,\alpha}{\cos\,\alpha} \tag{II.24}$$

$$\frac{d}{dx}(x^r) = r x^{r-1} \qquad (\ \forall \text{ r, ya sea entero o real.}) \tag{II.25}$$

$$\frac{d}{dx}\,(e^{\alpha\,x}) = \alpha\,e^{\alpha\,x} \tag{II.26}$$

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}. \tag{II.27}$$

Ejemplo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = & \lim_{\Delta\,x\to 0}\left\{\left[\frac{1}{x+\Delta\,x}-\frac{1}{x}\right]\cdot\frac{1}{\Delta\,x}\right\} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\left\{\left[\frac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)}\right]\frac{1}{\Delta x}\right\} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\left\{\left[\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}\right]\cdot\frac{1}{\Delta x}\right\} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{-1}{x(x+\Delta x)}\right] = -\frac{1}{x^2}
\end{aligned}$$

Ejemplo

Para n $\equiv$ número entero, pruebe que: $\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$.

$$\begin{aligned}
f(x)\equiv x^n,\ \ f(x+\Delta x) &\equiv (x+\Delta x)^n, \\
\frac{d}{dx}f(x)\equiv\frac{d}{dx}(x)^n &= \lim_{\Delta x\to 0}\tfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}, \\
&= \lim\nolimits_{\Delta x\to 0}\left\{(x+\Delta x)^n-(x)^n\right\}\cdot\tfrac{1}{\Delta x},
\end{aligned}$$

desarrollando $\{(x+\Delta x)^n - (x)^n\}$,

$$\frac{d\,[x^n]}{dx} = \quad \text{lím}_{\Delta x\to 0}\, \frac{\{x^n + n\,x^{n-1}\Delta x/1! + n\,(n-1)\,x^{n-2}[\Delta x]^2/2! + ... - (x)^n\}}{\Delta x},$$

$$= \quad \text{lím}_{\Delta x\to 0}\, \frac{\{nx^{n-1}\Delta x/1! + n\,(n-1)\,x^{n-2}[\Delta x]^2/2! + ...\}}{\Delta x},$$

$$= \quad \text{lím}_{\Delta x\to 0}\, \{nx^{n-1} + n\,(n-1)\,x^{n-2}(\Delta x)/2! + ...\},$$

tomando el límite, obtenemos:

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}.$$

Ejemplo

Usando la regla de Leibnitz, encuentre el valor de $\frac{d}{dx}(x\,\text{sen}x)$. Primero intentamos con el método usual:

$$\frac{d}{dx}(x\ \ \text{sen}\,x) \equiv \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x+\Delta x)\text{sen}(x+\Delta x) - x\ \ \text{sen}x}{\Delta x},$$

ordenando esta expresión:

$$\frac{d}{dx}(x\ \ \text{sen}x) = \lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{[x\ \ \text{sen}(x+\Delta x) - x\ \ \text{sen}x] + \Delta x\,\text{sen}(x+\Delta x)}{\Delta x}\right\},$$

$$= \quad \text{lím}_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{x\,\text{sen}(x+\Delta x) - x\,\text{sen}x}{\Delta x}\right\} + \text{lím}_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{\Delta x\,\text{sen}(x+\Delta x)}{\Delta x}\right\},$$

sacando x, fuera del límite en el primer término,

$$x\ \text{lím}_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{\text{sen}(x+\Delta x) - \text{sen}x}{\Delta x}\right\} + \text{lím}_{\Delta x\to 0}\left\{\text{sen}(x+\Delta x)\right\},$$

y recordando la expresión de la derivada de la función seno, obtenemos:

$$\frac{d}{d\,x}(x\,\text{sen}x) = x\ \cos\ x + \text{sen}\,x.$$

A continuación encontraremos este mismo resultado pero usando la regla de Leibnitz, para ello identificamos $f(x) \equiv x$, y $g(x) \equiv \mathit{sen}\,x$. Aplicando la fórmula y recordando los valores de la derivada de sen x y x, tenemos:

$$\frac{d}{dx}(x\ \operatorname{sen} x) = x\,\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x + \frac{d\,x}{dx}\operatorname{sen} x, = x\ \cos\ x + \operatorname{sen} x$$

Ejemplo

Encontrar el valor de $\dfrac{d}{d\,x}\sqrt{x}$.

$$\frac{d\,\sqrt{x}}{d\,x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left\{\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta\,x}\right\},$$

multiplicando ambos miembros por el mismo factor:

$$\begin{aligned}\frac{d\,\sqrt{x}}{d\,x} &= \text{lím}_{\Delta x \to 0}\left\{\frac{[\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}][\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}]}{[\Delta\,x][\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}]}\right\},\\ &= \text{lím}_{\Delta x \to 0}\left\{\frac{[x+\Delta x]-x}{[\Delta\,x][\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}]}\right\},\end{aligned}$$

simplificando:

$$= \text{lím}_{\Delta x \to 0}\left\{\frac{1}{[\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}]}\right\},$$

y tomando el límite:

$$\frac{d}{d\,x}\sqrt{x} = \frac{1}{2\,\sqrt{x}}.$$

Este resultado coincide con la fórmula dada para la derivada de x^r donde r es un número real cualquiera, en particular 1/2.

Aplicaciones de la derivada en la cinemática de una partícula.

Ejemplo

Calcular explícitamente la velocidad en un instante t cualquiera, usando la expresión para $x(t)$ dada en la ecuación II.7.

$$\begin{aligned}v(t) &= \lim_{\epsilon \to 0}\frac{x(t+\epsilon)-x(t)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0}\frac{[x_0+v_0\cdot(t+\epsilon)]-[x_0+v_0\cdot t]}{\epsilon}\\ &= \lim_{\epsilon \to 0}\frac{v_0\cdot\epsilon}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0}\ v_0 = v_0\ .\end{aligned}$$

Este resultado indica que la expresión $x(t)$ que aparece en la ecuación II.7, efectivamente corresponde al movimiento de una partícula con velocidad constante v_0 (i.e. independiente del tiempo).□

Ejemplo

La altura de un objeto en caída libre, está dada por:

$$z(t) = z_0 - \frac{1}{2}\, g\, t^2.$$

Usando esta expresión y la definición de la velocidad, ecuación II.7, calcule la velocidad en un instante t cualquiera.

$$\begin{aligned} v(t) &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{z(t+\epsilon) - z(t)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{[z_0 - \frac{1}{2}g\cdot(t+\epsilon)^2] - [z_0 - \frac{1}{2}g\cdot t^2]}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{-\frac{1}{2}g\cdot\epsilon\cdot(2t+\epsilon)}{\epsilon} = -\lim_{\epsilon\to 0} \frac{g\cdot(2t+\epsilon)}{2} = -g\, t \end{aligned}$$

La velocidad instantánea decrece linealmente a medida que transcurre el tiempo. El signo negativo de la velocidad indica que la partícula se está desplazando en el sentido negativo del eje z.

Sin embargo, la *rapidez* –definida como el módulo de la velocidad de la partícula–, aumenta a medida que transcurre el tiempo: $|v(t)| = g\, t$.

El movimiento descrito por la función $z(t)$ de este ejemplo corresponde a la caída libre (es decir, sin que otras interacciones actúen durante el trayecto), de una partícula en el campo gravitacional terrestre desde una altura z_0.

Si la velocidad de una partícula cambia a medida que transcurre el tiempo, entonces la partícula tiene una *aceleración*.□

Si la inclinación de la tangente a la curva que representa la posición de un objeto a través del tiempo *no* muestra cambios *abruptos*, afirmamos que la velocidad instantánea está bien definida en cada punto de la trayectoria.

Cualquier variación abrupta de la pendiente en un punto del gráfico posición versus tiempo revela la existencia de un cambio repentino en la magnitud de la velocidad. El valor de la tangente (o la velocidad) en la vecindad de este punto, depende del lado por el cual nos aproximemos a ella. En definitiva no tiene un valor único.

En cualquiera de estas situaciones, tenga o no cambios abruptos, siempre podemos graficar la velocidad en función del tiempo.

II.5. ACELERACION

II.5.1. Definición

En la sección anterior definimos la velocidad como la inclinación de la tangente a la curva $x(t)$ versus t. Analogamente, en un gráfico *velocidad* versus *tiempo*, definimos la aceleración como la inclinación de la tangente a la curva que determina la velocidad en cada instante.

La aceleración se define como la razón entre el cambio de velocidad y el intervalo en el cual ésta ocurre.

$$a = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{II.28}$$

Para estudiar las propiedades de la aceleración, definida de este modo, comenzamos, como es usual, por el caso más sencillo.

De acuerdo a esta estrategia, inicialmente *no* consideramos cambios arbitrarios de velocidad como el que muestra la Figura a continuación, por las dificultades matemáticas que involucra.

