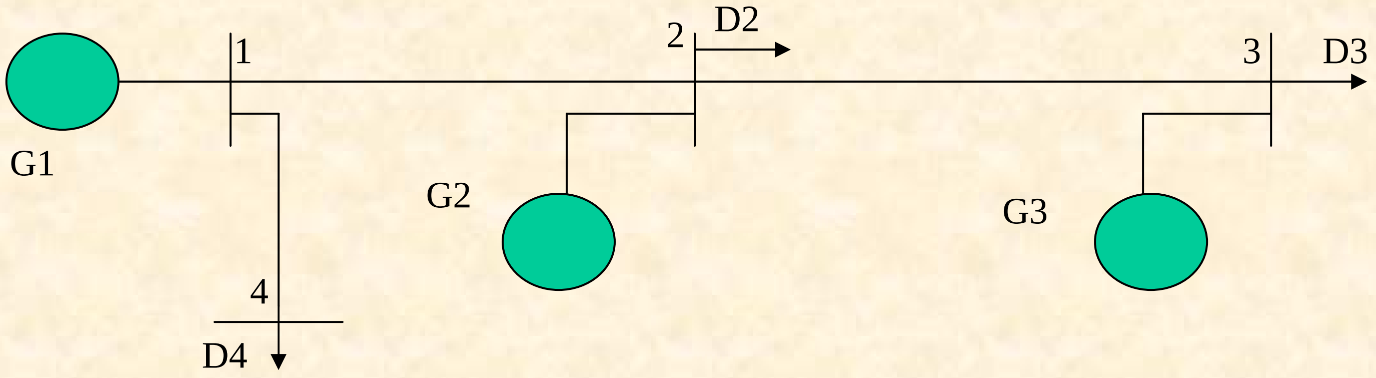
CLASE AUXILIAR

- Problemas de programación estática
  – Sin pérdidas (L = cte)
  – Con pérdidas (factores de penalización)

- Problema con embalse (cota fija)

- Problema de programación dinámica determinística (sistema térmico con costos de partida y detención)

Problema 1(programación estática) : Sea el siguiente S.E.P. térmico:



$C_1 = 0.0018 + 0.07\, P_1$	$D_2 = 1.8$	$1.0 \le P_1 \le 2.0$
$C_2 = 0.0015 + 0.10\, P_2$	$D_3 = 2.9$	$1.0 \le P_2 \le 2.5$
$C_3 = 0.0019 + 0.08\, P_3$	$D_4 = 0.8$	$1.0 \le P_3 \le 2.0$

$T_{23} \le 1.2$

G1 es una central que tiene una restricción de seguridad del sistema, equivalente a su plena carga en el instante de evaluación del problema

1. Escriba la función de optimización, las ecuaciones de restricciones y las ecuaciones de coordinación suponiendo sistema sin pérdidas, máximo uso del sistema de transmisión entre 2 y 3 y optimización independiente de la tensión.
2. Resuelva el despacho económico de carga mediante operación económica.

$$F.O.A. = F^* = \boxed{C_1(P_1) + C_2(P_2) + C_3(P_3)} + \boxed{\lambda\left[D - P_1 - P_2 - P_3\right]} +$$

$$+\mu_1\left[P_1 - P_{1\max} + \nu_1^{\,2}\right] + \mu_1'\left[P_{1\min} - P_1 + \nu_1'^{\,2}\right] + \mu_2\left[P_2 - P_{2\max} + \nu_2^{\,2}\right] + \mu_2'\left[P_{2\min} - P_2 + \nu_2'^{\,2}\right] +$$

$$+\mu_3\left[P_3 - P_{3\max} + \nu_3^{\,2}\right] + \mu_3'\left[P_{3\min} - P_3 + \nu_3'^{\,2}\right] + \gamma\left[T_{23} - T_{23\max}\right]$$

Ecuaciones de coordinación:

$$\boxed{\frac{\partial F^*}{\partial P_1}} = c_1 - \lambda + \mu_1 - \mu_1' + \gamma \cdot \frac{\partial T_{23}}{\partial P_1} = 0 \qquad \boxed{\frac{\partial F^*}{\partial P_2}} = c_2 - \lambda + \mu_2 - \mu_2' + \gamma \cdot \frac{\partial T_{23}}{\partial P_2} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial F^*}{\partial P_3}} = c_3 - \lambda + \mu_3 - \mu_3' + \gamma \cdot \frac{\partial T_{23}}{\partial P_3} = 0$$

Ecuaciones de restricciones:

$$\boxed{\frac{\partial F^*}{\partial \lambda}} = D - P_1 - P_2 - P_3 = 0 \qquad \boxed{\frac{\partial F^*}{\partial \mu_1}} = P_1 - P_{1\max} + \nu_1^{\,2} = 0$$

Como $P_1 = P_{1\max}$ $\quad \nu_1 = 0$

$$\boxed{\frac{\partial F^*}{\partial \mu'_1}} = P_{1\min} - P_1 + \nu_1'^{\,2} = 0 \qquad \boxed{\frac{\partial F^*}{\partial \mu_2}} = P_2 - P_{2\max} + \nu_2^{\,2} = 0 \qquad \boxed{\frac{\partial F^*}{\partial \mu'_2}} = P_{2\min} - P_2 + \nu_2'^{\,2} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial F^*}{\partial \mu_3}} = P_3 - P_{3\max} + \nu_3^{\,2} = 0 \qquad \boxed{\frac{\partial F^*}{\partial \mu'_3}} = P_{2\min} - P_3 + \nu_3'^{\,2} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial F^*}{\partial \nu_1}} = 2\mu_1\nu_1 = 0 \qquad \boxed{\frac{\partial F^*}{\partial \nu_1'}} = 2\mu_1'\nu_1' = 0 \qquad \boxed{\frac{\partial F^*}{\partial \nu_2}} = 2\mu_2\nu_2 = 0 \qquad \boxed{\frac{\partial F^*}{\partial \nu_2'}} = 2\mu_2'\nu_2' = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial F^*}{\partial \nu_3}} = 2\mu_3\nu_3 = 0 \qquad \boxed{\frac{\partial F^*}{\partial \nu_3'}} = 2\mu_3'\nu_3' = 0 \qquad \boxed{\frac{\partial F^*}{\partial \gamma}} = T_{23} - T_{23\max} = 0$$

