



---

# CI63G Planificación de Sistemas de Transporte Público Urbano

Clase 20  
Semestre Otoño 2008

# Antecedentes Generales

## ■ Plan Transantiago



# Descripción del Problema

---

- Proceso de planificación de cualquier empresa de transporte público:

- |          |   |   |
|----------|---|---|
| Etapa I  | { | <ul style="list-style-type: none"><li>1. Diseño de la red de transporte</li><li>2. Diseño del horario de los buses (timetable)</li><li>3. Asignación de los vehículos a los viajes (vehicle scheduling)</li></ul> |
| Etapa II | { | <ul style="list-style-type: none"><li>4. Asignación de los conductores (driver scheduling)</li></ul>  |

# Asignación de Conductores

---

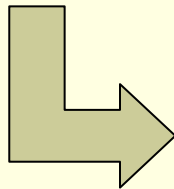
- Objetivos:

1. Minimizar Costos y respetar restricciones
  - Jornada máxima de 10 hrs.
  - 1 descanso al día, preferentemente al medio de la jornada
  - 45 hrs. semanales, o a los más 57 hrs. pagando extra
  - 1 día libre a la semana
2. Definir las jornadas diarias de cada conductor
  - ↳ Modelo con Generación de Columnas  
Problema Maestro y Sub Problema
3. Asignar las jornadas diarias para una semana
  - ↳ Modelo de Rostering

# Asignación de Conductores

---

- Otras Consideraciones:
  - Tres conjuntos de viajes:
    - Lunes a viernes, Sábado y Domingo
  - Cada recorrido sale y regresa a un mismo terminal
  - Restricciones operacionales:
    - Definir cuadrillas de conductores por cada recorrido
    - Minimizar la rotación de conductores entre los buses



Modelo por cada recorrido para cada día por separado

- 3 conjuntos de jornadas Diarias para cada recorrido

# Modelo de Generación de Columnas

---

- Definir las mejores jornadas diarias:
  - Que viajes cubrir
  - En que momento asignar el descanso diario
  - Minimizar el número de jornadas necesarias para cubrir todos los viajes

**Problema Maestro**

**Seleccionar las  
mejores jornadas**

**Sub Problema**

**Construir  
mejores jornadas**

# Problema Maestro (PM)

---

- Seleccionar las mejores jornadas
  - Minimizar el n° de jornadas que cubren todos los viajes
  - Set Partitioning Problem
- Construir conjunto inicial J de jornadas (columnas) factibles
- Solucionar la relajación lineal del problema
- Calcular las variables duales para pasar al Sub Problema

# Problema Maestro (PM)

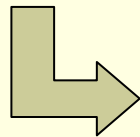
- **Parámetros:**
  - $V$  = conjunto de viajes diarios
  - $J$  = conjunto de jornadas (columnas)
  - $C_j$  = costo jornada  $j$
  - $A_{vj} = \begin{cases} 1 & \text{si el viaje } v \text{ es cubierto por la jornada } j \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \quad \begin{matrix} \forall v \in V \\ \forall j \in J \end{matrix}$
- **Variable:**
  - $X_j = \begin{cases} 1 & \text{si la jornada } j \text{ es seleccionada} \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \quad \forall j \in J$
- **Restricciones:**
  - $\sum_{j \in J} A_{vj} \cdot X_j = 1 \quad \forall v \in V$
  - $X_j \in \{0,1\} \quad \forall j \in J$
- **Función Objetivo:**
  - $$\text{Min} \sum_{j \in J} C_j \cdot X_j$$



# Sub Problema (SP)

---

- Proponer nuevas jornadas que mejoren la solución
  - Problema de Ruta mínima con restricción de recursos
    - Duración máxima de la jornada
    - Descanso diario
  - Costo de realizar un viaje proviene de las variables duales del PM
- Red Acíclica y dirigida
  - Red extendida reducida
  - Algoritmo de ruta mínima similar a Dijkstra



Programación Dinámica

# Sub Problema (SP)

## ■ Programación Dinámica

### ■ Parámetros Red Extendida:

- Numero viaje: índice del n° de viaje
- Máquina (n° bus)
- Jornada: tiempo restante de jornada
- Descanso: si ha descansado o no
- Turno: mañana o tarde

Nodo = viaje  
con distintos  
valores de los  
parámetros

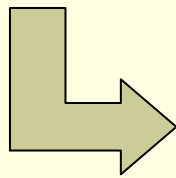
### ■ Algoritmo:

- Definir para cada nodo sus nodos antecesoros
- Ruta mínima desde la fuente al sumidero
  - Si costo de la ruta mínima es negativo, construir nueva columna, agregarla a J y reoptimizar el PM
  - Si no, terminar de iterar y resolver el PM entero

# Sub Problema

---

- Restricción Operativa:
  - Que no ocurran muchos cambios de bus en un mismo día (máximo 5)



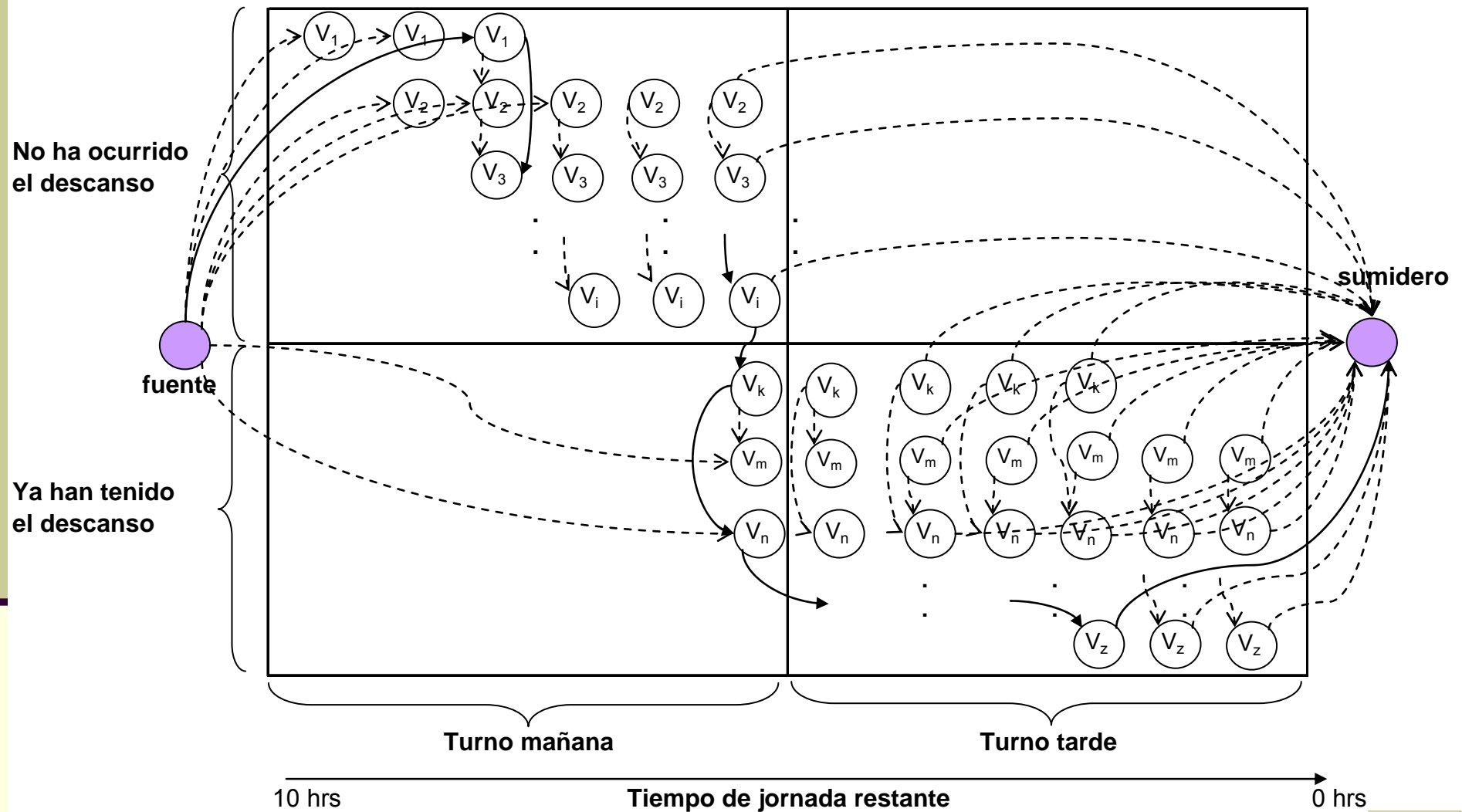
Al definir los antecesores restringir el cambio de buses

Dos escenarios a analizar:

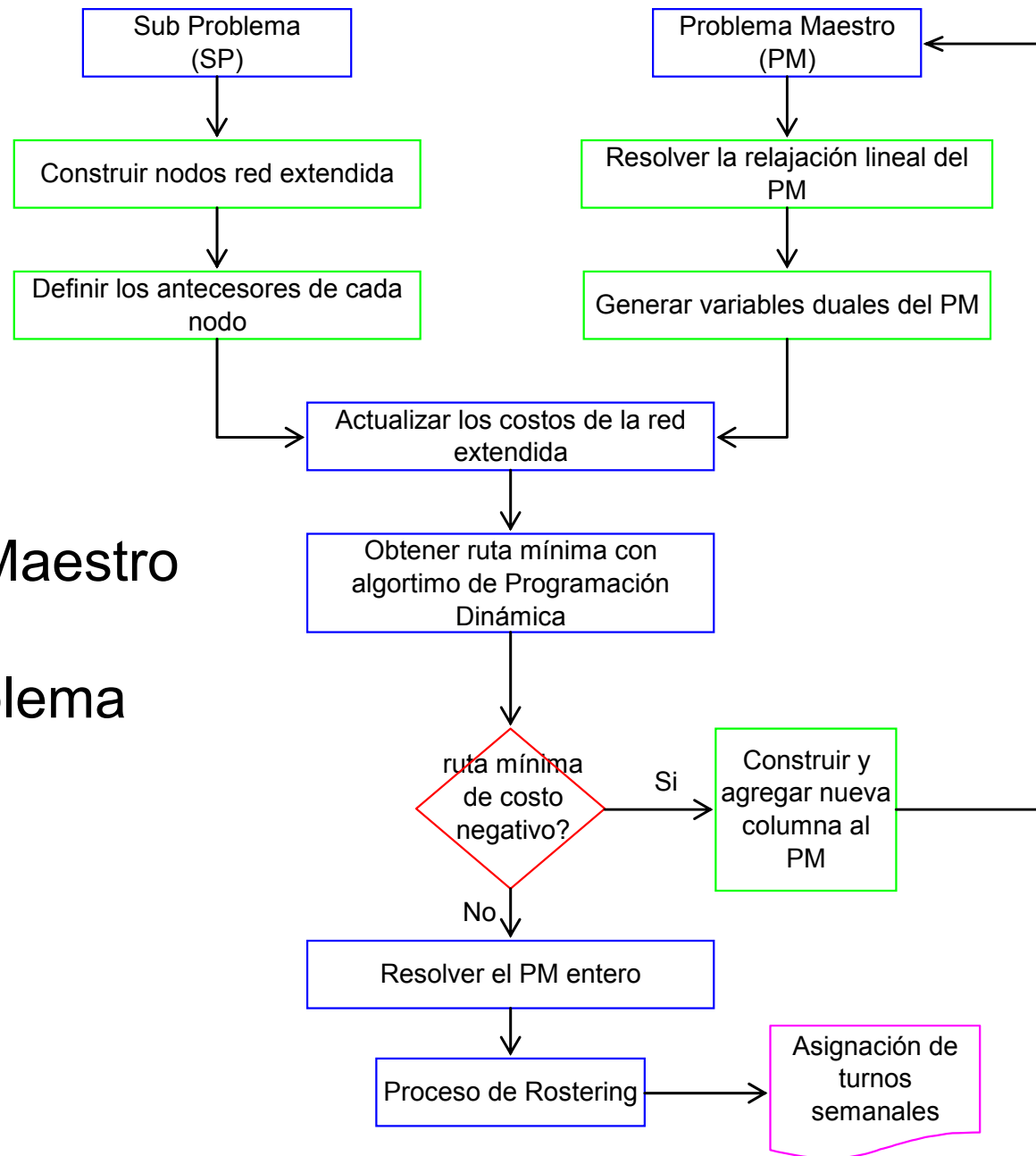
Restringiendo  
el cambio de  
buses: sólo 1  
luego del  
descanso

Sin Restringir  
el cambio de  
buses

# Red Extendida SP



# Problema Maestro Y Sub Problema



# Modelo de Rostering

---

- Las jornadas seleccionadas con Generación de Columna deben ser asignadas a cada conductor por 1 semana
  - Asignar 1 día libre a la semana
  - Trabajar 45 hrs. a la semana, o 57 hrs. pagando extra
  - Minimizar costos totales
    - Sueldo fijo
    - Pago hrs. extra