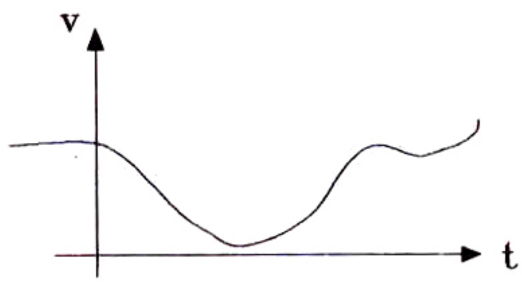


Figura II.15: Gráfico de *velocidad* versus *tiempo* para una aceleración que varía en el tiempo. Las trayectorias con aceleración constante corresponden a una recta en este gráfico. La inclinación de la recta nos da el valor de la aceleración.

A continuación nos referimos a las dimensiones de la aceleración y enseguida comenzamos con el caso de *aceleración constante*.

II.5.2. Dimensiones y unidades. (SI)

$$[a] \equiv \frac{[\Delta v]}{[\Delta t]} = \left[\frac{L}{T^2}\right] = \frac{(m/s)}{s} = m/s^2.$$

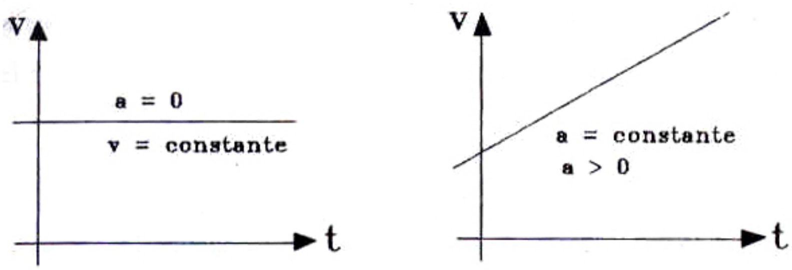


Figura II.16: Gráfico de *velocidad constante* versus *tiempo* y *velocidad* versus *tiempo* con aceleración constante.

La dimensión de longitud se escribe como $[L]$ y la dimensión correspondiente al tiempo, como [T].

II.5.3. Aceleración constante

Como la aceleración es, por definición, la inclinación de la tangente a la curva *velocidad* versus *tiempo*, el caso particular de una aceleración constante queda representado, en este tipo de gráfico, por una línea recta.

A partir de la definición de aceleración:

$$a = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0}$$

obtenemos la expresión para la velocidad. Para acortar los cálculos suponemos el origen del tiempo en $t_0 = 0$. Despejando la velocidad de la fórmula anterior, llegamos a:

$$a = \frac{v - v_0}{t} \Rightarrow a \cdot t = v - v_0,$$

donde reemplazamos t_1 por t, un tiempo arbitrario, puesto que la pendiente de la curva es una sola y no depende del valor que tome t. De aquí tenemos:

$$v = v_0 + a \cdot t. \qquad \text{(II.29)}$$

Esta expresión nos da la velocidad en el instante t, bajo el supuesto que $a =$ constante y $t_0 = 0$.

II.5.4. La posición en función del tiempo si la aceleración es constante

Antes de calcular la distancia recorrida hasta el instante t, necesitamos calcular la velocidad media $\bar{v}$, para un movimiento con una aceleración constante.

Recordemos que, por definición, la velocidad media es la velocidad constante con la cual un móvil debe viajar para recorrer *la misma distancia* que en el caso dado, empleando el mismo tiempo. Cuantitativamente la velocidad media es $\bar{v} = x/t$, con (x $\equiv$ distancia recorrida en el intervalo de tiempo t). De aquí obtenemos:

$$x = \bar{v}\, t. \tag{II.30}$$

La expresión $\bar{v} \cdot t$ tiene *dimensiones de distancia.*

$$\bar{v} \cdot t \equiv \frac{[L]}{[T]} \cdot [T] = [L].$$

Por otra parte, sabemos que el área bajo la curva en un gráfico *velocidad* versus *tiempo* representa la distancia recorrida. En el caso de aceleración constante, entonces la distancia recorrida es el área bajo el trapecio de la Figura II.17, y su valor es, de acuerdo al resultado que obtuvimos en el capítulo anterior:

$$\frac{1}{2}(v + v_o) \cdot t = \text{distancia recorrida en el tiempo t} \equiv\ x.$$

Esta distancia debe ser –por definición de velocidad media–, la misma que recorrió el móvil con velocidad constante $\bar{v}$,

$$\frac{1}{2}(v + v_0) \cdot t = \bar{v}\, t = x, \tag{II.31}$$

de la primera igualdad se obtiene la expresión para la velocidad media.

La velocidad media de una partícula moviéndose con aceleración constante es:

$$\bar{v} = \frac{v_f + v_i}{2}. \tag{II.32}$$

Los gráficos *velocidad* versus *tiempo*, para los casos de aceleración constante, son líneas rectas cuya pendiente indica la magnitud de la aceleración: si la aceleración es nula, el gráfico es una línea horizontal. Este es un resultado similar al obtenido en un gráfico *desplazamiento* versus *tiempo* para un móvil con velocidad constante.

Si la aceleración cambia en el tiempo, la pendiente en el gráfico *velocidad* versus *tiempo* cambia y la recta se transforma en una curva. El método para encontrar la distancia recorrida –área bajo la curva–, es el mismo pero su expresión matemática no es simple.

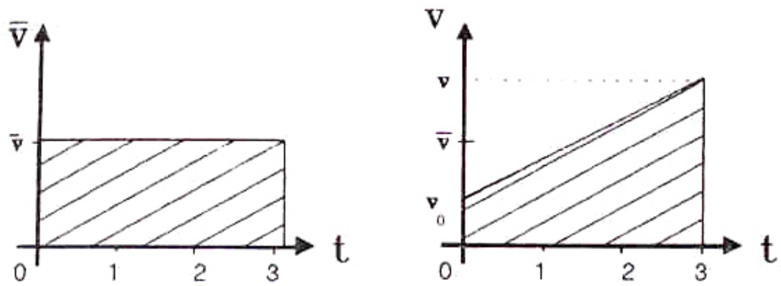


Figura II.17: En la Figura se indica el área bajo la curva para el caso *aceleración nula* y *aceleración constante*. En este último caso el área achurada corresponde a un trapecio cuyas bases son v y v_0, y su altura t.

Retornando a la expresión encontrada para la distancia recorrida: $x = \bar{v} \cdot t$, y reemplazando aquí el resultado obtenido para la velocidad media, tenemos:

$$x = \frac{1}{2}(v + v_o)t$$

pero la velocidad, en cualquier instante, está dada por $v = v_o + at$

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{2}(v + v_o)t \\
x &= \frac{1}{2}(v_o + a \cdot t + v_o) \cdot t \\
x &= v_o t + \frac{1}{2}at^2 \qquad \text{(II.33)}
\end{aligned}$$

Revisamos las dimensiones en cada uno de los términos de esta última ecuación:

$$\begin{aligned}
[x] =& \quad L, \\
[v_o \cdot t] =& \quad [\tfrac{L}{T} \cdot T] = L, \\
[\tfrac{1}{2}\tfrac{L}{T^2}] \cdot [T^2] =& \quad L.
\end{aligned}$$

1/2 es un número y *no* tiene dimensiones.

Los números que aparecen como factores frente a una cantidad física no tienen dimensiones.

II.5.5. Fórmulas de cinemática en una dimensión y con aceleración constante.

$$a = \text{constante}, \;\; t_o = 0$$

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \bar{v} \cdot t && \text{(II.34)} \\ v &= v_o + a \cdot t && \text{(II.35)} \\ x &= x_0 + v_o t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 && \text{(II.36)} \\ 2\,a\,(x - x_0) &= v^2 - v_o^2 && \text{(II.37)} \end{aligned}$$

En todas estas fórmulas, con excepción de II.37, el tiempo aparece explícitamente. *Esta última ecuación II.37, se obtiene a partir de las anteriores* y se caracteriza por no contener el tiempo t. Para llegar a dicha expresión debe operarse de la siguiente forma: de $v = v_o + a \cdot t$ podemos despejar el tiempo:

$$t = \frac{v - v_o}{a}.$$

Reemplazando t en la ecuación correspondiente a la distancia recorrida:

$$x = v_o \left(\frac{v - v_o}{a} \right) + \frac{1}{2}\, a \cdot \left(\frac{v - v_o}{a} \right)^2,$$

y desarrollando cada uno de los términos de esta última expresión:

$$\begin{aligned} x =& \;\; \frac{v \cdot v_o}{a} - \frac{1}{a} v_o^2 + \frac{1}{2\,a} v^2 - \frac{v_o \cdot v}{a} + \frac{1}{2\,a} v_o^2 \\ x =& \;\; \frac{1}{2\,a}(v^2 - v_o^2), \qquad \text{o mejor} \\ 2\,a \cdot x =& \;\; v^2 - v_o^2 \end{aligned}$$

Esta última fórmula es la ecuación II.37. Como acabamos de mostrar, esta ecuación *es una combinación de las anteriores.*

II.6. EJEMPLOS.