Por otro lado:

$$T_{12} = P_1 - D_4 \qquad T_{23} = T_{12} + P_2 - D_2 \qquad \therefore \qquad T_{23} = P_1 + P_2 - (D_2 + D_4)$$

$$\therefore \qquad \frac{\partial T_{23}}{\partial P_1} = \frac{\partial T_{23}}{\partial P_2} = 1 \qquad \frac{\partial T_{23}}{\partial P_3} = 0$$

Supuesto inicial: Las restricciones con incertidumbre no se topan a priori.

$$0.07 - \lambda + \mu_1 + \gamma = 0 \qquad \lambda = 0.08$$

$$0.10 - \lambda + \gamma = 0 \qquad \gamma = -0.02$$

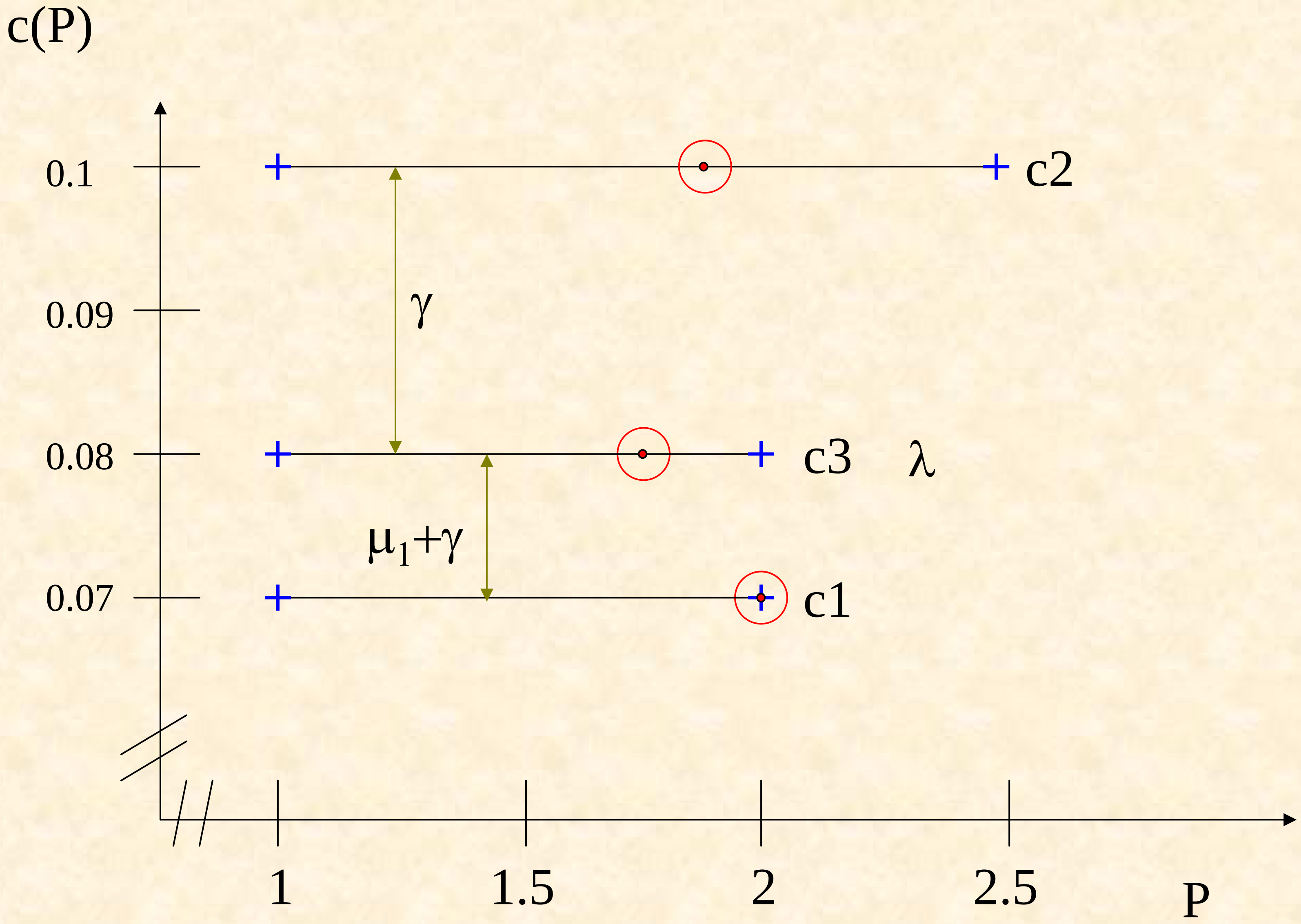
$$0.08 - \lambda = 0 \qquad \mu_1 = 0.03$$

