

Capítulo 1. Conjuntos Difusos

1.1. Introducción

Cuando los computadores se enfrentan a la situación de “tomar decisiones”, generalmente hacen preguntas que tienen respuestas del tipo “sí o no”. Por ejemplo:

1. “¿La temperatura excede los 50°C?”,
2. “¿Es Juanito de menor estatura que Lucía?”.

Los seres humanos, en cambio, no razonan en forma tan precisa. La mayor parte del razonamiento humano tiene que ver con categorías que se “matizan”, como por ejemplo:

1. “Es peligroso manejar en un camino resbaladizo”,
2. “Un circuito complejo debe ser diseñado para alta seguridad (es decir, bajísimo índice de fallas)”.

Las personas son capaces de tomar decisiones basadas en información imprecisa, no numérica. Los conjuntos difusos proveen una herramienta para representar esta información, y poder así también construir un sistema de ayuda para la toma de decisiones. Los conjuntos difusos son un concepto que puede acercar el razonamiento computacional al que usan las personas.

M. M. Gupta [1] propone que las incertezas se pueden clasificar de diferentes formas; por ejemplo se pueden formar dos amplias categorías, que podemos identificar como I_1 e I_2 . Las incertezas de tipo I_1 serían las que surgen del comportamiento aleatorio de los sistemas físicos. Existen múltiples ejemplos de este tipo de incerteza, por ejemplo, las vibraciones aleatorias de una máquina, las fluctuaciones de un electrón en un campo magnético, la difusión de los gases en un campo térmico, actividades aleatorias de los patrones del clima, etc. Este tipo de incerteza ha sido bastante estudiado, y existe una extensa teoría estadística para caracterizar este tipo de fenómeno aleatorio. Aquí se utilizan cálculos como la media y la varianza.

La incerteza de tipo I_2 , a diferencia de la I_1 , es aquella que surge de procesos humanos, como ser la sensación, la percepción, la experiencia cognoscitiva, el razonamiento y el pensamiento. La percepción que logramos de nuestro entorno físico a través de nuestros sensores naturales (ojos, oídos, nariz, etc.) contiene incertezas que no pueden ser caracterizadas usando estadística. Este tipo de incerteza no ha sido tradicionalmente estudiada en forma sistemática. La ignorancia en esta materia, y su potencial en aplicaciones tecnológicas en sistemas artificiales, hace que sea un tópico con mérito de ser investigado, y es aquí donde tiene cabida la teoría de conjuntos difusos.

La teoría de conjuntos difusos fue enunciada por primera vez por Lotfi Zadeh en 1965 [2]. Señaló que en muchos casos las clases de objetos que se encuentran en el mundo físico real no tienen criterios de membresía precisamente definidos. Postuló entonces los Conjuntos Difusos, como clases de objetos con grados de pertenencia continuos. Mientras que en un conjunto tradicional, por ejemplo “el conjunto de todos los números mayores o iguales

que 5", los límites son abruptos, mientras que la transición entre ser y no ser miembro es gradual en un conjunto difuso. Lo anterior se muestra en la Figura 1.1. Si el grado de membresía se define en forma binaria en un conjunto tradicional (si no es miembro = "0", si es miembro = "1"), en un conjunto difuso se especifica por un número real entre 1 (miembro total) a 0 (no-miembro total).

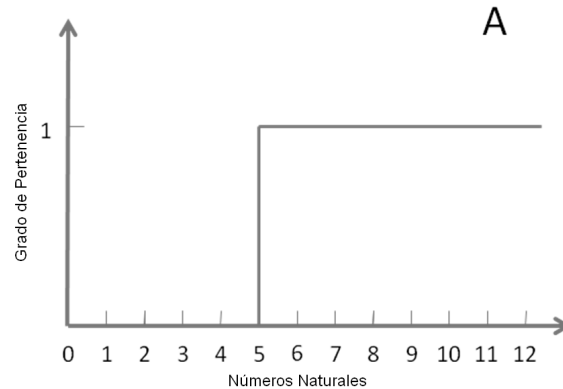


Figura 1.1. Función de membresía de un conjunto tradicional A, que representa los números naturales mayores o iguales que 5.

Exploraremos los conjuntos difusos, y sus campos de aplicación más extendidos: los sistemas de control difusos y los sistemas expertos basados en conjuntos difusos.

En aplicaciones de **control** industrial existe más de un enfoque para aplicar conjuntos difusos, que podríamos separar en dos grupos:

- a) Aquellas que nacen del postulado que operadores humanos son capaces de efectuar en muchos casos un control más efectivo que los controladores automáticos "tradicionales" porque son capaces de tomar decisiones correctas basándose en información lingüística imprecisa (tipo Mamdani).
- b) Aquellas que derivan del control o modelación con múltiples modelos, en que la combinación de estos se hace en forma difusa (tipo Takagi-Sugeno).