Ejemplo

Un auto de carrera acelera desde $v = 0$ hasta alcanzar una velocidad de 240 km/h en una distancia de sólo 1/4 de kilómetro. ¿Cuál es el valor de su aceleración?

Datos:

t = 0, $x_0 = 0$, $v_0 = 0$, $v_f = 240$ km/h, a = cte.

Si conocemos la distancia que recorre y la velocidad que alcanza en dicha distancia, debemos usar la ecuación II.37 para despejar directamente la aceleración.

$$\begin{aligned} 2\,a \cdot x &= v^2 - v_0^2, \\ a = \frac{v^2}{2\,x} &= \frac{(240)^2}{2 \cdot (1/4)} \left[\frac{(\mathrm{km/h})^2}{\mathrm{km}}\right]. \end{aligned}$$

Las unidades empleadas oscurecen la magnitud de la aceleración encontrada. Expresémosla en m/s^2.

$$a = 2 \cdot (240)^2 \frac{\mathrm{km/h}}{\mathrm{h}} = 2 \cdot (240)^2 \frac{1000\ \mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s} \cdot 3600\ \mathrm{s}},$$

de aquí se obtiene el valor numérico de la aceleración,

$$a = 2 \cdot \left[\frac{240}{3600}\right]^2 \cdot 1000\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}] = 40/3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2},$$

pero la aceleración de gravedad, g, es aproximadamente $9,8$ m/s^2, por lo tanto, la aceleración del automóvil en la partida es de $a = 40/3$ m/s^2 $\approx \frac{4}{3}$ g.

Una estimación para el valor de la máxima aceleración que se puede comunicar a un automóvil sin que *resbale* es de ~ 1.5 **g**. En realidad este valor es, tal como se menciona, sólo una estimación; depende de otros parámetros, como el tamaño y naturaleza de la superficies que están en contacto, si existió resbalamiento previo...etc. □

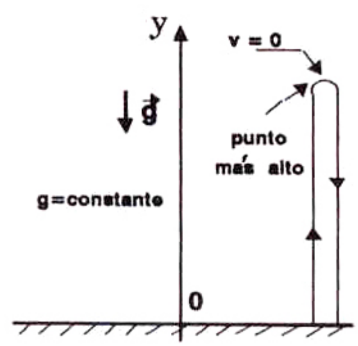
Una vez que asignamos –por conveniencia– un sentido positivo a nuestro eje de coordenadas, las aceleraciones pueden ser positivas (+) o negativas (desaceleraciones, (−)), dependiendo si coinciden con el sentido del eje coordenado o no.

Es necesario recordar que la física del problema, es decir lo que determina el comportamiento de una partícula en una cierta situación, no depende del sentido (+) o (–) asignado arbitrariamente al eje.

Un ejercicio típico es el de una pelota lanzada al aire. (No considere la viscosidad provocada por el aire.)

Una vez disparada, la experiencia nos indica que ésta disminuye constantemente su velocidad hasta que finalmente cambia de signo y la pelota retorna al piso nuevamente. El cambio de velocidad indica la presencia de una aceleración. En este caso *la aceleración mantiene constante su magnitud y sentido durante toda la trayectoria del objeto.*

Nuestra elección del sentido positivo implica que $a \equiv -g = -9{,}8$ m/s^2. La orientación escogida para los ejes de referencia es arbitraria y la trayectoria del punto no puede depender de ella. Las matemáticas son autoconsistentes, por lo tanto, si en el desarrollo del problema, respetamos la convención adoptada, la respuesta será consistente con lo que se observa en la realidad.



Ejemplo

Encontrar el tiempo que tarda, en volver a su punto de lanzamiento, una partícula disparada verticalmente al aire.

El ejercicio propuesto, con el sistema coordenado estipulado en la Figura, es el siguiente:

Datos:

$v_0 \equiv$ velocidad de lanzamiento de un objeto, $y_0 = 0, \quad g \equiv 9{,}8$ m/s^2. □

Supongamos que el cuerpo demora un tiempo T en volver a su punto de partida. En el instante que retorna al origen, se produce la siguiente igualdad en la ecuación II.36:

$$y = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2,$$

$$y(T) = 0 = v_0\, T - \frac{1}{2} g\, T^2 \Rightarrow \text{ 2 soluciones: } T = 0, \quad T = \frac{2v_0}{g}$$

Ambas soluciones tienen un significado físico: $T = 0$ indica el instante en que la partícula abandona el piso y $T = 2\,v_0/g$, el tiempo que tardó en retornar al piso, después de alcanzar su altura máxima.

Cabe señalar que, en algunos ejemplos, una de las soluciones debe ser desechada por carecer de interpretación física.

Revisemos las dimensiones de esta última solución:

$$T = [T] = \left[\frac{L}{T}\right]\left[\frac{1}{L/T^2}\right] = T.$$

Usando la información acumulada, podemos averiguar el tiempo que tarda en alcanzar la altura máxima. Llamemos τ a este instante:

$$v(\tau) = v_0 - g \cdot \tau$$

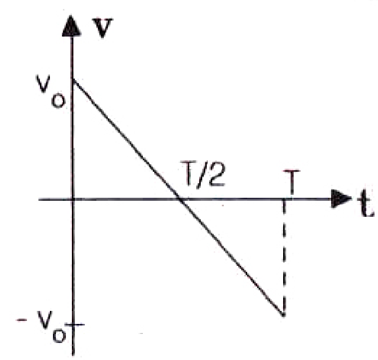
En ese instante, la velocidad debe ser nula puesto que si tuviera una pequeña componente positiva, podría aún elevarse un poco más y no estaríamos en el verdadero máximo de la altura. De aquí:

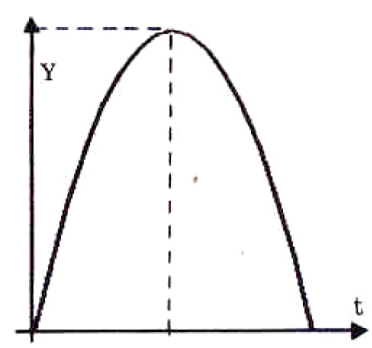
$$0 = v_0 - g \cdot \tau,$$
$$\tau = v_0/g \equiv \frac{T}{2}.$$

Ahora podemos calcular el valor de la altura máxima:

$$y_1 = v_0^2/g - \frac{1}{2}v_0^2/g = \frac{1}{2}v_0^2/g$$

Finalmente incluimos un gráfico de *velocidad* versus *tiempo* y *posición* versus *tiempo*. Notemos que la velocidad media es nula y que el área bajo la curva *velocidad* versus *tiempo*, también, si tenemos en cuenta los signos que aparecen. Del gráfico sabemos exactamente la posición en cada instante de la trayectoria. Casi siempre utilizaremos g, la aceleración de gravedad como una *constante*.





En realidad depende de la altura sobre la Tierra y también de la composición al interior del terreno donde se ubica el observador. Más adelante mostraremos que el error que se comete al hacer esta aproximación es despreciable, si la altura que alcanza el objeto es muy pequeña comparada con el radio de la Tierra.

Tampoco hemos considerado la fricción del aire. Este aspecto será propuesto como un ejercicio numérico para ser resuelto con el computador.

Ejemplo

Un tren puede acelerar a una razón de $a_1 = 20$ [cm/s] y desacelerar a 100 [cm/s]. Determine el tiempo mínimo que puede demorar este tren para ir de una estación a otra, situada a 2 km de distancia.

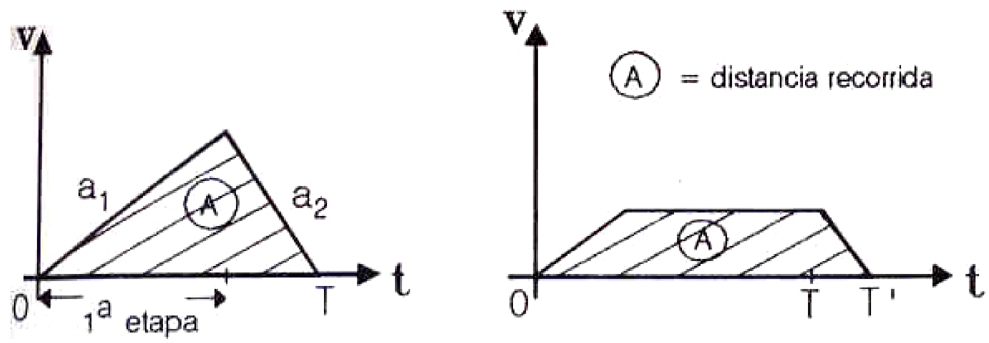


Figura II.18: Gráfico *velocidad* versus *tiempo* en dos situaciones posibles: el tren acelera por un cierto tiempo y después frena para alcanzar a detenerse frente a la estación y el caso en el cual mantiene una velocidad constante en un tramo intermedio.