Costos de las restricciones

$$P_1 = 2.0 \qquad c_1 = 0.07 \qquad C_1 = 0.1418[US\$]$$

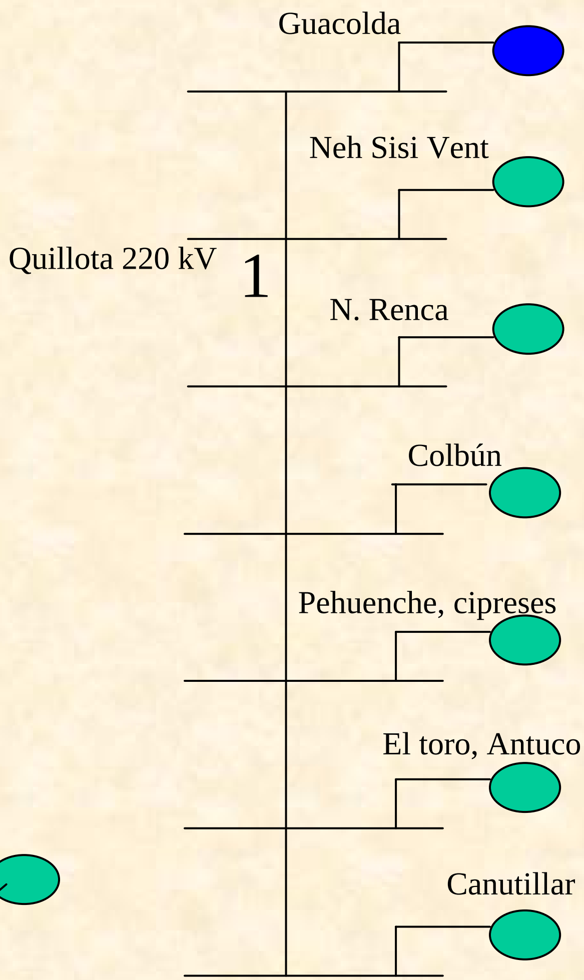
$$P_2 = T_{23\max} - P_1 + D_2 + D_4 \qquad P_2 = 1.8 \qquad c_2 = 0.1 \qquad C_2 = 0.1815[US\$]$$

$$P_3 = 1.7 \qquad c_3 = 0.08 \qquad C_3 = 0.1379[US\$]$$


c(P)
0.1
0.09
0.08
0.07
c2
c3
λ
c1
γ
μ1+γ
1
1.5
2
2.5
P

Factores de penalización

- Existencia de sistema de transmisión implica pérdidas.
- La energía puesta en la central tiene un valor distinto que la energía puesta en un lugar distante de la planta.

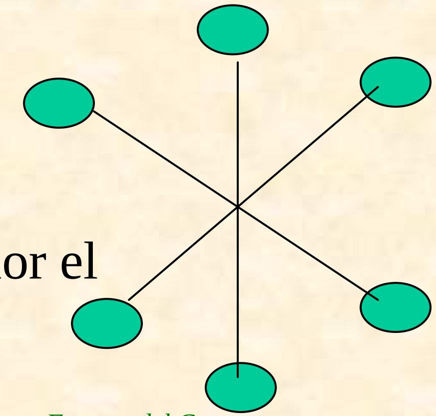


$$F.O.A. = C(P) + \lambda \cdot [D + L(P) - P]$$

$$\frac{\partial F.O.A.}{\partial P} = \frac{\partial C(P)}{\partial P} + \lambda \cdot \left[\frac{\partial L(P)}{\partial P} - 1\right] = 0$$

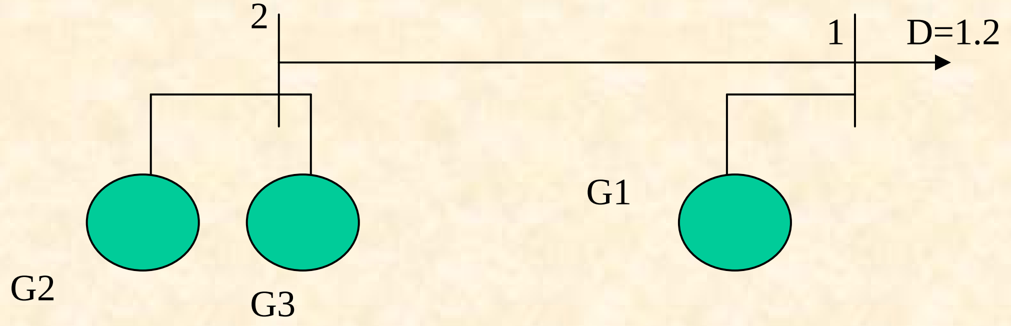
$$\lambda = \frac{\partial C(P)}{\partial P} \cdot \left[\frac{1}{\frac{\partial L(P)}{\partial P} - 1}\right] = \frac{\partial C(P)}{\partial P} \cdot fp$$

$$f_{pi} = \frac{1}{\left[1 - \frac{\partial L(P_{1,\ldots,}P_n)}{\partial P_i}\right]}$$



- Utilidad: Olvidarse del sistema de transmisión, ponderando por un valor el precio.

Problema 2: Sea el siguiente S.E.P.(factores de penalización):



$C_1 = 0.45 + 3.5\ P_1 + 0.5\ P_1^2$ (Eq. Térmico CHEmbalse) $0.1 \leq P_1 \leq 0.9$

$C_2 = 0.41 + 4.0\ P_2$ (Térmica de ciclo combinado) $P_{2min} \leq P_2 \leq 1.3$

G_3 : (Hidráulica de pasada) $P_3 = 0.5$

Q2 ≤ Q2 Máx $L = 0.04\ (P_2 + P_3)^2$

1. Resuelva el despacho económico de carga activa mediante operación económica suponiendo independencia de la tensión. Suponga primero P_{2min}=0 y luego que P_{2min}=0.4

