CI66J/CI71T MODELACION NUMÉRICA DE AGUAS SUBTERRANEAS
SEMESTRE OTOÑO 2008
EJERCICIO #1

Marzo 28 de 2008

DESARROLLO Y VALIDACIÓN DE UN MODELO NUMERICO

El objetivo principal de este ejercicio es el desarrollo de un modelo de simulación numérico para estudiar el flujo de agua subterránea en un sistema acuífero unidimensional, isotrópico y homogéneo. Este código será validado al comparar la solución numérica para un problema tipo, con la solución analítica en régimen transiente.

Para lo anterior se utilizará el documento anexo sobre “Soluciones Analíticas de Flujo en Régimen Transiente” para identificar la ecuación diferencial característica de este proceso, sus condiciones de borde e iniciales, así como la solución analítica de la misma.

Parte A

Diseñe un modelo numérico para el problema de la respuesta de un acuífero ante un cambio del nivel de agua subterránea en uno de sus extremos. Este modelo podrá ser utilizado en forma indistinta para los dos problemas abordados en el documento anexo, a pesar de que en ambos casos la definición de la variable de estado, h, es ligeramente distinta.

Para el desarrollo del modelo numérico se utilizará un esquema de diferencias finitas implícito, el que puede ser resuelto mediante el algoritmo de Thomas, que se describe en otro documento anexo.

Entregue un resumen de las ecuaciones algebraicas que resultan de la implementación del Método de Diferencias Finitas (MDF) a la ecuación diferencial de interés. Indique esquemáticamente el algoritmo de solución y la implementación de las condiciones de borde e iniciales.

Parte B

Valide el modelo de simulación numérico utilizando la solución analítica para el problema del Cambio Brusco en el Nivel del Embalse. Utilice las características que se indican en la Tabla 1.

Tabla 1
Propiedades y Parámetros Utilizados en Parte B

Propiedad	Valor	Unidad
h_1 ($\forall t$)	16	m
h_2 (t=0)	16	m
h_2 (t>0)	11	m
T	30	m^2/día
S	0.002	-
L	100	m
N	101	nudos
Δt	0.1	minuto

a) Para efectos de la validación compare la evolución temporal de la solución numérica, en x igual a 25, 50 y 75 m, con la solución analítica para el tiempo de simulación (tiempo entre 0 y 200 minutos). Prepare un gráfico que ilustre esta comparación.

b) Para un tiempo de 100 minutos compare la solución numérica y la analítica a lo largo del acuífero (distancia entre 0 y 100 m). Prepare un gráfico que ilustre esta comparación.

Parte C

Valide el modelo de simulación numérico utilizando la solución analítica para el problema del Efecto de las Mareas. Utilice las características que se indican en la Tabla 2.

Tabla 2
Propiedades y Parámetros Utilizados en Parte C

Propiedad	Valor	Unidad
T	100	m^2/día
S	0.02	-
L	200	m
Δx	0.1	m
T_F	2	días
Δt	0.01	días
t_0	1	día
h_0	2	m

Utilice el modelo desarrollado para responder las siguientes consultas:

a) Compare su solución numérica con la solución analítica indicada en el documento referido. Determine el error de cálculo al comparar la solución analítica y numérica para T = 1 día.

b) Analice el efecto del intervalo de tiempo (Δt) sobre la solución. Utilice al menos un valor mayor y uno menor al indicado en la parte (a) y verifique el error de cálculo en cada caso. Grafique y comente su respuesta.

La fecha límite para el envío de la actividad (Informe Tarea 1) es el lunes 14 de Abril de 2008. Por favor dejar ejemplar impreso en Secretaría de Hidráulica (hasta las 17:00) y enviar versión digital por U-Cursos (hasta las 23:59).

ASPECTOS TEORICOS

La ecuación diferencial que gobierna el flujo se puede escribir como:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{S}{T} \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \tag{1}$$

donde h es la elevación o caída neta de la superficie piezométrica con respecto al nivel medio del mar, x es la distancia medida desde el nivel del mar, S es el coeficiente de almacenamiento del acuífero, T es la transmisibilidad y t es el tiempo.

Los términos anteriores pueden ser aproximados por las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \cong \frac{h_{i-1}^{k+1} - 2 \cdot h_i^{k+1} + h_{i+1}^{k+1}}{\Delta x^2} \tag{2}$$

y

$$\frac{\partial h}{\partial t} \cong \frac{h_i^{k+1} - h_i^k}{\Delta t} \tag{3}$$

donde h_i^k es la elevación del nivel piezométrico en el punto *i* de la malla de discretización del sistema acuífero, *k* es el período de tiempo, Δx es el tamaño de la grilla de discretización, y Δt es el intervalo de tiempo. Al combinar las ecuaciones (2) y (3) se obtiene un esquema de cálculo implícito que permite determinar la elevación del nivel piezométrico a través del tiempo.

Al reemplazar las aproximaciones (2) y (3) en (1) se obtiene:

$$\frac{h_{i-1}^{k+1} - 2 \cdot h_i^{k+1} + h_{i+1}^{k+1}}{\Delta x^2} = \frac{S}{T} \cdot \frac{h_i^{k+1} - h_i^k}{\Delta t} \tag{4}$$

lo cual puede ser desarrollado para obtener la siguiente expresión algebraica que es válida en el nodo i:

$$h_{i-1}^{k+1} - \left(2 + \frac{S \cdot \Delta x^2}{T \cdot \Delta t} \right) \cdot h_i^{k+1} + h_{i+1}^{k+1} = -\frac{S \cdot \Delta x^2}{T \cdot \Delta t} \cdot h_i^k \tag{5}$$

Al utilizar esta expresión, que es válida para el nodo i, para todos los nodos de la malla de discretización e incorporar las condiciones de borde correspondientes, se obtiene un sistema de ecuaciones cuya resolución entrega el valor de la variable de estado, h, en toda la malla y en el tiempo k+1.

En el caso de una solución numérica es posible definir el error de cálculo como una medida de la diferencia entre las soluciones numérica y analítica. Una posible medida de este error de cálculo en el tiempo k es la siguiente:

$$EC^k = \underset{i=1,nx}{MAX} \left| hnum_i^k - hteo_i^k \right| \qquad (6)$$

donde $hnum_i^k$ es la solución numérica para el nudo i en el tiempo k, mientras que $hteo_i^k$ es la solución teórica para la misma posición y tiempo.