Intuitivamente sospechamos que la máxima distancia recorrida en el mínimo de tiempo, ocurre cuando el tren acelera todo el tiempo hasta un cierto instante en el cual debe poner los frenos (desacelerar) para alcanzar a detenerse justo frente a la próxima estación.

Esta conjetura queda demostrada al interpretar el significado del área que encierra cada uno de los dos gráficos *velocidad* versus *tiempo* que se incluyen. Ambos involucran un mismo valor para el área –o sea, distancia recorrida–, pero el primero lo hace en un intervalo menor.

Resolveremos este problema en tres formas diferentes.

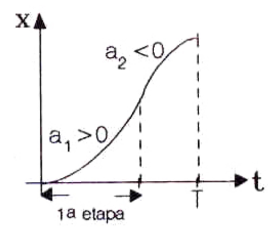
Método gráfico

Designamos la distancia a recorrer como $L = 2{,}000$ m. Otros datos son la aceleración $a_1 = 0{,}2$ m/s^2 y la desaceleración $a_2 = -1$ m/s^2. Con ellos podemos dibujar el gráfico *velocidad* versus *tiempo*. La base del triángulo es T, el tiempo buscado, que lo descomponemos en $T = t_1 + t_2$, donde t_1 es el tiempo durante el cual el maquinista acelera y t_2 el intervalo en el cual desacelera.

La altura h del triángulo se determina de la siguiente forma: $h = t_1 \tan\alpha = t_2 \tan\beta$. Ahora, usando trigonometría y la definición de aceleración como la pendiente en el gráfico $v(t)$ versus t, tenemos:

$$a_1 \equiv \tan\alpha, \;\; -a_2 \equiv \tan(\pi - \beta) = -\tan\beta.$$

Por lo tanto: $T = t_1 + t_2 = h\left[\frac{1}{a_1} + \frac{1}{|a_2|}\right].$



El área del triángulo es $L = \frac{1}{2}\, h\, T$, y reemplazando h por el valor obtenido en función de las aceleraciones tenemos:

$$T^2 = 2\,L\,\left[\frac{1}{a_1} + \frac{1}{|a_2|}\right].\square$$

Método analítico

A continuación resolvemos el problema en forma analítica, recordando que *ocurren dos aceleraciones distintas* y, como las ecuaciones que describen el movimiento:

$$\begin{aligned} i) \quad x - x_0 &= v_0(t - t_0) + \tfrac{1}{2} a \cdot (t - t_0)^2 \\ ii) \quad v_f &= v_0 + a(t - t_0) \end{aligned}$$

son válidas solamente para el caso de aceleración constante, debemos usarlas dos veces consecutivas, cambiando el valor de la aceleración.

• Primera etapa

Condiciones iniciales:

$v_0 = 0$ Dato. El tren parte del reposo.
$x_0 = 0$ Nuestra elección para el origen de coordenadas.
$t_0 = 0$ Definición del instante inicial.

Las dos ecuaciones de movimiento, incluyendo estas condiciones iniciales, se transforman en:

$$x_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 \;\; (a_1 > 0). \qquad \text{(II.38)}$$

Hemos designado t_1 al instante cuando el maquinista comienza a desacelerar.

$$v_{f_1} = a_1\, t_1 \tag{II.39}$$

Tenemos dos ecuaciones y tres *incógnitas*: v_{f_1}, t_1, x_1 . Como existen más incógnitas que ecuaciones, no podemos resolverlas. Necesitamos más ecuaciones.

- Segunda etapa.

Debemos escribir nuevamente las ecuaciones de movimiento, recordando que las condiciones iniciales en esta etapa (indicadas en la columna de la izquierda) son los valores que alcanzan las variables al final de la primera etapa.

$$\begin{aligned}
x_{\text{inicial}} &= x_1, \quad \text{además} \quad x_{\text{final}} \equiv x_2 = L,\\
t_{\text{inicial}} &= t_1, \quad v_{\text{final}} = v_{f_2} = 0,\\
v_{\text{inicial}} &= v_{f_1}
\end{aligned}$$

Con estas condiciones iniciales, las ecuaciones de movimiento dan el siguiente resultado para el instante $t = T$, cuando el tren se detiene:

$$L - x_1 = v_{f_1}(T - t_1) - \frac{1}{2}a_2(T - t_1)^2. \tag{II.40}$$

Una segunda ecuación se obtiene al imponer que la velocidad final en esta etapa sea nula: el tren se detiene en B, $v_{f_2} = 0$.

$$\begin{aligned}
v_{f_2} \equiv 0 &= v_{f_1} - a_2(T - t_1),\\
\text{como} \quad v_{f_1} &= a_1\, t_1,\\
0 &= a_1 t_1 - a_2(T - t_1).
\end{aligned} \tag{II.41}$$

Tenemos *cuatro ecuaciones*: las dos obtenidas en la primera etapa y las dos del segundo tramo. Las incógnitas son también cuatro: (v_{f_1}, t_1, x_1, T). Despejando $(T - t_1)$ de la última ecuación [II.41], se tiene $(T - t_1) = [a_1/|a_2|]\, t_1$, y reemplazando en la ecuación anterior, [II.40], obtenemos:

$$L - x_1 = \frac{a_1^2}{a_2}\, t_1^2 - \frac{1}{2}\,\frac{a_1^2}{a_2}\, t_1^2 = \frac{1}{2}\,\frac{a_1^2}{a_2}\, t_1^2. \tag{II.42}$$

Substituyendo x_1 por su valor en función de t_1 de la ecuación II.38, obtenemos el valor de L en función de t_1:

$$\begin{aligned} L - \frac{1}{2} a_1 \, t_1^2 &= \frac{1}{2} \frac{a_1^2}{a_2} \, t_1^2, \\ \text{ordenando,} \quad 2\,L &= a_1 (1 + \frac{a_1}{a_2}) \, t_1^2, \\ t_1 &= [\frac{2L\,a_2}{a_1\,(a_1 + a_2)}]^{1/2}. \end{aligned} \tag{II.43}$$

Verifiquemos que la dimensión corresponde efectivamente a la de un tiempo:

$$\left[\frac{2La_2}{a_1(a_1+a_2)}\right] = \frac{L \cdot \frac{L}{T^2}}{L/T^2\,[L/T^2 + L/T^2]} = \frac{L}{L/T^2} = T^2.$$

El resto de las incógnitas: t_1, T (que es el tiempo buscado), v_{f_1} y x_1, podemos despejarlas con las ecuaciones restantes.

Para comparar con nuestro resultado anterior, despejaremos T.

De la ecuación II.41 obtenemos T en función de t_1:

$$T = \frac{a_1 + a_2}{a_2} \, t_1,$$

reemplazando en esta ecuación la expresión para t_1, se comprueba que ambos resultados coinciden:

$$T = \frac{a_1 + a_2}{a_2} \left[\frac{2\,L}{(a_1 + a_2)} \, \frac{a_2}{a_1}\right]^{1/2} = \left\{2\,L \, \left[\frac{1}{a_1} + \frac{1}{|a_2|}\right]\right\}^{1/2} . \square$$

Es muy conveniente, en casos como éste en que se abusa del álgebra, comprobar el resultado en situaciones extremas, más simples, y que constituyan un caso particular del anterior donde el resultado aflore con menos esfuerzo. De esta forma, contamos con un medio independiente para verificar si hemos cometido algún error en nuestro desarrollo.

Veamos si este resultado funciona en algún caso extremo. Supongamos que el tren tiene unos frenos extraordinariamente potentes y que puede detenerse casi instantáneamente, sin importar el valor de la velocidad que haya adquirido hasta ese momento. Sin mirar las ecuaciones, podemos deducir que, en este caso, el tren puede permanecer acelerando hasta el instante mismo en que haga su entrada en la estación de la ciudad próxima, justo entonces frenará y se detendrá inmediatamente.

Este caso corresponde, en las ecuaciones a poner $|a_2| = \infty$, o mejor, un valor muy grande comparado con a_1. Con esta aproximación obtenemos que $1/|a_2| << 1/a_1$ y por lo tanto $1/|a_2| + 1/a_1 \approx 1/a_1$. Reemplazando esta aproximación en la expresión para T, resulta:

$$T = [2\,L/a_1]^{1/2}\,,$$

que es lo esperado en este caso extremo, $T = t_1$.

Es imposible detener un tren de este modo, para que ello ocurra deberíamos ser capaces de disipar una cantidad inmensa de energía en muy corto tiempo. Pero este inconveniente no está incluido en las ecuaciones que hemos usado hasta ahora y por tanto no genera ninguna contradicción.