1) $$F^* = \sum_{i=1}^{n} C_i(P_i) + \lambda\left[D + L - \sum_{i=1}^{n} P_i\right] + \sum_k \mu_k\left[h_k + \nu_k{}^2\right] + \sum_j \gamma_j \cdot N_j$$

$$h_1 = P_1 - 0.9$$
$$h_2 = 0.1 - P_1$$
$$h_3 = P_2 - 1.3$$
$$h_4 = 0.4 - P_2$$
$$h_5 = Q - Q_{2\max}$$

$$F^* = 0.45 + 3.5P_1 + 0.5P_1{}^2 + 0.41 + 4.0P_2 + \lambda\left[1.2 + 0.04(P_2 + P_3)^2 - P_1 - P_2 - P_3\right] +$$

$$\mu_1\left(P_1 - 0.9 + \nu_1{}^2\right) + \mu_2\left(0.1 - P_1 + \nu_2{}^2\right) + \mu_3\left(P_2 - 1.3 + \nu_3{}^2\right) + \mu_4\left(0.4 - P_2 + \nu_4{}^2\right) + \mu_5\left(Q - Q_{2\max} + \nu_5{}^2\right)$$

$$\frac{\partial F^*}{\partial P_1} = 3.5 + P_1 - \lambda + \mu_1 - \mu_2 = 0$$ Ec 1

$$\frac{\partial F^*}{\partial P_2} = 4.0 + \lambda\underbrace{\left(0.08(P_2 + P_3) - 1\right)}_{\left(\frac{\partial L}{\partial P_2} - 1\right)} + \mu_3 - \mu_4 = 0$$ Ec 2

Suponemos que ninguna restricción se topa, si así fuera habría que hacer una 2° iteración.

Entonces: $\mu_i = 0$; $i = 1,...,5$

$$\frac{\partial F^*}{\partial \lambda} = 1.2 + 0.04(P_2 + 0.5)^2 - P_1 - P_2 - 0.5 = 0 \qquad \text{Ec 3}$$

3 ecuaciones y 3 incógnitas (P_1, P_2 y λ)

$$Ec1: \lambda = 3.5 + P_1$$

$$en \qquad Ec2: 4 + (3.5 + P_1) \cdot [0.08 \cdot P_2 - 0.96] = 0$$

$$P_1 = \frac{0.64 + 0.28 \cdot P_2}{0.96 - 0.08 \cdot P_2}$$

$$en \qquad Ec3: 1.2 + 0.04 \cdot (P_2 + 0.5)^2 - \frac{0.64 + 0.28 \cdot P_2}{0.96 - 0.08 \cdot P_2} - P_2 - 0.5 = 0$$

$$es \qquad decir \qquad 0.0032 \cdot P_2{}^3 - 0.1152 \cdot P_2{}^2 + 1.2584 \cdot P_2 = 0.0416$$

3 ecuaciones y 3 incógnitas (P_1, P_2 y λ)

Se obtienen 2 soluciones complejas y una real la cual es:

$$P_2 = 0.033158$$

Reemplazando:

$$P_1 = 0.6771727 \qquad \lambda = 4.1771727$$

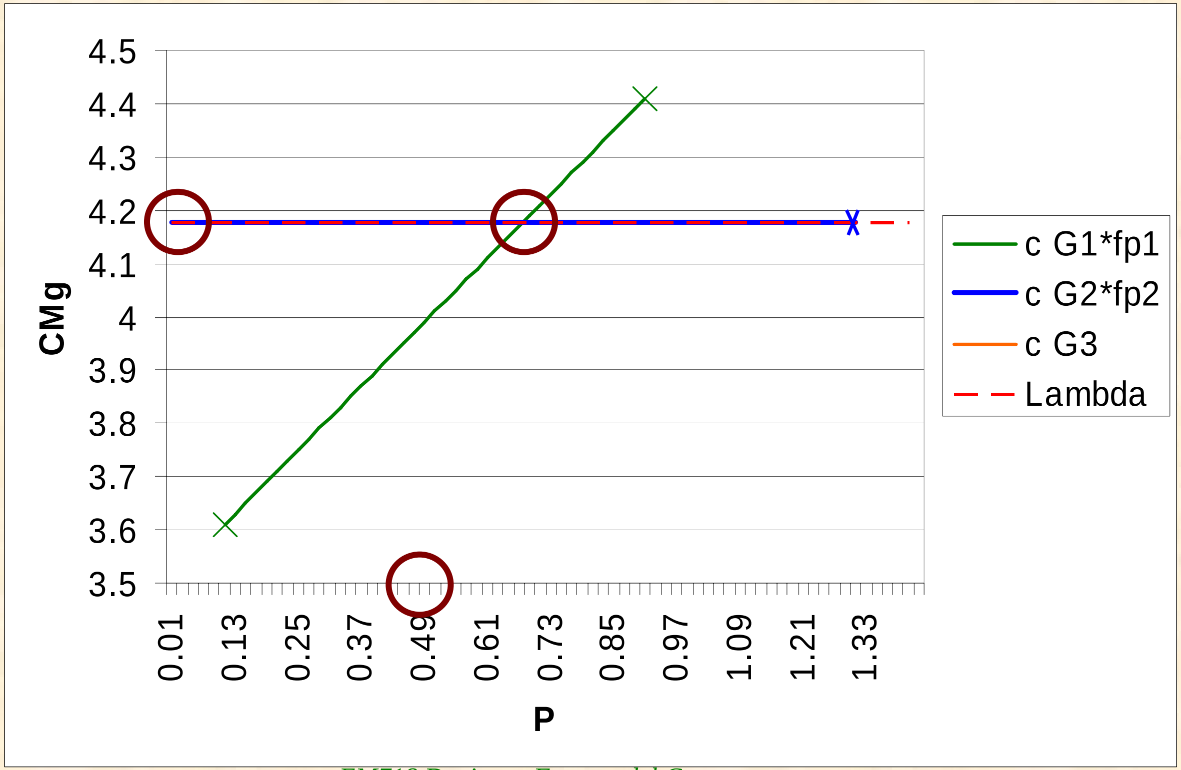
El factor de penalización fp_2:

$$fp_2 = \frac{1}{\left(0.08(P_2 + P_3) - 1\right)} = \text{-}1.04455$$

Las ecuaciones quedan:

$$3.5 + P_1 - \lambda = 0$$

$$4.0 \cdot fp_2 + \lambda = 0$$



Supongamos ahora que se topa la restricción mínima de P_2 pues P_{2min} = 0.4

$\mu_4 \neq 0 \qquad \nu_4 = 0 \qquad P_{2min} - P_2 + \nu_4 = 0 \qquad P_2 = 0.4$

$$\left.\begin{array}{l} P_1 + P_2 + P_3 = D + L \\ P_1 + 0.4 + 0.5 = 1.2 + 0.04\,(0.4 + 0.5) \\ P_1 = 0.336 \qquad P_2 = 0.4 \qquad P_3 = 0.5 \end{array}\right\} \quad \lambda = \left.\frac{\partial C_1}{\partial P_1}\right|_{P_1 = 0.336} \qquad \lambda = 3.836$$

Pues sólo margina una central, la "1"

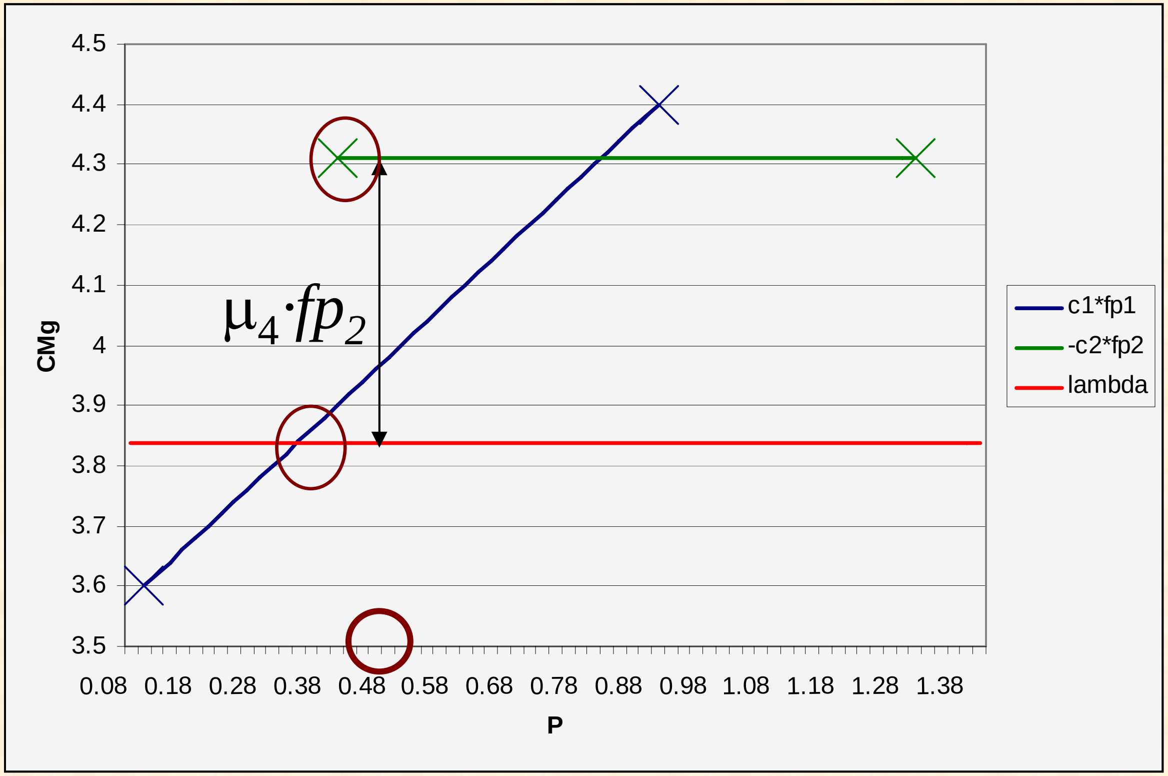
Las ecuaciones quedan:

$$3.5 + P_1 - \lambda = 0$$
$$4.0 \cdot fp_2 + \lambda - \mu_4 \cdot fp_2 = 0$$

$\mu_4 = 0{,}440192$ $\quad fp_2 = -1.07758$

$c_2 + \lambda / fp_2 - \mu_4 = 0 \Rightarrow \lambda = (c_2 - \mu_4) \cdot (-fp_2)$

$\mu_4 \cdot fp_2 = -0.4743$



Los multiplicadores de Lagrange corresponden a los costos asociados a las restricciones que se topan.

Problema 3 (Embalse cota fija)

Un sistema posee una central hidráulica C1 de embalse de 4x 100 MW y un conjunto térmico cuyo costo horario es $C2 = 15\,[US\$/h] + 7.5\,[US\$/MWh] \cdot P + 0.02\,[US\$/MWh^2] \cdot P2^2$

La generación para cada unidad de C1 viene dada aproximadamente por

$P1 = 0.22\,q$ (i.e. El rendimiento de cada máquina es $0.22\,[MW/(m^3/s)]$)

El embalse tiene una relación Volumen/cota $= 3.5 \cdot 10^4 [m^3/m.s.n.m] = 3.5 \cdot 10^4 [m^2]$

s.a.