En este curso nos centraremos en las aplicaciones del primer grupo.

Un **sistema experto** reúne tradicionalmente los conocimientos de expertos humanos en un área específica; este conocimiento está representado en forma más precisa, y por lo tanto el sistema es más poderoso, si permite incluir grados de certeza en las relaciones y afirmaciones que contiene, que en general son inherentes a ese conocimiento.

De acuerdo a J. M. Mendel [3], los sistemas que utilizan lógica difusa son únicos en el sentido que son capaces de manejar simultáneamente datos numéricos y conocimiento lingüístico en una forma matemática unificada.

Los desarrollos actuales de sistemas basados en conjuntos difusos incorporan elementos adicionales, como son: la capacidad de aprender de los datos recopilados, combinaciones de elementos de lógica difusa y redes neuronales, etc.

1.2. Conjuntos Difusos

Un conjunto es una colección de objetos. Puede ser definido enumerando a sus miembros, o describiendo las características distintivas que cumplen todos sus elementos. En un conjunto "tradicional", un elemento pertenece a un conjunto dado o bien no pertenece. En cambio, un conjunto difuso permite valores intermedios de pertenencia.

Los conjuntos difusos permiten formalizar expresiones lingüísticas que típicamente contienen algún grado de ambigüedad, es decir, proveen un método para expresar matemáticamente conceptos tales como "alto", "frío", "rápido", etc., que son bastante usados, pero que por esencia no son precisos. Incluso conceptos netamente ingenieriles que tienen una definición numérica precisa son usados muchas veces como criterios que se acercan más a un número difuso. Por ejemplo, la correlación de dos señales, o dos funciones, puede ser normalizada para que su rango esté entre 0 y 1. Así, al explicar el valor de correlación a otra persona, es usual utilizar expresiones como "estos datos tienen una baja correlación", por ejemplo 0,1, o una "alta" correlación, por ejemplo 0,88. Otro ejemplo es la amortiguación de un sistema mecánico. Se habla de sistemas más o menos amortiguados, dándole un sentido a la noción de "la razón de amortiguación efectiva del sistema es de 0,25" como "el sistema es levemente amortiguado". En conjuntos difusos, la ambigüedad existente en expresiones lingüísticas se expresa en el concepto de **grado de membresía**.

En un conjunto difuso se generaliza el concepto de membresía, permitiendo grados de pertenencia. La función de pertenencia $\mu_A(a)$ de un conjunto difuso A es una función con recorrido en el segmento $[0, 1]$ de los números reales:

$$\mu_A(a): U \subseteq \mathfrak{R} \rightarrow [0,1]$$

Un ejemplo de un conjunto difuso es el siguiente: sea U el conjunto de todos los valores de edad humana posibles (por ejemplo entre 0 y 120 años), y A el conjunto de los que llamamos años de la "juventud", como un concepto intermedio entre los conceptos de "infancia" y "adultez joven". Así podríamos afirmar que la edad de 21 años representa a los años de la "juventud", 13 años es más cercano al concepto de "infancia", y 30 años es más bien "adultez joven". Así, una posibilidad de traducir y representar el conjunto A se muestra en la Figura 1.2; su función de membresía toma valores entre 0 y 1 de acuerdo al elemento de A que se evalúe.

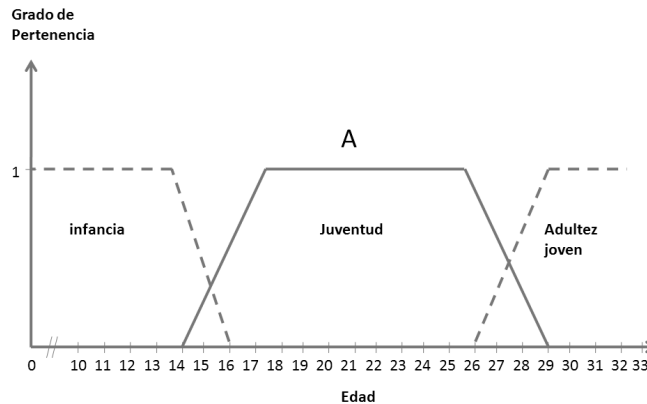


Figura 1.2. Función de membresía de un conjunto difuso A que representa “los años de la juventud”.

Es importante mencionar que, generalmente al graficar la relación que existe entre las variables reales y sus valores de membresía, estos últimos se utilizan en la abscisa y los primeros en la ordenada.

Se suele utilizar valores de membresía en el intervalo $[0,1]$ para tener un rango normalizado, pero no es una obligación.