Ejemplo

Se incluye un desarrollo alternativo para resolver el ejemplo anterior.

Hacemos uso de las ecuación II.37, donde el tiempo no aparece explícitamente:

$$1^{\text{era}}\,\text{Etapa} \qquad 2\,a_1 x_1 = v_{f_1}^2,$$

$$2^{\text{da}}\text{Etapa} \qquad -2\,a_2(L - x_1) = 0 - v_{f_1}^2.$$

Las constantes que aparecen aquí están definidas en el ejemplo anterior. Tenemos dos ecuaciones y dos incógnitas x_1, v_{f_1}. Sumando ambas ecuaciones, obtenemos:

$$a_1 x_1 - a_2(L - x_1) = 0, \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{a_2 L}{a_1 + a_2}.$$

A partir de este valor se encuentra t_1:

$$v_{f_1} = a_1 t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v_{f_1}}{a_1} = \frac{(2a_1 x_1)^{1/2}}{a_1} \quad \Rightarrow t_1 = \left[\frac{2a_2 L}{a_1(a_1 + a_2)}\right]^{1/2}.$$

En la 2^{da} **Etapa** tenemos:

$$v_{f_2} = 0 = v_{f_1} - a_2(T - t_1) \quad \Rightarrow T - t_1 = \frac{(2a_1 x_1)^{1/2}}{a_2} = \left[\frac{2a_1 L}{a_2(a_1 + a_2)}\right]^{1/2},$$

$$T = \left[\frac{2L}{a_1 + a_2}\right]^{1/2} \left\{ \left[\frac{a_1}{a_2}\right]^{1/2} + \left[\frac{a_2}{a_1}\right]^{1/2} \right\}.$$

Compruebe que este resultado es el mismo obtenido anteriormente.

Compruebe que si $a_1 = 0$, o $a_2 = 0$, $\Longrightarrow\ T \longrightarrow \infty$, puesto que estos casos equivalen a que la locomotora no puede empezar a moverse ($a_1 = 0$) o que no tiene frenos ($a_2 = 0$). En ambos casos la solución matemática del problema es que el tren no se mueva.

Compruebe que si $a_2 \longrightarrow \infty$, entonces $T \longrightarrow [2\,L/a_1]$.

En resumen, podemos concluir que el método gráfico es el más sencillo y directo para resolver este problema.

II.7. VISCOSIDAD

Es sabido que la velocidad adquirida durante la caída libre a través de la atmósfera, no aumenta linealmente con el tiempo que demora su caída, como era de esperar, si suponemos que la aceleración gravitacional g, permanece constante.

Existe otra fuerza, proveniente del choque que experimenta el cuerpo con las moléculas que componen la atmósfera. Estos choques lo frenan y, en el caso de la caída libre, imponen un valor límite para su velocidad.

De no existir este efecto, las gotas de lluvia alcanzarían la Tierra con mucho mayor velocidad y los granizos se convertirían en verdaderos proyectiles mortales cayendo sobre nuestras cabezas.

Se deja propuesto resolver *numéricamente* el problema del paracaidista que se lanza desde un avión. La ecuación *propuesta* para el cambio de velocidad que experimenta el paracaidista durante su caída, es la siguiente:

$$\frac{d}{dt}v = g - c \cdot v/m \tag{II.44}$$

La constante c es un número que se obtiene empíricamente y representa el coeficiente de arrastre o viscosidad del aire y su origen es el choque con las moléculas de la atmósfera que le quitan velocidad al objeto que cae. Este coeficiente depende de muchos factores como la superficie del objeto que cae, la temperatura del medio, las moléculas que lo componen ...etc.

Las dimensiones del parámetro c son [masa/tiempo], y un valor típico para un paracaidista es: $c \approx 12,5 \longrightarrow 17,0$ [kg/m].

En forma numérica la derivada de la velocidad (o de cualquiera otra función) se calcula de la siguiente forma:

$$\frac{d\,v}{dt} \simeq \frac{\Delta\, v}{\Delta t} = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i}. \tag{II.45}$$

Para la velocidad que aparece a la derecha de la ecuación de movimiento en II.44, podemos usar el valor medio de la velocidad en ese intervalo $[v(t_{i+1}) + v(t_i)]/2$.

Introduciendo estas expresiones en la ecuación II.44, tenemos un algoritmo para encontrar la velocidad $v(t_{i+1})$ en función de $v(t_i)$.

Ejemplo (Revista **Quantum**, Julio–Agosto 1992, pag. 27.)

A continuación plantearemos un caso con aceleración variable y que es posible resolver siguiendo un método similar al descrito en esta sección.

Una hormiga sale de su nido y se aleja en línea recta con una velocidad que resulta ser inversamente proporcional a la distancia que la separa de su origen. Cuando la hormiga está en el punto A, a una distancia de un metro del nido, su velocidad es de 2 cm/s. ¿Cuánto tiempo le tomará a la hormiga ir desde el punto A hasta B, situado a dos metros del nido?

Designamos el nido como el origen de coordenadas. De esta forma la velocidad es inversamente proporcional a la distancia recorrida, entonces:

$$v = \frac{k}{x}, \quad \text{k = constante de proporcionalidad.}$$

Para determinar la constante k, usamos las condiciones iniciales:

$$v_o = 0,02 \text{m/s}, \quad x_o = 1 \text{ m}, \quad \Rightarrow k = 0,02 \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}}\right].$$

A continuación usaremos el método gráfico para resolver este problema.

Como no conocemos la velocidad en función del tiempo, no podemos estimar el tiempo necesario para cubrir la distancia desde A hasta B, a partir del área encerrada por esta curva.

El área bajo la curva *velocidad* versus *distancia*, puede ser calculada directamente a partir de los datos, pero no corresponde a una cantidad física conocida, como apreciamos a partir de sus dimensiones: $v(x) \times \Delta x = \left[\frac{m^2}{s}\right]$.

Si logramos ubicar una cantidad que tenga las dimensiones de tiempo y que sea posible graficarla, hemos resuelto el problema. La más directa es $1/v(x)$ versus x. A partir de las dimensiones del área encerrada bajo esta curva, tenemos: $1/v(x) \times \Delta\, x = \left[\frac{1}{\text{m/s}}\,\text{m}\right] = [\text{s}]$.

En este gráfico la ordenada es $y \equiv 1/v(x) = x/k$, de modo que es la ecuación de una recta que pasa por el origen y cuya pendiente es $1/k$. El valor del área encerrada por el trapecio que, a su vez corresponde al tiempo empleado en viajar entre A y B, es:

$$T_{A\to B} = \left[\frac{1}{v_A} + \frac{1}{v_B}\right] \times \text{ distancia recorrida} = \frac{x_B^2 - x_A^2}{2\,k}.$$

Solución numérica.

Es posible resolver este problema usando el método numérico propuesto a continuación. De hecho, se puede encontrar el valor de la posición en función del tiempo, para cualquier instante.

A partir de las diferencias finitas, la velocidad se define como:

$$\bar{v}_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t},$$

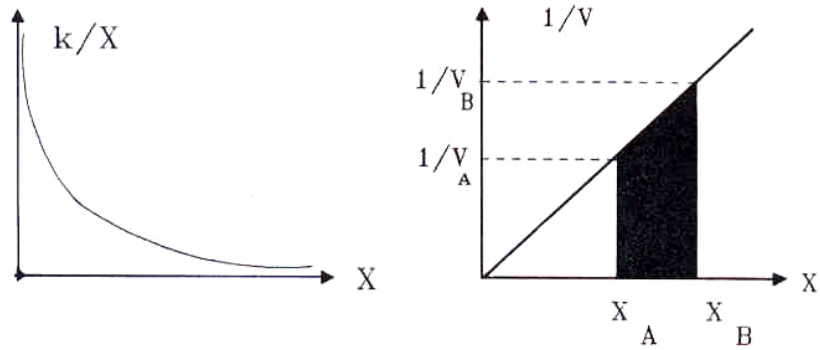


Figura II.19: Diagrama de la *velocidad* versus *desplazamiento* e *inverso de la velocidad* versus *desplazamiento* para la hormiga.

donde tomamos el mismo Δt para cada uno de los intervalos y asociamos una velocidad media $\bar{v}_i$ al intervalo $[x_i,\, x_{i+1}]$, cuyo valor es posible calcularlo en este caso, puesto que conocemos la velocidad en función de la posición:

$$\bar{v}_i = \frac{k}{x_i[\text{promedio}]} = \frac{k}{\dfrac{x_{i+1}+x_i}{2}} = \frac{2\,k}{x_{i+1}+x_i}.$$