# Modelo de Rostering

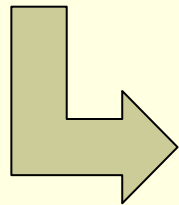
---

- Si el  $n^{\circ}$  de conductores es variable  
→ Modelo No Lineal
- Tomar  $n^{\circ}$  de conductores como parámetro
- Imponer un valor inicial para el  $n^{\circ}$  de conductores y correr el modelo
  - Si es infactible, aumentar en uno el  $n^{\circ}$  de conductores y correr nuevamente el modelo
  - Si es factible → Solución que minimiza el  $n^{\circ}$  de conductores

# Modelo de Rostering

---

- Solución que minimiza el n° de conductores  
≠ solución que minimiza costos totales
  - Al aumentar n° de conductores disminuye el pago por horas extra
  - Pero aumenta el pago por sueldos fijos



Correr el modelo aumentando el n° de conductores hasta que los costos totales disminuyan



# Resultados

- Instancia:
  - N° de recorridos: 20
  - N° de buses: 253
  - N° promedio de viajes diarios por recorrido  $\approx 100$
- Resultados Obtenidos:

| Escenarios                  | Sin Restringir<br>cambio de<br>buses | Restringir<br>cambio de<br>buses |
|-----------------------------|--------------------------------------|----------------------------------|
| Minimizar N°<br>Conductores | 1                                    | 3                                |
| Minimizar<br>Costos Totales | 2                                    | 4                                |

# Resultados

| Sin Restringir Cambio de Buses |                    |   | Nº Conductores | Nº Conductores por Bus | Promedio Hrs. Trabajadas Semanal | Promedio Hrs. Extra Semanal |
|--------------------------------|--------------------|---|----------------|------------------------|----------------------------------|-----------------------------|
| 1                              | Min Nº Conductores | D | 260            | 2,68                   | 46,93                            | 3,23                        |
|                                |                    | F | 332            | 2,13                   | 44,73                            | 2,65                        |
| 2                              | Min Costos Totales | D | 262            | 2,7                    | 46,57                            | 3                           |
|                                |                    | F | 334            | 2,14                   | 44,46                            | 2,5                         |
| Restringir Cambio de Buses     |                    |   | Nº Conductores | Nº Conductores por Bus | Promedio Hrs. Trabajadas         | Promedio Hrs. Extra         |
| 3                              | Min Nº Conductores | D | 276            | 2,85                   | 44,58                            | 2,14                        |
|                                |                    | F | 358            | 2,29                   | 41,03                            | 1,61                        |
| 4                              | Min Costos Totales | D | 277            | 2,86                   | 44,42                            | 2,05                        |
|                                |                    | F | 358            | 2,29                   | 41,03                            | 1,61                        |

# Resultados

| Sin Restringir Cambio de Buses |                    |   | Costo Promedio Mensual | Costo Total Mensual | Costo Total Anual |
|--------------------------------|--------------------|---|------------------------|---------------------|-------------------|
| 1                              | Min N° Conductores | D | \$ 401.692,29          | \$104.439.995       | \$1.253.279.940   |
|                                |                    | F | \$ 392.473,89          | \$130.301.330       | \$1.563.615.960   |
| 2                              | Min Costos Totales | D | \$ 397.963,34          | \$104.266.396       | \$1.251.196.752   |
|                                |                    | F | \$ 389.964,86          | \$130.248.263       | \$1.562.979.156   |

| Restringir Cambio de Buses |                    |   | Costo Promedio Mensual | Costo Total Mensual | Costo Total Anual |
|----------------------------|--------------------|---|------------------------|---------------------|-------------------|
| 3                          | Min N° Conductores | D | \$ 384.204,84          | \$106.040.535       | \$1.272.486.420   |
|                            |                    | F | \$ 375.795,13          | \$134.534.656       | \$1.614.415.872   |
| 4                          | Min Costos Totales | D | \$ 382.764,38          | \$106.025.734\$1    | \$1.272.308.808   |
|                            |                    | F | \$ 375.795,13          | 34.534.656          | \$1.614.415.872   |

# Resultados

## Situación Base

Primer viaje: 05:30 hrs.

Último viaje: 01:30 hrs.

20 hrs. diarias 140 hrs. sem.