Los conjuntos difusos permiten manejar la imprecisión, lo que facilita, por ejemplo:

- la posibilidad de reconocer semejanzas entre objetos no estrictamente iguales,
- la traducción de pensamiento humano a operaciones de computadores digitales, en otras palabras, transferir al computador el “sentido común”.

Con conjuntos difusos se pueden traducir valores lingüísticos a un programa computacional. Estas traducciones son particularmente importantes tanto en controladores de procesos como en sistemas expertos, en que es necesario programar instrucciones que son básicamente reglas prácticas (*inglés: “rules of thumb”*).

Mediante lógica difusa es posible interpretar en forma matemática temas tan complejos como, por ejemplo, “si el aumento del desempleo es grande, y el aumento de las quiebras es grande, aunque el producto geográfico bruto haya caído levemente, es claramente demostrable que hay recesión.”

Básicamente, el grado de membresía es subjetivo. Es un asunto de definición más que de medición. Los humanos poseen una gran habilidad para asignar grados de membresía a objetos determinados, sin un entendimiento consciente de cómo llegamos a ese valor. Por ejemplo, un alumno en un curso no tendrá mayor dificultad para asignarle al profesor un grado de membresía en el conjunto difuso de los buenos profesores.

Los últimos desarrollos en conjuntos difusos han hecho diversos intentos para fijar el grado de membresía basándose en criterios más racionales, por ejemplo, interpretándolo como una medida de consenso. Sin embargo, esta definición no evita la subjetividad, ya que se trata de un consenso entre observadores, no una cualidad inherente al objeto. Otra característica, que aporta a su subjetividad, es que dependerá del contexto.

1.3. Teoría de Conjuntos Difusos v/s Teoría de Probabilidades

En probabilidades, un evento E es un subconjunto (ordinario) de un espacio de muestreo U . Por ejemplo, al tirar un dado, el espacio de muestreo U es el conjunto de números naturales,

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

y un evento como E dado por

$$E = \{x/x \text{ es natural y menor que } 4\} = \{1, 2, 3\}$$

E es un subconjunto ordinario de U . El evento ocurre si al menos uno de los elementos del subconjunto ocurre (es decir 1, 2 o 3).

La probabilidad condicional, $P(E/E')$, define la probabilidad de un evento E dado que E' ha ocurrido. Por ejemplo, tomando el mismo universo U y el evento E definido anteriormente viene dada por la siguiente expresión $P(E/3)=1$.

Supongamos ahora que E no es un subconjunto ordinario, sino ξ , un subconjunto difuso. Por ejemplo, sea “ ξ = un número grande” y su función de pertenencia se puede definir como:

$$\xi = \mu_{grande}(u) = \frac{1}{6} + \frac{0,7}{5} + \frac{0,5}{4} + \frac{0,2}{3}$$

¿Cuál es la probabilidad de tirar un “número grande”?

$$P(\xi) = \sum_i P(u_i) \cdot \mu_{grande}(u_i) = \frac{1}{6}(1 + 0,7 + 0,5 + 0,2) = 0,4$$

, en donde $\frac{1}{6}$ es la probabilidad de cada u_i .

Otro tipo de probabilidad es la llamada probabilidad “subjetiva”, que no tiene una interpretación frecuentista sino que se describe por el grado de confianza subjetiva de que un evento va a ocurrir. Para describir estos eventos se les pide ciertas propiedades, entre ellas la claridad, que dice que “cada proposición a la que se le asocia una medida de probabilidad debe poder clasificarse en términos de verdadera o falsa”.

Zadeh en [4], señala que un conjunto difuso induce una distribución posibilística en el universo. Por ejemplo, el conjunto difuso “número grande” del ejemplo anterior induce una distribución posibilística:

Es “imposible” que 1 ó 2 sean números grandes.

Es 0,2 “posible” que 3 sea un número grande.

Es 0,5 “posible” que 4 sea un número grande.

Es 0,7 “posible” que 5 sea un número grande.

Es “posible” que 6 sea un número grande.

Podemos observar importantes diferencias entre las distribuciones probabilísticas y posibilísticas. Por un lado, la suma de las posibilidades en general no es uno, por otro lado, no depende de la frecuencia de ocurrencia de los hechos. No es una descripción de poblaciones, sino de individuos. Un hecho puede tener posibilidad = 1, y probabilidad muy baja. Sin embargo, un evento debe ser posible

para que pueda ser probable. Un ejemplo clásico es que es perfectamente posible que una persona se coma 5 huevos al desayuno (por ejemplo, posibilidad=1), pero es poco probable (por ejemplo, probabilidad=0,1). También sirva como ilustración las dos categorías de incertezas (I_1 e I_2) descritas anteriormente (capítulo 1.1).