Reemplazando esta última expresión en la definición de $\bar{v}$ obtenemos una fórmula que relaciona x_{i+1} con x_i

$$x_{i+1}^2 - x_i^2 = 2\,k\,\Delta t.$$

Si escribimos esta ecuación para cada uno de los intervalos de tiempo convenientemente, podemos encontrar su solución:

$$\begin{array}{rcl}
x_1^2 - x_o^2 &=& 2\,k\,\Delta t, \;\; \text{con } \Delta t = \text{constante} \\
x_2^2 - x_1^2 &=& 2\,k\,\Delta t, \\
x_3^2 - x_2^2 &=& 2\,k\,\Delta t, \\
\vdots &=& \vdots \\
x_N^2 - x_{N-1}^2 &=& 2\,k\,\Delta t, \\
\hline
\text{sumando:} \quad x_N^2 - x_o^2 &=& 2\,k\,N\,\Delta t.
\end{array}$$

El tiempo transcurrido desde que la hormiga estaba en x_o hasta que llegó a la posición $x \equiv x_N$ es $t = N\,\Delta t$. Como x_N es un punto arbitrario, esta expresión se escribe, en forma general:

$$x^2(t) = x_o^2 + 2\,k\,t.$$

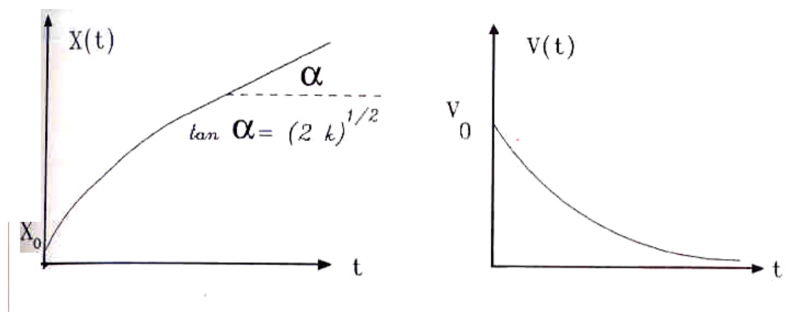


Figura II.20:

Hemos obtenido la posición en función del tiempo para este movimiento. Es más, esta expresión coincide con el resultado exacto, como se puede verificar usando cálculo diferencial.

Al conocer la velocidad como función de la posición, también conocemos la velocidad en función del tiempo, al reemplazar x por su dependencia en el tiempo:

$$\left[\frac{k}{v(t)}\right]^2 = \left[\frac{k}{v_o}\right]^2 + 2\,k\,t,$$

y recordando que $k = v_o\,x_o$, despejamos $v(t)$,

$$v(t) = \frac{v_o}{\left[1 + \dfrac{2\,v_o\,t}{x_o}\right]^{1/2}}.$$

Al graficar esta expresión, nos damos cuenta que hemos resuelto un caso particular de un móvil con *aceleración variable.*

II.8. EJERCICIOS

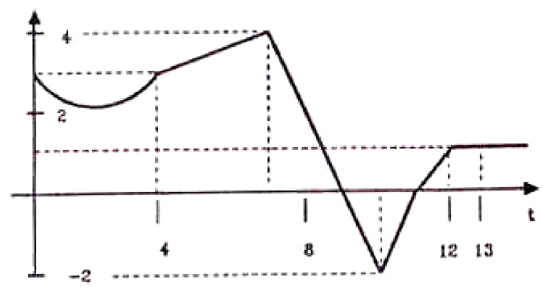
1.– Un auto viaja entre dos ciudades A y B . De ida ($A \to B$) viaja a 90 km/hr y de vuelta ($B \to A$), por falta de visibilidad, lo hace a 60 km/hr.

¿Cuál es la *rapidez media* (no su velocidad media), para el viaje de ida y vuelta?

2.– Una persona conduce un automóvil durante 10 km a una velocidad de 90 km/h y luego otros 10 km a 70 km/h. ¿Cuál es la rapidez media durante el trayecto de 20 km?

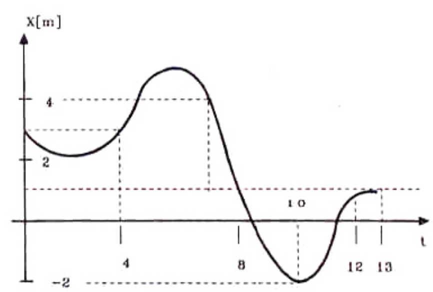
3.– La Figura muestra la posición de una partícula en función del tiempo. La curva es parte de una parábola entre t =0 y t= 4 s. Encuentre la velocidad media durante los siguientes intervalos de tiempo:

a) 0 s $< t <$ 4 s.
b) 7 s $< t <$ 10 s.
c) 0 s $< t <$ 13 s.
d) 10 s $< t <$ 13 s.



4.– A partir del gráfico de la Figura: En qué instantes o intervalos:

a) La velocidad (instantánea) es cero.
b) La velocidad es positiva.
c) La velocidad es negativa.
d) El módulo de la velocidad es máximo.
e) La velocidad es constante.
f) La aceleración es positiva.
g) La aceleración es negativa.
h) Si en el instante t_0 la partícula está en el origen, ¿en qué instante la distancia medida desde el origen será máxima?



5.– Basándose en la Figura:

a) *Estime* la velocidad media en el intervalo de 2 $s < t < 10$ s.

b) Encuentre la velocidad instantánea para $t = 10$ s.

c) ¿Indique para qué valor (o valores) de t, la velocidad instantánea de la partícula es nula?

d) ¿En qué instante la rapidez es máxima?

e) ¿En qué instante la aceleración es nula?

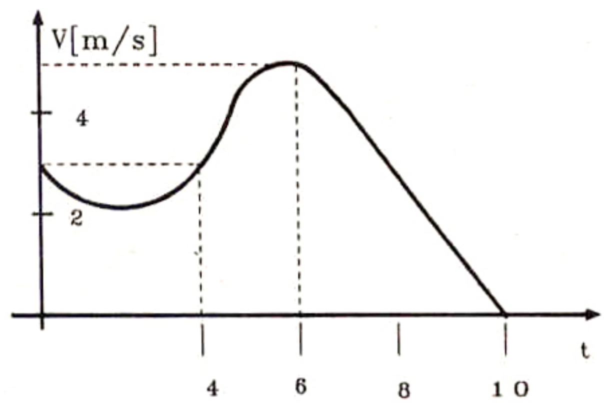


Figura II.21: Ejercicio # 5

Respuesta: e) En los instantes $t = 2$ s y $t = 6$ s.

6.– Dos trenes, A y B, están separados inicialmente por una distancia de 13 Km y viajan a su encuentro con la misma rapidez: 30 km/hr cada uno. Desde A parte una paloma mensajera que se encuentra con el tren B 10 minutos después. Calcule la velocidad con que vuela la paloma *con respecto al tren A*.

7.– En el gráfico se detalla la posición de una partícula que se mueve a lo largo del eje x. De acuerdo a la información contenida en el gráfico, señale:

a) Entre qué instantes el movimiento se realiza con velocidad constante.

b) En qué instante el móvil permanece detenido.

c) Calcule la distancia total recorrida desde $t = 0$ hasta $t = 15$ s.

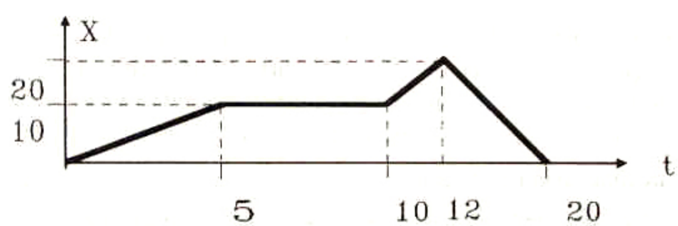


Figura II.22: Ejercicio # 7

8.– A partir del gráfico *velocidad* versus *tiempo* de una partícula que viaja a lo largo del eje x, señale:

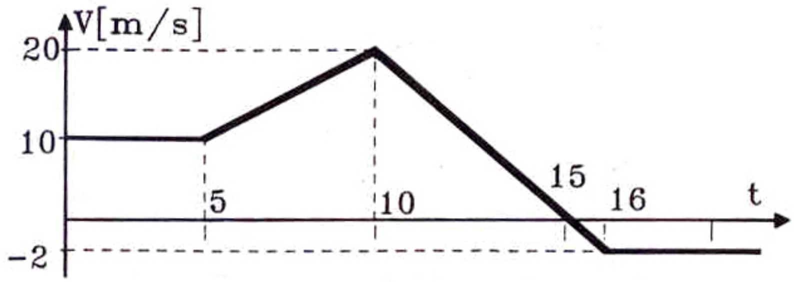


Figura II.23: Ejercicio # 8

a) ¿Entre qué instantes el movimiento se realiza con velocidad constante?

b) ¿Cuándo es el movimiento acelerado?

c) ¿En qué instante el móvil está detenido?

d) Calcule la distancia total recorrida desde $t = 0$ hasta $t = 16$.