## Minimizar Costos Totales Sin restringir cambio de buses

NºConductores por bus =  $140/45 = 3,1$

- Sin pago por horas extra

# Resultados

## Situación Base

Nº de Conductores

D = 302

F = 485

Total = 787

Costo Total Anual

D = \$ 1.268.400.000

F = \$ 2.037.000.000

Total = 3.305.400.000

## Minimizar Costos Totales Sin restringir cambio de buses

Nº de Conductores

D = 262

F = 334

Total = 596

Costo Total Anual

D = \$1.251.196.752

F = \$1.562.979.156

Total = 2.814.175.908

# Resultados

**Situación Base**

**Minimizar Costos Totales  
Sin restringir  
cambio de buses**

**Disminución 24%  
Nº conductores**

**Ahorro 14.86% anual  
\$491.000.000**

# Conclusiones

---

- N° Conductores:
  - Sin Restringir < Restringido
- Horas Trabajadas:
  - Restringido < Sin Restringir
- Horas Extra:
  - Restringido < Sin Restringir
- Costo Total:
  - Sin Restringir < Restringido
- Minimizar Costos Totales:
  - Disminuye pago por hrs. extras, pero no los costos totales
    - Sueldo fijo demasiado superior al pago por hrs. extras
    - Si el pago por hrs. extras aumentara, el resultado podría ser inverso

# Conclusiones

---

- Modelo eficiente operativamente:
  - Tiempo de solución menor a 1 HR. en cada zona
  - Disminuye el n° de conductores un 24%
  - Disminuyen los costos en un 14%
  - Ahorro Anual = \$491.000.000



# Referencias

---

- Avishai Ceder, "Urban Transit Scheduling: Framework, Review and Examples", Journal of Urban Planning and Development, Vol. 128, No 4, Diciembre 2002 pp. 225-244
- A.T. Ernst, H. Jiang, M. M. Krishnamoorthy, D. Sier, "Staff scheduling and rostering: A review of applications, methods and models", European Journal of Operational Research 153 (2004) pp. 3-27
- M. Desrochers, F. Soumis, "A Column Generation Approach to the Urban Transit Crew Scheduling Problem", Transportation Science, Vol. 23, No. 1, Febrero 1989
- D. Huisman, R. Freling, A. Wagelmans, "Multiple-Depot Integrated Vehicle and Crew Scheduling", Econometric Institute Report EI2003-02, Econometric Institute, Erasmus University Rotterdam.
- K. Haase, G. Desaulniers, J. Desrosiers, "Simultaneous Vehicle and Crew Scheduling in Urban Mass Transit Systems", Transportation Science, Vol. 35, No. 3, Agosto 2001 pp.286-303
- K. Hoffman, M. Padberg, "Solving Airline Crew Scheduling Problems by Branch and Cut", Management Science, Vol. 39, 6 Junio 1993 pp. 657-682.

# Referencias

---

- S. Fores, L. Proll, A. Wren, "An Improved ILP System for Driver Scheduling", Computer-Aided Transit Scheduling, Agosto 1997, pp 43-61
- S. Fores, L. Proll, A. Wren, "TRACS II: a hybrid IP/heuristic driver scheduling system for public transport", Journal of the Operational Research Society, Vol. 53, 2002 pp. 1093-1100
- K. Haase and C. Friberg, "An Exact Algorithm for the Vehicle and Crew Scheduling Problem", Computer-Aided Transit Scheduling, Agosto 1997, pp 63-80
- J. Desrosiers, Y. Dumas, M. Solomon, F. Soumis, "Time Constrained Routing and Scheduling", Handbook in OR & MS, Vol. 8, 1995, Capítulo 2, pp. 35-139

# Material Adicional

---

# Sub Problema

---

## ■ Notación

- $N$ : conjunto que almacena todos los nodos de la red extendida
- $V[i]$ : índice del viaje asociado al nodo  $i$
- $E[j]$ : costo de visitar el nodo  $j$  por alguna ruta factible desde la fuente.
- $P[j]$ : nodo antecesor a  $j$  elegido para llegar a él.
- $A[j]$ : conjunto de todos los nodos antecesores al nodo  $j$ .
- $C[i][j]$ : costo de pasar desde el nodo  $i$  al nodo  $j$ , con  $i$  nodo antecesor a  $j$
- $D[v]$ : valor de la variable dual de la restricción de cubrimiento del viaje  $v$