El grado de membresía no es una probabilidad, pero en ocasiones se utiliza la probabilidad para establecer una medida de pertenencia. El grado de membresía **puede ser definido como la medida de compatibilidad de un objeto con el concepto representado por un conjunto difuso**, en otras palabras, haciendo un análogo con el concepto de “elasticidad”, el grado de membresía se relaciona inversamente con cuánto debe extenderse el conjunto difuso para contener al objeto. Por ejemplo, si Carlos tiene 50 años y se dice que su grado de pertenencia al conjunto de los jóvenes es de 0,3, esto quiere decir que 0,3 es la compatibilidad de Carlos con la definición del conjunto difuso de los jóvenes, y NO es la probabilidad de Carlos de ser joven.

La teoría de los conjuntos difusos no ha estado exenta de controversia, la cual tiene varias facetas. Por ejemplo, existen investigadores que descartan los conjuntos difusos, afirmando que las imprecisiones o incertezas pueden ser manejadas en cualquier caso por probabilidades. Por otra parte, la cultura de tradición de respeto por lo riguroso y preciso, genera que se mire con sospecha y desdén una teoría que pretende lograr una acomodación con la imprecisión de que está impregnada en la vida real.

1.4. Notación

Si consideramos un conjunto F con una función de pertenencia $\mu_F(\cdot)$, dicha función de pertenencia $\mu_F : U \rightarrow [0,1]$ puede expresarse como un par ordenado $(u; \mu_F(u))$. Por ejemplo, si el conjunto universo U es el conjunto de los números reales y F se define como “el conjunto de los números cercanos a 6”, $\mu_F(\cdot)$ puede definirse de la siguiente forma:

$$\mu_F(x) = \frac{1}{1 + (x - 6)^2},$$

y la descripción de la función de membresía de algunos de sus elementos es:

$$(5,5; 0,8), (6; 1), (100; 0,00011)$$

Otra notación que se utiliza es $\mu_F(u)/u$. En ese caso, se usa el signo “+” para enumerar. Así, la lista anterior se describe así:

$$0,8/5,5 + 1/6 + 0,00011/100$$

Todo universo discreto U permite la notación:

$$F = \sum_{u \in U} \mu_F(u) / u$$

Por otro lado, si U es un universo continuo, la notación sería la siguiente:

$$F = \int_U \mu_F(u) / u$$

Por otro lado, “+” satisface que

$$\frac{a}{u} + \frac{b}{u} = \frac{\max(a, b)}{u}$$

, es decir, si un mismo elemento tiene dos grados de pertenencia, su pertenencia será el grado mayor.

1.5. Propiedades De Los Conjuntos Difusos

Convexidad:

Al igual que en la teoría de conjuntos tradicional, a los conjuntos difusos se les asocian ciertas propiedades. Los conjuntos difusos que generalmente se utilizan en aplicaciones prácticas son convexos, es decir,

$$\forall a, b \in U; \forall \lambda \in [0, 1]: \mu_A(\lambda a + (1 - \lambda)b) \geq \min(\mu_A(a), \mu_A(b))$$

Existen muchas formas de construir un conjunto difuso convexo, como por ejemplo los que se ven en las Figuras 1.4 y 1.5. Para aplicaciones de control en tiempo real se han preferido funciones sencillas, o computacionalmente más rápidas. Ejemplos al caso son las funciones triangulares y trapezoidales, que podemos ver en la Figura 1.7, en tanto que en la Figura 1.6 se ve un ejemplo de conjunto no-convexo.

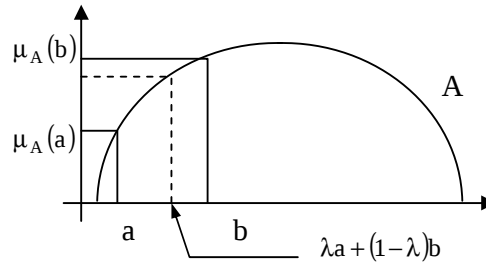


Figura 1.4. Ejemplo de Conjunto Convexo.

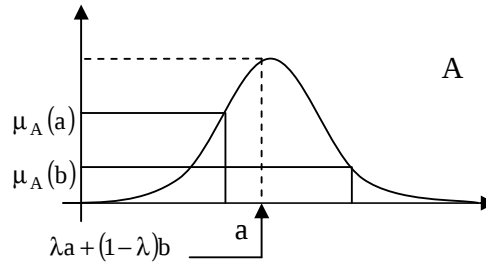


Figura 1.5. Conjunto Convexo.