9.– Un automovilista (viajando de Norte a Sur en la Carretera Panamericana) pasa a exceso de velocidad frente al retén de Talca. 5 minutos más tarde sale en su persecución un policía motorizado a una velocidad de 107 Km/h.

Lo alcanzó 87 minutos después que el infractor pasó frente al retén.

¿Cuál era la velocidad del infractor?

10.– Un pasajero corre con una velocidad de 4 m/s para lograr alcanzar el tren. Cuando está a una distancia d de la portezuela más próxima, el tren comienza a moverse con una aceleración constante $a = 0,4\ m/s^2$ alejándose del pasajero.

a) Si $d = 12$ m, y el pasajero sigue corriendo ¿Alcanzará a subirse al tren?

b) Haga un gráfico de la posición $x(t)$ del tren escogiendo $t = 0$ para $x = 0$. En el mismo gráfico dibuje la función $x(t)$ correspondiente al pasajero para diversos valores de la distancia de separación d, incluyendo $d = 12$ m, y también hallar d_c, el valor crítico, para el cual el pasajero alcanza apenas el tren.

c) Para la separación crítica d_c.

-¿Cuál es la velocidad del tren cuando el pasajero lo alcanza?

-¿Cuál es su velocidad media en este intervalo?

-¿Cuál es el valor de d_c?

11.– Considere dos varillas muy largas. Una horizontal, fija y la otra formando un ángulo ϕ, constante, con la primera y moviéndose verticalmente con rapidez v_0 constante. Determine la velocidad con que se mueve el punto de intersección de las dos varillas.

Figura II.24: Ejercicio # 11

12.– A continuación presentamos la bitácora de un viajero madrugador. Se pide que usted grafique su posición, velocidad y aceleración en función del tiempo. Se recomienda comenzar con la velocidad. Toda la historia relatada transcurre en una dimensión.

En t_0, este individuo se levanta y camina hacia su auto con velocidad uniforme. En t_1, sube al auto y calienta el motor hasta t_2, instante en que comienza a acelerar uniformemente rumbo a la oficina.

En t_3, alcanza una velocidad razonable que la mantiene hasta que, al ver una luz roja – en t_4–, comienza a desacelerar uniformemente hasta detenerse en t_5.

Cuando se enciende la luz verde, en t_6, recuerda que olvidó traer un documento importante. Decide regresar, acelerando hasta el instante t_7, adquiriendo una velocidad razonable que mantiene hasta t_8, cuando comienza a desacelerar uniformemente (frena) hasta detenerse frente a la puerta de su casa.

13.– Se deja caer una piedra, sin velocidad inicial, desde el borde superior de un pozo y se espera hasta escuchar el ruido que ésta produce al chocar con el agua 5 s después.

Determine la profundidad del pozo, teniendo en cuenta que el valor de la velocidad del sonido es 340 m/s.

14.– Un monje sale de su Monasterio con la aparición del Sol en el horizonte y se dirige hacia una Villa cercana ubicada en un cerro. Camina todo el día, con breves descansos, llegando a la Villa al atardecer. Al amanecer del siguiente día, retorna al Monasterio siguiendo el mismo sendero del día anterior para llegar de regreso al atardecer.

¿Cuál es la probabilidad que al bajar pase por un mismo lugar a la misma hora a la cual pasó, en sentido contrario, el día anterior?

Indicación: Describa ambos trayectos en un solo gráfico e investigue el significado del punto de intersección.

15.– Dos móviles, A y B, se encuentran detenidos a una distancia de 30 m el uno del otro. Repentinamente, A parte del reposo con una aceleración constante de 10 m/s^2, un segundo más tarde parte a su *encuentro* el cuerpo B, con una velocidad constante de 10 m/s.

a) ¿Qué distancia ha recorrido cada uno de ellos, hasta el instante en que se encuentran?

b)¿Cuánto tiempo tardan en encontrarse?

c) Grafique la posición de ambos móviles en función del tiempo, en un sólo gráfico.

16.– Panchito *suelta* una pelota desde una altura h. La pelota parte del reposo, choca más tarde con el suelo, rebotando con una rapidez *proporcional* a la que tenía en el instante que tocó el suelo. Es decir: $|V_{\text{rebote}|} = \alpha\,|V_{\text{llegada}}|$, con $(0 < \alpha < 1)$.

La pelota sube y luego cae para volver a rebotar. La rapidez en el rebote cumple la misma relación señalada para el primer rebote. De esta forma, continúa el movimiento, con sucesivos rebotes, hasta que la pelota prácticamente ya no se mueve.

Considerando que todo estos rebotes ocurren manteniendo el movimiento en la dirección vertical, calcule:

a) La altura que alcanza la pelota después del primer rebote.

b) La altura que alcanza la pelota después del segundo rebote.

c) La altura que alcanza la pelota después del k-ésimo rebote.

d) La distancia total recorrida desde que se soltó la pelota hasta el k-ésimo rebote.

e) La distancia total recorrida por la pelota hasta que se detiene (tome $k \to \infty$ en la expresión anterior)

17.– Dos locomotoras viajan con rapidez V_0. En el instante t=0 están separadas por una distancia d, y viajan en la misma dirección pero en sentido opuesto. En dicho instante, de una de ellas, parte una paloma con velocidad U *con respecto a la tierra*, y tal que $(U > V_0)$. La paloma viaja en línea recta hasta alcanzar la otra locomotora. Una vez que la toca, *vuelve* hasta alcanzar la primera y así sucesivamente hasta que ambos trenes chocan.

a) Haga un gráfico de *posición* versus *tiempo*, que describa conjuntamente la trayectoria de los dos trenes y la paloma.

b) ¿Qué distancia recorrió la paloma desde que dejó el tren por primera vez hasta que éstos se encontraron?

Use los siguientes valores numéricos: $V_0 = 25$ km/h, $U = 30$ km/h y $d = 23$ km.

18.– Un automóvil puede aumentar su velocidad con una aceleración máxima a_1 y frenar con una desaceleración máxima a_2. Cuando su velocidad es mayor que un valor v_1, su consumo de combustible es q_1 lts/km. Si su velocidad es menor que v_1, su consumo es de $q_0 = 2\,q_1$ lts/km .

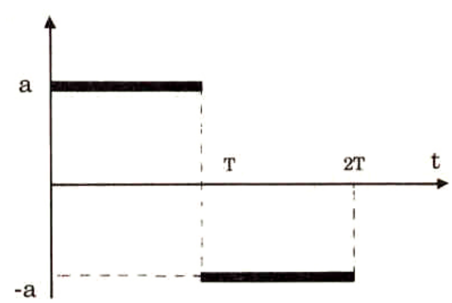
En un viaje donde debe recorrer L km:

a) ¿Cómo se debe regular la velocidad del vehículo durante la trayectoria para recorrerla en un *tiempo mínimo y con un consumo máximo*? Explique su respuesta a través de un gráfico.

b) La misma pregunta, pero en el caso de interés: con un *tiempo y consumo mínimos*. ¿Calcule cuál es el consumo total en este caso? Use gráficos en su razonamiento.

19.– Una partícula parte del reposo y soporta una aceleración como la que se muestra en la Figura.
a) Dibuje el gráfico de *velocidad* versus *tiempo* y el gráfico *posición* versus *tiempo* para este movimiento.

b) ¿Cuál será su máxima velocidad durante los $2T$ s?
¿Qué distancia recorre durante este intervalo?



20.– Suponga que la altura de cierto proyectil en función del tiempo viene dada por la relación $z(t) = -v_0 \cdot (t - t_0)^2 + z_0$, con $z_0 = 125$ m, $t_0 = 5$ s y $v_0 = 5$ m/s.

a) Grafique la altura del proyectil en función del tiempo desde $t = 0$ hasta $t = 12\ s$.

b) ¿En qué instante el proyectil choca contra el suelo?

c) Encuentre gráficamente la velocidad instantánea (es decir, mida las pendientes de las tangentes) en los instantes t=0 s, t=2 s, t=4 s, t=6 s, t=8 s y t=10 s. Grafique su resultado.

21.– Suponga que la posición de una partícula en función del tiempo (medido en segundos) viene dada por:

$$z(t) = \frac{t}{1+t^2} \;\; [m]$$

a) Grafique $z(t)$ en el intervalo $-4\ s < t < +4\ s$.

b) Encuentre la velocidad instantánea en función del tiempo evaluando:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} \quad .$$

c) Grafique $v(t)$.