# Sub Problema

## ■ Algoritmo de Ruta Mínima

### 1. Inicialización

$$E[f] = 0 \quad E[i] = K = 1000 \quad \forall i \in N$$

### 2. Definir los costos de acuerdo a las variables duales del PM

$$C[i][j] = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ es la fuente} \\ -D[V[i]] & \text{si no} \end{cases}$$

### 3. Elegir el nodo a analizar según orden en que fueron creados

$$E[j] = \text{Min}_i \{E[j], E[i] + C[i][j]\} \quad P[j] = i$$

$$\forall j \in N \quad i \in A[j]$$

# Sub Problema

---

- Algoritmo de Ruta Mínima

4. Costo ruta mínima =  $E[s]$

1. Si  $E[s] \leq 0 \rightarrow$  construir nueva columna, reoptimizar PM, recalcular variables duales y volver a 2
2. Si  $E[s] > 0 \rightarrow$  terminar



# Modelo de Rostering

- Parámetros:

- $DJ_j$  = duración jornada  $j$

- $DD_j$  = duración del descanso de la jornada  $j$

- Variables:

$$X_{cjd} = \begin{cases} 1 & \text{si la jornada } j \text{ es asignada al conductor } c \text{ el día } d \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \quad \forall c \in \{1, 2, \dots, C\} \quad j \in J_h \quad d \in \{\text{lunes}, \dots, \text{viernes}\}$$

$$Y_{cj} = \begin{cases} 1 & \text{si la jornada } j \text{ es asignada al conductor } c \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \quad \forall c \in \{1, 2, \dots, C\} \quad j \in J_d$$

$$Z_{cj} = \begin{cases} 1 & \text{si la jornada } j \text{ es asignada al conductor } c \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \quad \forall c \in \{1, 2, \dots, C\} \quad j \in J_d$$

$$L_{cd} = \begin{cases} 1 & \text{si el conductor } c \text{ tiene el día } d \text{ libre} \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \quad \forall c \in \{1, 2, \dots, C\} \quad d \in \{\text{lunes}, \dots, \text{domingo}\} \quad 1/4$$

# Modelo de Rostering

- Variables:

$W_c$  = minutos trabajados a la semana por el conductor  $c \quad \forall c \in \{1, 2, \dots, C\}$

$H_c$  = minutos de holgura a la semana del conductor  $c \quad \forall c \in \{1, 2, \dots, C\}$

- Función Objetivo:

$$\text{Max} \sum_{c=1}^C H_c$$

- Restricciones:  $\forall c \in \{1, 2, \dots, C\}$

- Definir las horas semanales trabajadas

$$W_c = \sum_{d=\text{lunes}}^{\text{viernes}} \sum_{j \in J_h} X_{cjd} \cdot (DJ_j - DD_j) + \sum_{j \in J_s} Y_{cj} \cdot (DJ_j - DD_j) + \sum_{j \in J_d} Z_{cj} \cdot (DJ_j - DD_j)$$



# Modelo de Rostering

- Restricciones:

- No trabajar mas de 57 horas

- 1 día libre a la semana  $W_c \leq 57 \cdot 60$

- No asignar jornada los días libre  $\sum_{d=\text{lunes}}^{\text{domingo}} L_{cd} = 1$

$$X_{cjd} \leq 1 - L_{cd} \quad \forall j \in J_h \quad \forall d \in \{\text{lunes}, \dots, \text{viernes}\}$$

$$Y_{cj} \leq 1 - L_{c5} \quad \forall j \in J_s$$

$$Z_{cj} \leq 1 - L_{c6} \quad \forall j \in J_d$$

# Modelo de Rostering

## ■ Restricciones

- Asignar las jornadas a un único conductor

$$\sum_{c \in C} X_{cjd} = 1 \quad \forall j \in J_h \quad \forall d \in \{\text{lunes}, \dots, \text{viernes}\}$$

$$\sum_{c \in C} Y_{cj} = 1 \quad \forall j \in J_s$$

$$\sum_{c \in C} Z_{cj} = 1 \quad \forall j \in J_d$$

- Asignar a lo mas 1 jornada a cada conductor  $\forall c \in \{1, 2, \dots, C\}$

$$\sum_{j \in J_h} X_{cjd} \leq 1 \quad \forall d \in \{\text{lunes}, \dots, \text{viernes}\}$$

$$\sum_{j \in J_s} Y_{cj} \leq 1 \quad \sum_{j \in J_d} Z_{cj} \leq 1$$

- Definir las variables de holgura

$$H_c = 57 \cdot 60 - W_c$$