$q\,min = 400\ m^3/s$, $qmax = 1900\ m^3/s$

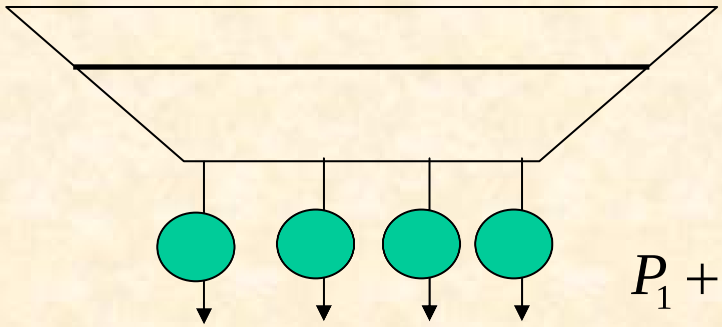
a) Plantee la relación de costo mínimo para 2 intervalos horarios consecutivos k y k+1 y obtenga la operación óptima del parque generador hidrotérmico.

	k	k+1
Demanda [MW]	1260	1300
Cota inicial [m.s.n.m.]	1200	x
Cota final [m.s.n.m.]	x	1170
Afluente [m^3/s]	1250	1275

Resolución :

El siguiente problema es un problema dinámico, ya que la existencia de una central hidráulica de embalse nexa las dos etapas. pero es un problema deterministico (no estocástico), pues los caudales son deterministicos (no aleatorios) en este ejemplo. En la realidad estos caudales son variables aleatorias.

Central hidráulica de embalse :

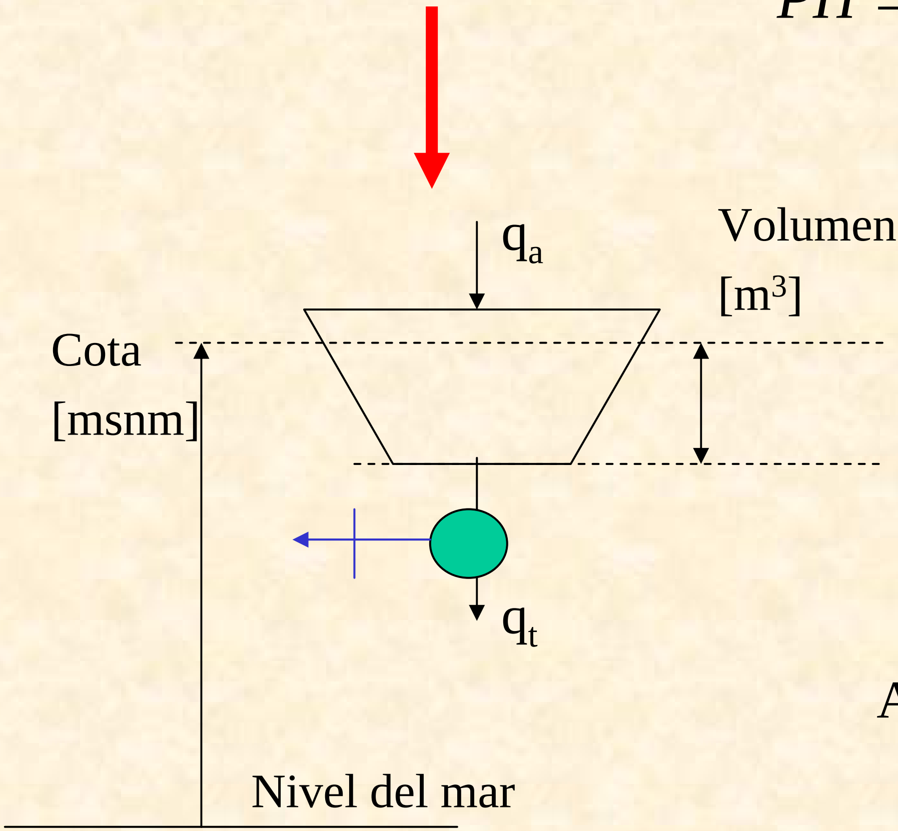


Relación Potencia caudal (rendimiento)

$$P[MW] = \eta\left[\frac{MW}{m^3/s}\right]\cdot q\left[m^3/s\right]$$

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = q_1\cdot\eta + q_2\cdot\eta + q_3\cdot\eta + q_4\cdot\eta = PH$$

$$PH = (q_1 + q_2 + q_3 + q_4)\cdot\eta = q_t\cdot\eta \qquad ec1$$



Relación volumen cota del embalse

$$\frac{V[m^3]}{h[msnm]} = \delta[m^2] \qquad ec2$$

Relación volumen caudal o balance hidráulico

$$\Delta V[m^3] = q\left[m^3/s\right]\cdot\Delta t[s]$$

Aquí c/período es de 1 hora, por tanto:

$$\Delta V = q\cdot 3600 = q\cdot\gamma$$

Función objetivo

Costo Térmico =

$$15 + 7.5 \cdot PT(k) + 0.02 \cdot PT^2(k) + 15 + 7.5 \cdot PT(k+1) + 0.02 \cdot PT^2(k+1)$$

Restricciones

Balance eléctrico:

$$PT(k) = D(k) - PH(k) \qquad ec3$$

$$PT(k+1) = D(k+1) - PH(k+1) \qquad ec4$$

Balance hidráulico:

$$\Delta V(k) = V_f(k) - V_i(k) = \left[q_a(k) - q_t(k)\right] \cdot \gamma$$

$$\Delta V(k+1) = V_f(k+1) - V_i(k+1) = \left[q_a(k+1) - q_t(k+1)\right] \cdot \gamma$$

La existencia de una central hidráulica de embalse enlaza las 2 etapas, k con k+1. Asi:

$$V_f(k) = V_i(k+1) = V$$

$$V - V_i(k) = \left[q_a(k) - q_t(k)\right]\cdot \gamma$$
$$V_f(k+1) - V = \left[q_a(k+1) - q_t(k+1)\right]\cdot \gamma$$