22.– Suponga que la posición de una partícula en función del tiempo (medido en segundos) viene dada por:

$$z(t) = t - 4\cos t \;\; [m]$$

a) Grafique $z(t)$ en el intervalo $0 < t < 6$ s.

b) A partir del gráfico responda las siguientes preguntas:

i) ¿En qué instante la velocidad es nula?

ii) ¿En qué instante la partícula se encuentra en el origen?

iii) ¿En qué intervalos la velocidad es negativa?

iv) ¿En qué intervalos la aceleración es positiva?

c) Encuentre la velocidad instantánea en función del tiempo evaluando:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} \quad .$$

d) Grafique $v(t)$ encontrada en la parte anterior. A partir del gráfico responda las siguientes preguntas:

i) ¿En qué instante la velocidad es nula?

ii) ¿En qué intervalos de tiempo la velocidad es negativa?

iii) ¿En qué intervalos de tiempo la aceleración es positiva?

(Compare las respuestas con aquellas de la parte b)).

23.– Usando geometría y las aproximaciones usuales para ángulos pequeños, demuestre que:

$$\frac{d\,\tan\,\theta}{d\,\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}.$$

Use el triángulo Δ ABC de la Figura y recuerde que $\Delta\,\theta$ es muy pequeño.

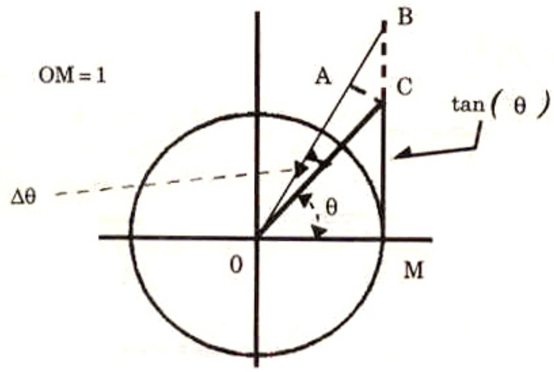


Figura II.25: Ejercicio # 23

24.– Para cada una de las expresiones $s(t)$, de la posición de una partícula en función del tiempo, encuentre, analíticamente, la velocidad instantánea.

a) $s(t) = a\,t^2 + b\,t + c$,

b) $s(t) = a\,t^\alpha$,

c) $s(t) = a\,\cos(\omega\,t + \beta)$.

En las ecuaciones anteriores a, b, c, ω, α y β son constantes.

25.– La posición de una partícula en función del tiempo (medido en segundos) es:

$$x(t) = a \cos(\omega t).$$

a) Encuentre, analíticamente, la velocidad de la partícula y su aceleración. Grafique $x(t)$, $v(t)$ y $a(t)$ en un mismo gráfico.

b) Del gráfico anterior, encuentre la relación que existe entre la posición $x(t)$ y la aceleración $a(t)$.

26.– Desde un puente de 60 m de altura se deja caer una piedra. Una segunda piedra se arroja verticalmente hacia abajo 1 s más tarde. Ambas llegan simultáneamente al río. ¿Cuál fue la velocidad impartida inicialmente a la segunda piedra? Desprecie el roce del aire.

27.– La Figura muestra la aceleración de una partícula en función del tiempo.

a) Si en $t = 0$ s la partícula está en reposo, encuentre su velocidad en cada instante posterior. Haga un gráfico.

b) Calcule el tamaño de las áreas I, II y III. ¿Qué unidades tienen? ¿Qué relación hay entre estas áreas y la parte a) de este problema?

c) Repita lo hecho en la parte a) pero asumiendo que en el instante $t = 0$ la partícula tiene una velocidad $v_0 = -8\ m/s$. Grafique su respuesta.

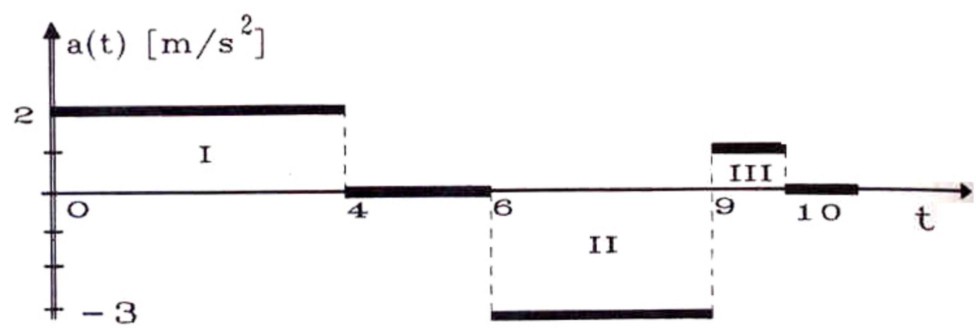


Figura II.26: Ejercicio # 27

28.– Para cada una de las siguientes expresiones de la aceleración $a(t)$ de una partícula (a en m/s^2 y t en s), encuentre la expresión más general para la velocidad $v(t)$ y la posición $x(t)$.

a) $a(t) = a_0$, donde a_o es una constante,

b) $a(t) = a_0 \cos \omega t$ con a_0 y ω constantes.

29.– Un cohete se dispara verticalmente, elevándose durante un minuto con una aceleración constante de 20 m/s^2. En ese momento se agota su combustible y continúa moviéndose sólo bajo la acción de la aceleración de gravedad.

a) ¿Cuál es la máxima altura que alcanza?

b) ¿Cuál es el tiempo transcurrido desde que despega hasta que vuelve a caer sobre la plataforma de lanzamiento?

c) Grafique la posición y velocidad en función del tiempo.

30.– Consideremos el movimiento de una esfera en un medio viscoso (en ausencia de fuerzas gravitacionales). La aceleración que sufre la esfera es proporcional a su velocidad pero en dirección contraria, es decir $\vec{a}(t) = -\eta\vec{v}(t)$, donde η es una constante. Supongamos que $\eta = 0{,}01\ s^{-1}$ y la velocidad inicial de la esfera $|\vec{v}_0| = 50\ m/s$. Encuentre numéricamente la distancia $s(t)$ recorrida por la esfera y grafíquela. Para resolver el problema note que si Δ es un pequeño intervalo, entonces:

$$\begin{cases} v(t+\Delta) \simeq v(t) + a(t)\,\Delta \\ s(t+\Delta) \simeq s(t) + v(t)\,\Delta \end{cases}$$

31.– En la tabla adjunta se muestran algunas de las marcas mundiales en distintas carreras cortas. Un modelo simple para una carrera consiste en suponer que el corredor parte con aceleración constante a durante un periodo corto de tiempo T y luego continúa con velocidad constante $v_0 = a\,T$. De acuerdo a este modelo, en el caso de tiempos t mayores que T, la distancia x varía linealmente con el tiempo.

distancia	tiempo
50 yardas	5.1 s
50 metros	5.5 s
60 yardas	5.9 s
60 metros	6.5 s
100 yardas	9.1 s
100 metros	9.9 s

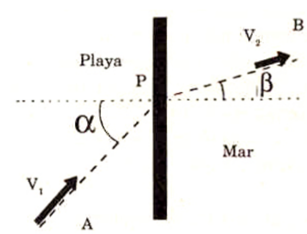
a) Hacer un gráfico $x(t)$ a partir de los datos de la tabla. (1 yarda = 91.44 cm).

b) Establecer una ecuación para la curva $x(t)$ de acuerdo con el modelo descrito y demostrar que para $t > T$ puede escribirse $x = v_0(t - T/2)$.

c) Unir los puntos del gráfico mediante una recta y determinar su pendiente y el punto en que corta al eje t. Sabiendo que la pendiente es v_0 y el punto de corte citado $T/2$, calcular la aceleración a.

d) La marca de los 200 m es 19.5 s. Discutir la aplicabilidad de este modelo a carreras de 200 m o más.

32.– Un salvavidas ubicado en el punto A en la playa escucha el grito de auxilio de un bañista ubicado en B. La velocidad máxima del salvavidas en la arena es v_1 y puede nadar con una velocidad v_2. Recordando que el salvavidas debe llegar lo antes posible al rescate, indique:



a) ¿Qué trayectoria le tomará el menor tiempo posible, en cada uno de los siguientes tres casos?

i) Si v_1 es muchísimo mayor que v_2.

ii) El caso inverso, v_2 es muchísimo mayor que v_1.

iii) Cuando ambas velocidades son iguales.

Nota

Tome su decisión a partir del estudio de tres o cuatro puntos ubicados en la línea divisoria entre la playa y el mar. En cada caso calcule el tiempo empleado en recorrer la trayectoria total.

b) Cuando ambas velocidades son diferentes y no cumplen las relaciones extremas indicadas en la parte a), encuentre la posición del punto óptimo, P, en el cual el salvavidas debe ingresar al agua para recorrer el trayecto de A a B en el menor tiempo posible.

Demuestre que en estas condiciones se satisface la siguiente relación:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Esta expresión es análoga a la ley de Snell, que describe la refracción de un rayo de luz al pasar de un medio a otro diferente.