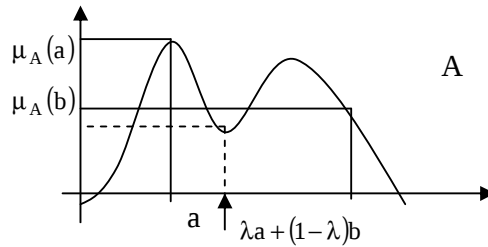


Figura 1.6. Conjunto No Convexo

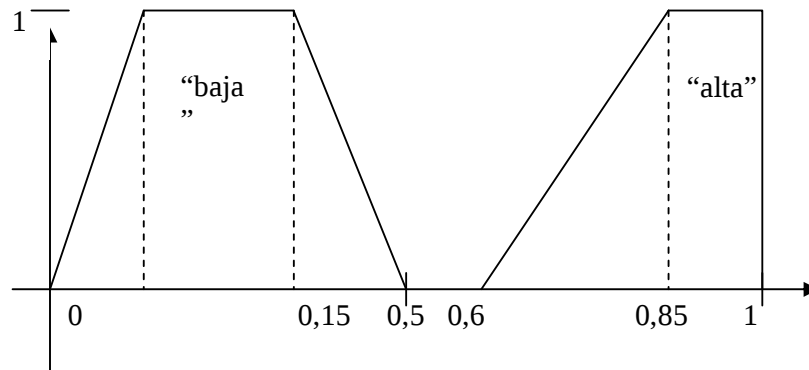


Figura 1.7. Ejemplos de conjuntos difusos "baja" y "alta" utilizando funciones convexas de tipo trapezoidal.

Núcleo y soporte:

En los conjuntos difusos se distinguen el núcleo, que es el conjunto de elementos que pertenecen completamente al conjunto (es decir, el rango en que la función de pertenencia normalizada vale 1), y el soporte, que es el conjunto de elementos con grado de pertenencia no nulo.

Tomando como ejemplo los conjuntos difusos "alta" o "baja" definidos en la Figura 1.7., se puede observar que ambos conjuntos difusos se definieron como funciones trapezoidales. Para "alta", el núcleo es el rango normalizado [0,85; 1,00], y el soporte es [0,6; 1,0]. De la figura se pueden obtener también los valores correspondientes al conjunto difuso "baja".

Cuantificadores Difusos:

Otra propiedad de los conjuntos difusos es que permiten el uso de cuantificadores difusos. Por ejemplo, si he definido el conjunto "alto", puedo utilizar el cuantificador difuso "muy", con lo cual confiero al nuevo conjunto "muy alto" un sentido diferente. Si consideramos, por ejemplo, que en el conjunto "alto" la magnitud de 3 metros tiene asociada un valor de membresía cercano a 1, en el conjunto "muy alto", la membresía de dicho valor debe ser menor. Relaciones matemáticas muy rigurosas definen la relación entre estas magnitudes.

Sea A un conjunto difuso, $\mu_A(a)$ su función de membresía y $c(\cdot)$ un cuantificador que aumente la exigencia de los elementos del conjunto A para cumplir con el sentido de la variable, como son los cuantificadores “muy”, “demasiado”, “extremadamente”. Luego, $c(\cdot)$ puede definirse así:

$$c(\mu_A(a)) = \sqrt[n]{\mu_A(a)} \quad \text{con } n > 1$$

Si $c(\cdot)$ ahora es un cuantificador difuso que disminuye la exigencia de los elementos de A para cumplir con el sentido de la variable, como lo hacen los cuantificadores “menos”, “escasamente”, entonces $c(\cdot)$ se puede definir de la siguiente manera:

$$c(\mu_A(a)) = (\mu_A(a))^n \quad \text{con } n > 1$$

Un ejemplo de cómo operan los cuantificadores puede observarse en la Figura 1.8.

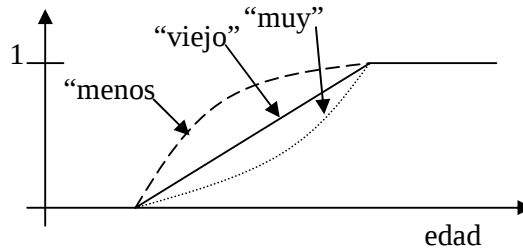


Figura 1.8. Cuantificadores difusos “muy” y “menos” para el conjunto “viejo”

Pueden definirse relaciones matemáticas rigurosas para establecer relaciones entre conjuntos difusos. Por ejemplo, a partir de los conjuntos “viejo” y “joven” se construyen los conjuntos “muy joven”, o “más o menos viejo”, aplicando relaciones cuadráticas. La negación también se muestra, en el conjunto “no muy joven”.