Despejando los caudales turbinados:

$$q_t(k) = \frac{V_i(k) - V}{\gamma} + q_a(k)$$

$$q_t(k+1) = \frac{V - V_f(k+1)}{\gamma} + q_a(k+1)$$

Reemplazando en la ec1 (P=q·η) para calcular la potencia eléctrica asociada a los caudales turbinados se tiene:

$$PH(k)=\frac{V_i(k)\cdot\eta - V\cdot\eta}{\gamma}+\eta\cdot q_a(k)$$

$$PH(k+1)=\frac{V\cdot\eta - V_f(k+1)\cdot\eta}{\gamma}+\eta\cdot q_a(k+1)$$

Reemplazando en las ecs 3 y 4 de balance eléctrico (PH+PT=D) se tiene:

$$PT(k) = D(k) - \left(\frac{V_i(k)\cdot\eta - V\cdot\eta}{\gamma} + \eta\cdot q_a(k) \right)$$

$$= \underbrace{\left[D(k) - \frac{V_i(k)\cdot\eta}{\gamma} - \eta\cdot q_a(k) \right]}_{\boldsymbol{a_1}} + \underbrace{\frac{\eta}{\gamma}}_{\boldsymbol{b}}\cdot V$$

$$PT(k+1) = D(k+1) - \left(\frac{V\cdot\eta - V_f(k+1)\cdot\eta}{\gamma} + \eta\cdot q_a(k+1) \right)$$

$$= \underbrace{\left[D(k) + \frac{V_f(k+1)\cdot\eta}{\gamma} - \eta\cdot q_a(k+1) \right]}_{\boldsymbol{a_2}} - \underbrace{\frac{\eta}{\gamma}}_{\boldsymbol{b}}\cdot V$$

$$PT(k) = a_1 + b\cdot V$$

$$PT(k+1) = a_2 - b\cdot V$$

Reemplazando en la Función Objetivo:

$$F.O. = CT = 15 + 7.5\cdot\left(a_1 + b\cdot V\right) + 0.02\cdot\left(a_1 + b\cdot V\right)^2 + 15 + 7.5\cdot\left(a_2 - b\cdot V\right) + 0.02\cdot\left(a_2 - b\cdot V\right)^2$$

$$F.O. = \left[30 + 7.5\cdot a_1 + 0.02\cdot a_1^{\,2} + 7.5\cdot a_2 + 0.02\cdot a_2^{\,2}\right] + \left[0.04\cdot b\cdot\left(a_1 - a_2\right)\right]\cdot V + \left[0.04\cdot b^2\right]\cdot V^2$$

Como la función es continua y su segunda derivada es monótona:

$$\frac{\partial F.O.}{\partial V} = \left[0.04\cdot b\cdot\left(a_1 - a_2\right)\right] + \left[0.08\cdot b^2\right]\cdot V^* = 0$$

$$V^* = \frac{0.04\cdot\left(a_2 - a_1\right)}{0.08\cdot b}$$

$$V^* = \frac{\left(a_2 - a_1\right)}{2\cdot b}$$

Reemplazando:

$$V^{*} = 41.7572\left[Hm^{3}\right]$$

La cota asociada a este volumen es:

$$h = 1193.1\left[msnm\right]$$

Los caudales turbinados en cada uno de los periodos son:

$$q_t(k) = 1317.4\left[m^{3}/s\right] \qquad q_t(k+1) = 1499.2\left[m^{3}/s\right]$$

Están en el rango permitido

Que corresponden a una potencia hidráulica de:

$$PH(k) = 290\left[MW\right] \qquad PH(k+1) = 330\left[MW\right]$$

Están en el rango permitido

La central térmica genera:

$$PT(k) = 970[MW] \qquad PT(k+1) = 970[MW]$$

Los costos de operación en cada etapa son:

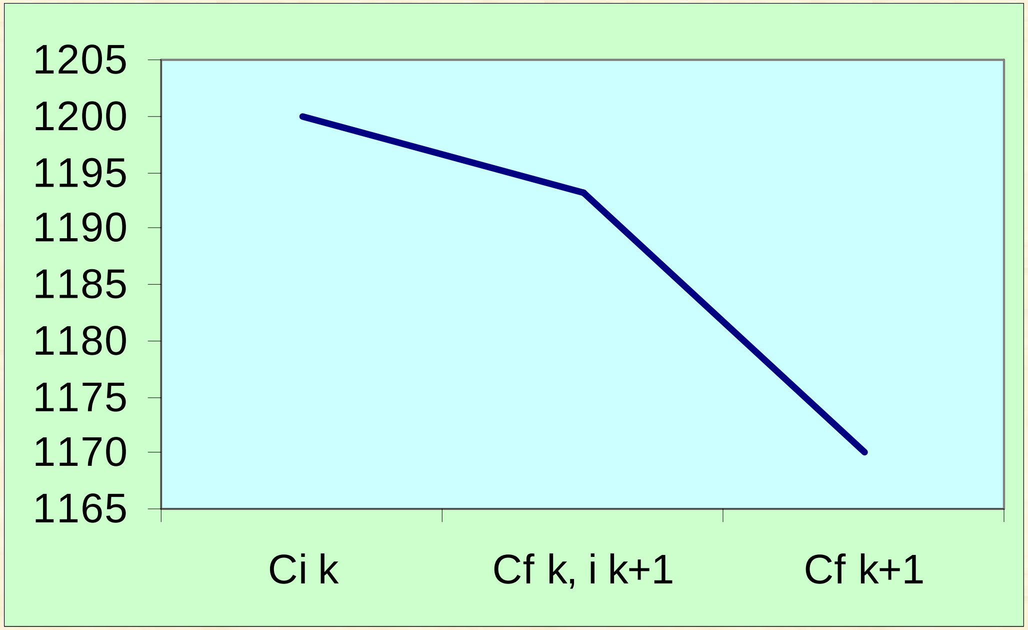
$$CT(k) = 26116[US\$] \qquad CT(k+1) = 26116[US\$]$$

$$CT = 52231[US\$]$$

Llevando a un cuadro resumen:

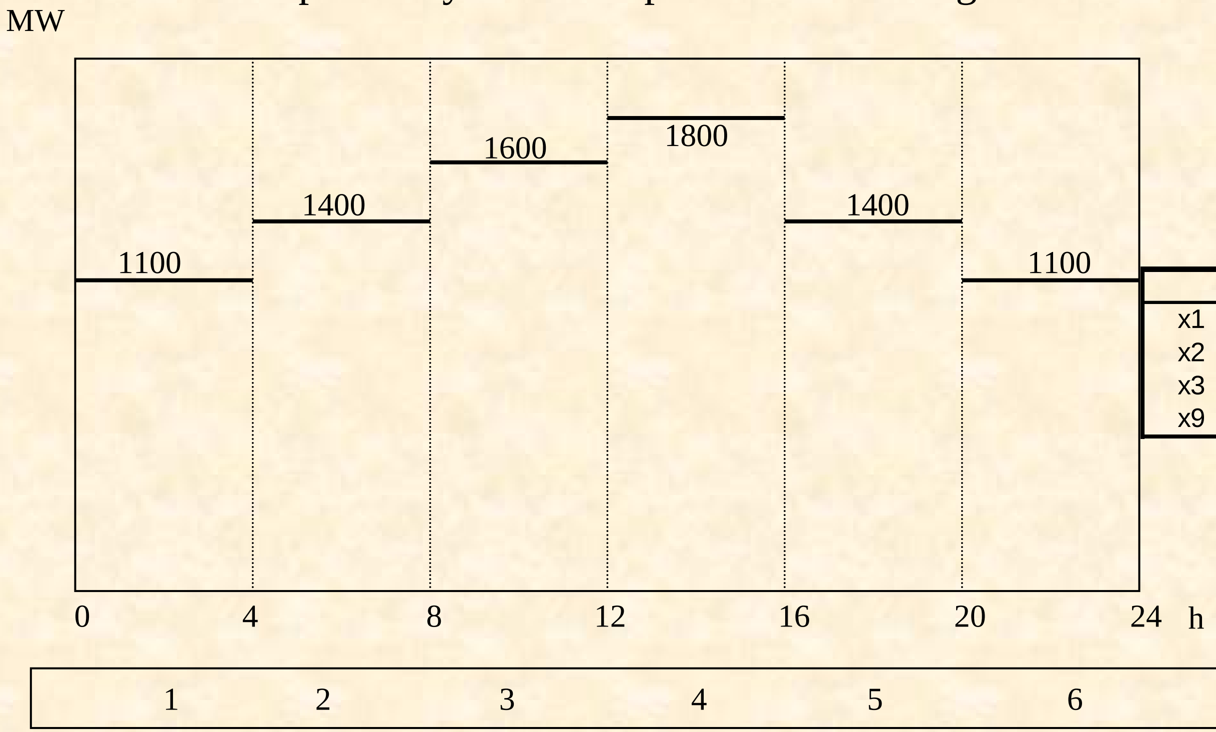
	k	k+1	
D	1260	1300	MW
qa	1250	1275	m3/s
Ci	1200.0	1193.1	msnm
Cf	1193.1	1170.0	msnm
Vi	42000000	41757273	m3
Vf	41757273	40950000	m3
qt	1317.4	1499.2	m3/s
PH	290	330	MW
PT	970	970	MW
C	26116	26116	US$

Trayectoria de cota



Problema 3 : (Sistema térmico con programación dinámica)

Determine el programa de operación óptimo para abastecer la curva de carga de 6 bloques, mediante 4 unidades generadoras cuyos precios mínimos de abastecimiento conjunto por bloque se indica en la tabla anexa. Suponga que el costo de conexión (partida) de c/ central es de $ 3000 y el costo de desconexión es de $ 1500 por central. Suponga que sólo las unidades 1 y 2, que están siempre en operación, están conectadas en la primera y última etapa del ciclo de carga.



Costo minimo

	1100	1400	1600	1800
x1	45848	58428	70908	76472
x2	45848	59356	68976	79184
x3	44792	58236	67856	**NF**
x9	45868	**NF**	**NF**	**NF**

Unidad	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13	x14	x15
1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0
2	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0
3	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0
4	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1

	1100 1		1400 2		1600 3		1800 4		1400 5		1100 6	
	F	P	F	P	F	P	F	P	F	P	F	P
x1												
x2												
x3												
x9												

Unidad	x1	x2	x3	x9
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	0	0
4	1	0	1	0

Costo minimo

	1100	1400	1600	1800
x1	45848	58428	70908	76472
x2	45848	59356	68976	79184
x3	44792	58236	67856	NF
x9	45868	NF	NF	NF

Conexión	3000
Desconex	15000

	1100 1		1400 2		1600 3		1800 4		1400 5		1100 6	
	F	P	F	P	F	P	F	P	F	P	F	P
x1			312912 314812 314360	58428	254484 256816	70908	183768 184696 183576	76472	107296	58428	NF	
x2			316840 314240 318288	59356	255552 254884	68976	189480 185908 189288	79184	106724	59356	NF	
x3			315720 317620 312668	58236	254432 258264	67856	NF		105604	58236	NF	
x9	364780 363108 361536	45868	NF		NF		NF		NF		45868	45868

x1	-		312912	x1	254484	x1	183576	x3	107296	x9	-
x2	-		314240	x2	254884	x2	185908	x2	106724	x9	-
x3	-		312668	x3	254432	x1	-		105604	x9	-
x9	361536	x3	-		-		-		-		45868