Es posible también utilizar cuantificadores difusos, como se muestra en el ejemplo de la Figura 1.8 para el concepto “viejo”. Luego se definen los cuantificadores en forma matemática rigurosa, y se construyen otros conjuntos.

Incluso, en ciertas aplicaciones es útil representar el grado de membresía como un conjunto difuso, por ejemplo, es “cercano a 0,8” o “aproximadamente 0,6”, o como “bastante alto”, etc. Un conjunto difuso cuya función de membresía utiliza valores difusos se dice que es “ultradifuso”. Podemos observar un ejemplo de esto en la Figura 1.9, en donde el término “generalmente” se encuentra definido como conjunto difuso y ultradifuso. Es el segundo caso, se ve que mientras mayor es la proporción, más se aplica el término “generalmente”.

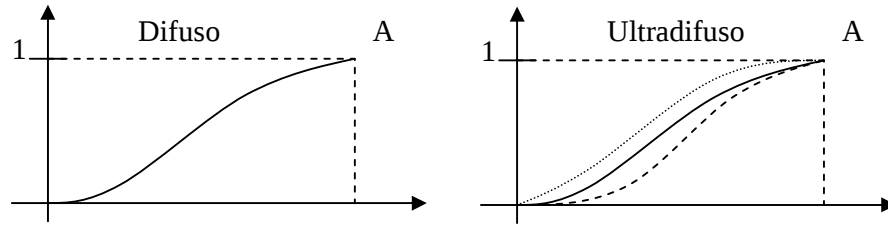


Figura 1.9. En el gráfico de la izquierda se muestra un conjunto difuso y en el de la derecha uno ultradifuso.

Cardinalidad:

Formalmente se define la cardinalidad escalar $|A|$ de un conjunto A en U como:

$$|A| = \sum_{x \in U} \mu_A(x)$$

Se define la cardinalidad difusa, que es un número difuso. Por último, se utiliza la expresión $|A|$ para indicar que se están recorriendo todos los elementos de un conjunto.

Medida de Difusidad:

Existirán conjuntos más o menos difusos, o dicho de otra forma, conjuntos más o menos definidos. Esta propiedad permite establecer una medida de la difusidad (*en inglés: "fuzziness"*). En general esta medida dependerá de la aplicación de que se trate.

Un conjunto A será un conjunto menos definido que A^* si cumple las siguientes condiciones:

- $\mu_{A^*}(x) \leq \mu_A(x) \quad \forall x / \mu_A(x) \leq \frac{1}{2}$ y
- $\mu_{A^*}(x) \geq \mu_A(x) \quad \forall x / \mu_A(x) \geq \frac{1}{2}$

Dicha relación se puede observar de mejor manera en la Figura 1.10.

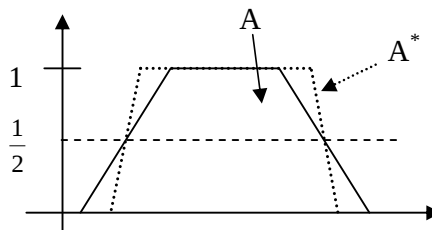


Figura 1.10. Ejemplo de un conjunto A^* más definido que otro conjunto A.

Una medida de difusidad en forma matemática es un mapeo “d” que satisface las condiciones siguientes:

- 1) $d(A) = 0 \Leftrightarrow A$ es un conjunto ordinario de U .
- 2) $d(A)$ es máximo $\Leftrightarrow \mu_A(x) = \frac{1}{2} \quad \forall x \in U$
- 4) $d(A^*) \leq d(A)$, en que A^* es cualquier versión más definida de A .
- 5) $d(A) = d(A)$, es decir, A es tan difuso como A .

Si U es finito, Lob propuso una formulación general para d :

$$d(A) = F \left[\sum_{i=1}^{|U|} c_i \cdot f_i(\mu_A(x_i)) \right]$$

, en que:

- $c_i \in \mathbb{R}^+, \forall i$
- f_i es una función real tal que:
 - $f_i(0) = f_i(1) = 0$
 - $f_i(u) = f_i(1-u) \quad \forall u \in [0,1]$
 - f_i es estrictamente creciente en $[0, \frac{1}{2}]$

Algunos casos particulares de interés son los siguientes:

- Índice de Difusidad [Kaufmann, 75]:

Sea F la identidad, y se define, $\forall i, c_i = 1$ y $f_i(u) = u$ si $u \in [0, \frac{1}{2}]$. Entonces $d(A)$ es la distancia entre A y el subconjunto ordinario de U más cercano a A , es decir:

$$d(A) = \sum_{i=1}^{|U|} \left| \mu_A(x_i) - \mu_{A_{\frac{1}{2}}}(x_i) \right|$$

, en que $A_{\frac{1}{2}}$ es el “corte $-\frac{1}{2}$ ” de A .

- Entropía:

Una posible definición de entropía no probabilística queda dada por las siguientes condiciones que deben cumplir las componentes del índice de difusidad:

- o F queda definida como $F(u) = k \cdot u, k > 0$
- o $c_i = 1, \forall i$
- o $f_i(u) = -u \cdot \ln(u) - (1-u) \cdot \ln(1-u), \forall i$ (función de Shannon)

1.6. Operaciones en Conjuntos Difusos

La operación de intersección de conjuntos difusos, así como las demás operaciones difusas son una generalización de las operaciones homónimas en la teoría clásica de conjuntos. La intersección se representa por una clase de funciones binarias llamadas normas triangulares o normas T. Sean los conjuntos difusos A, B y C, definidos en el universo U, y sus respectivas funciones de membresía $\mu_A(\cdot)$, $\mu_B(\cdot)$, $\mu_C(\cdot)$. Sean a, b y c valores de estas funciones evaluadas en un elemento cualquiera del universo U. Una norma T es una función que cumple las siguientes propiedades:

- 1) $N_T(a, b) = N_T(b, a)$;
- 2) $N_T(N_T(a, b), c) = N_T(a, N_T(b, c))$;
- 3) si $a \leq c \Rightarrow N_T(a, b) \leq N_T(c, b)$;
- 4) $N_T(a, 1) = a$

Las normas T más usadas en aplicaciones de ingeniería son las funciones min y producto algebraico.

De manera análoga, la operación de unión de conjuntos para conjuntos difusos puede ser representada por una clase de funciones binarias llamadas conormas triangulares o conormas T o normas S. Una conorma T tiene las siguientes propiedades:

- 1) $N_S(a, b) = N_S(b, a)$;
- 2) $N_S(N_S(a, b), c) = N_S(a, N_S(b, c))$;
- 3) si $a \leq c \Rightarrow N_S(a, b) \leq N_S(c, b)$;
- 4) $N_T(a, 0) = a$

Nótese que las 3 primeras son idénticas a las 3 primeras propiedades con que se definen las normas T. La mayoría de las aplicaciones prácticas utilizan la función max como conorma T.

La tercera operación (siguiendo también a la teoría clásica de conjuntos) es el complemento, que en el ámbito difuso se define con las siguientes propiedades:

- 1) $N_C(0) = 1$;
- 2) si $(a \leq b) \Rightarrow N_C(a) \geq N_C(b)$;
- 3) $N_C(N_C(a)) = a$;

La operación complemento de uno o uno menos ($N_C(a) = 1 - a$) es la función complemento más difundida en aplicaciones prácticas.

Del análisis de las normas T resulta que la función min es la que arroja los valores más altos de la clase, en tanto que max es la que obtiene los valores más bajos de entre las conormas T.

Ejemplos de normas, conormas y complementos utilizados en operaciones con conjuntos difusos se encuentran en la Tabla 1.1.

Tabla 1.1. Normas, conormas y complementos utilizados en operaciones con conjuntos difusos.

N_T	N_S	N_C
$\min(a,b)$	$\max(a,b)$	$1-a$
$a*b$	$a+b-a*b$	
$\max(a+b-1, 0)$	$\min(a+b,1)$	
a, si $b=1$ b, si $a=1$ 0, si no	a, si $b=0$ b, si $a=0$ 1, si no	

Podemos ver ejemplos de conjuntos resultantes de aplicar normas T, normas S y complemento en las Figuras 1.11, 1.12 y 1.13, respectivamente.

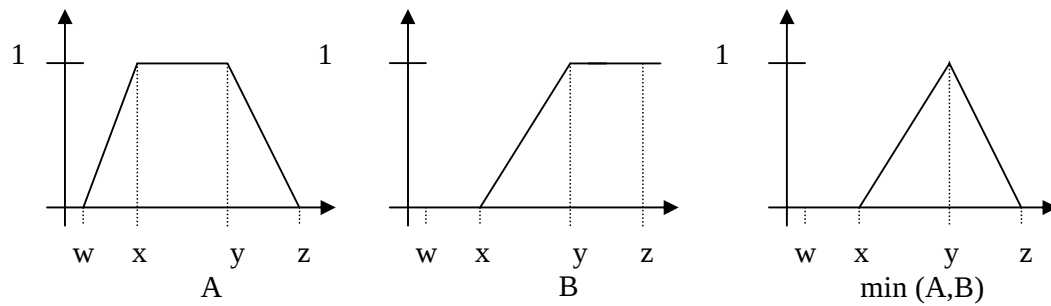


Figura 1.11. Ejemplo de Norma T, $\min(A,B)$.

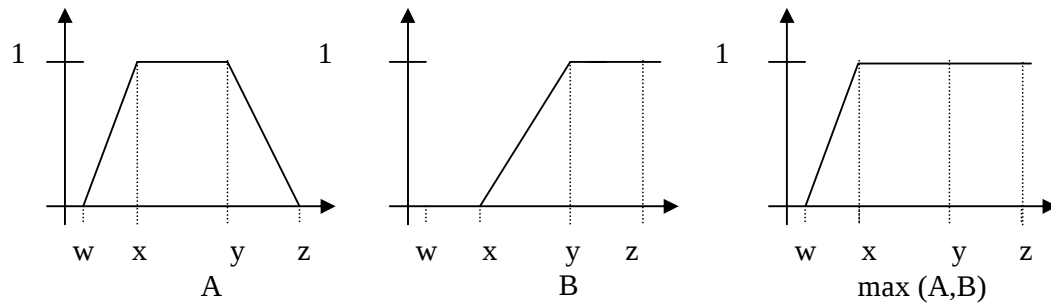


Figura 1.12. Ejemplo de Norma S, $\max(A,B)$.

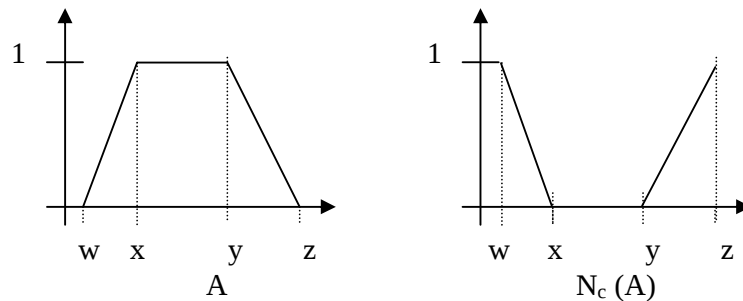


Figura 1.13. Ejemplo de Complemento, función Complemento de 1.

Veamos otro ejemplo: sean los conjuntos $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ e $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$. Sean R y S dos relaciones difusas definidas en $X \times Y$ de la siguiente forma:

R = “x es bastante mayor que y”

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,8	1,0	0,1	0,7
x_2	0	0,8	0	0
x_3	0,9	1,0	0,7	0,8

S = “y está muy cerca de x”

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,4	0	0,9	0,6
x_2	0,9	0,4	0,5	0,7
x_3	0,3	0	0,8	0,5

Dadas estas relaciones, definimos las siguientes operaciones:

Intersección de R y S:

$$\forall (x, y) \in X \times Y : \mu_{R \cap S}(x, y) = N_T(\mu_R(x, y), \mu_S(x, y))$$

Union de R y S:

$$\forall (x, y) \in X \times Y : \mu_{R \cup S}(x, y) = N_S(\mu_R(x, y), \mu_S(x, y))$$

Si consideramos como norma T la función mínimo, y como norma S la función máximo, los resultados serían los siguientes:

$R \cap S$: “x bastante mayor que y , y también y muy cerca de x”

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,4	0	0,1	0,6
x_2	0	0,4	0	0
x_3	0,3	0	0,7	0,5

$R \cup S$: "x bastante mayor que y, o y muy cerca de x"

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,8	1,0	0,9	0,7
x_2	0,9	0,8	0,5	0,7
x_3	0,9	1,0	0,8	0,8

Una operación bastante usada para realizar las operaciones mencionadas entre conjuntos difusos, es la **Extensión Cilíndrica**. Esta operación se utiliza para poder generar una conjunto de valores de membresía entre dos conjuntos de x e y, en que sólo se conoce los valores de membresía entre un valor de un conjunto (por ejemplo x) y todos los componentes del otro conjunto (ej. y). Utilizando la información mencionada, esta operación consiste en copiar dichos valores en el resto de los componentes del conjunto x, de tal manera que todos los componentes del conjunto x posean el mismo valor de membresía hacia un mismo componente del conjunto y.

REFERENCIAS

- [1] M.M.Gupta, "Cognition, Perception and Uncertainty", Fuzzy Logic in Knowledge-Based Systems, Decision and Control (M.M.Gupta, T.Yamakawa, eds.), North-Holland, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, The Netherlands, 1988.
- [2] L.A.Zadeh, "Fuzzy Sets", Information and Control, vol.8, pp 338-353, 1965.
- [3] J.M.Mendel, "Fuzzy Logic Systems for Engineering: A Tutorial", Proceedings of the IEEE, vol.83, pp.345-377, Marzo 1995.
- [4] L.A.Zadeh "Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility", Fuzzy Sets and Systems, vol. 1, pp 3-28, 1978.