CI63G Planificación de Sistemas de Transporte Público Urbano

Clase 10-11

Semestre Otoño 2008

Modelos de asignación de Transporte Público

- Para una oferta y demanda dadas de transporte público, se decide como se asignan los pasajeros a los vehículos en las paradas (equilibrio)
- Básicamente, se distingue dos enfoques:
  - Rutas mínimas
  - Estrategias óptimas (hiper-rutas mínimas)
- Complejidad del problema:
  - Sin restricción de capacidad en paraderos
  - Con restricción de capacidad en paraderos

Modelos de asignación de Transporte Público

- **Rutas mínimas**

  Sin restricción de capacidad en paraderos

  (De Cea y Fernández, 1989)

  Con restricción de capacidad en paraderos

  (De Cea y Fernández, 1993)

- **Estrategias óptimas (hiper-rutas mínimas)**

  Sin restricción de capacidad en paraderos

  (Spiess, H. y M. Florian, 1989)

  Con restricción de capacidad en paraderos

  (Cominetti, R. y J. Correa, 2001; Cepeda et al., 2006)

Modelos de asignación de Transporte Público (Referencias)

- Cepeda, M., R. Cominetti y M. Florian (2006). A frequency-based assignment model for congested transit networks with strict capacity constraints: characterization and computation of equilibria. **Transportation Research B** 40, 437-459.
- Cominetti, R. y J. Correa (2001) Common-Lines and Passenger Assignment in Congested Transit Networks. **Transportation Science 35**, 250-267.
- De Cea J. y J.E. Fernández (1989) Transit assignment to minimal routes: an efficient new algorithm. **Traffic Engineering and Control** 30, 491-494.
- De Cea J. y J.E. Fernández (1993) Transit assignment for congested public transport systems : and equilibrium model. **Transportation Science** 27 (2), 133-147.
- **Spiess, H. y M. Florian (1989) Optimal strategies: a new assignment model for transit networks. Transportation Research 23B, 83-102.**

Estrategias óptimas:modelo de asignación en redes de TP (Spiess y Florian, 1989)

- Desarrollar modelo y algoritmo de solución para el problema de elección de ruta para usuarios de TP para simular flujos sobre redes de TP.
- Componentes relevantes del tiempo de viaje no están sujetos a efectos de congestión.
- Primeros algoritmos: heurísticas en el sentido de que los principios de comportamiento son establecidos qualitativamente y condicen directamente al procedimiento computacional
- A menudo, tales algoritmos son variantes de procedimientos de asignación para transporte privado (Rutas mínimas, asignación estocástica multiruta, etc.) que son modificados para reflejar el fenómeno de tiempos de espera inherentes a redes de TP
- Versiones restrictivas que llevan a soluciones subóptimas en relación con el modelo que desarrollaremos aquí.

Estrategias en elección de ruta de usuarios de TP

- Caracterizaremos un modelo para la elección de ruta de usuarios de TP que nos conducirá al concepto de “estrategia óptima”
- Denotamos *T* a una red de TP: conjunto de nodos, conjunto de líneas (secuencia de nodos) donde los pasajeros pueden abordar y bajar.
- Red *T* se considera fuertemente conexa
- Tiempo de viaje en segmentos de TP se considera constante.
- Distribución de tiempos entre llegadas de buses y tasas de llegadas de pasajeros a paradas, se asumen conocidas
- Concentremos nuestra atención en viajero que desea viajar desde *A* hasta *B*: suponemos que se comporta de forma de minimizar su tiempo esperado de viaje (considerando caminata, espera y tiempo en vehículo, pesados apropiadamente)

Estrategias en elección de ruta de usuarios de TP

- Problema se puede reformular:¿Cómo uno puede encontrar la ruta de A hasta B que minimiza el tiempo total esperado de viaje?
- Transporte Privado: usuario elige una ruta específica entre conjunto de rutas disponibles, cosa que no ocurre en TP.
- TP: pasajero podría elegir un conjunto de rutas y dependiendo del bus que llegue primero, se determinará la ruta final para alcanzar el destino final (no hay especificación a priori de ruta)
- Problema se torna más complejo. Si se limita a escoger ruta más corta entre rutas disponibles: solución sub-óptima.

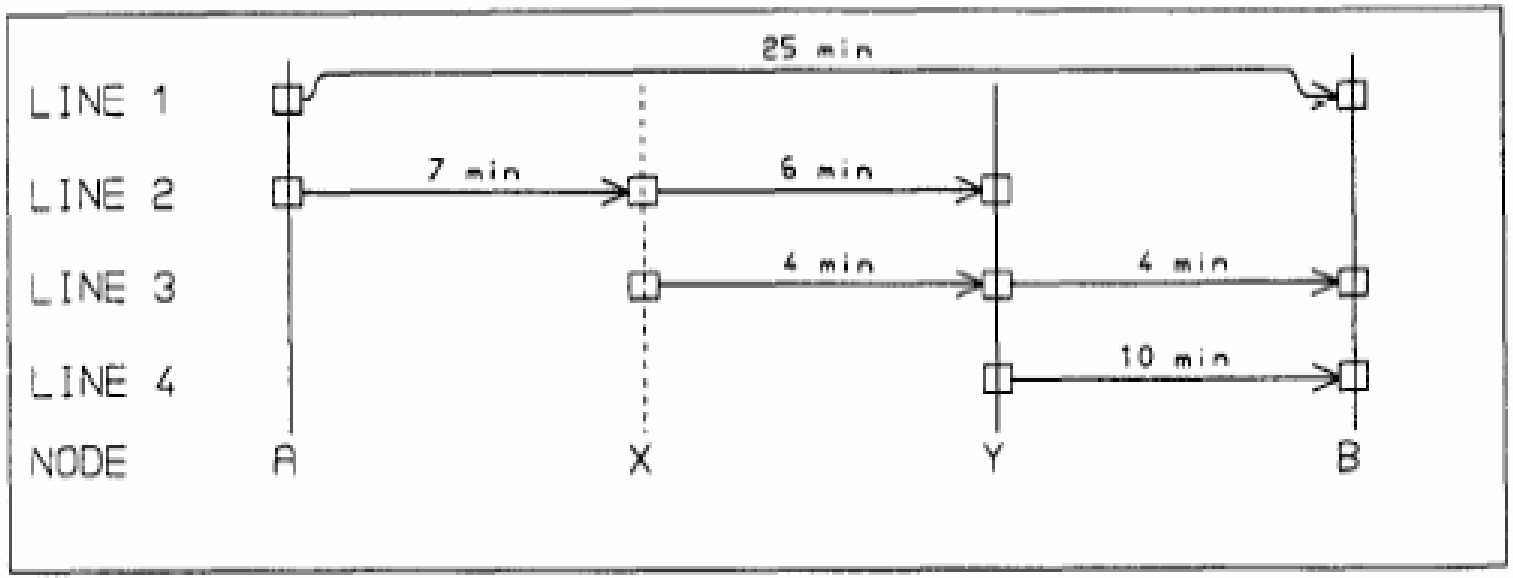
Estrategias en elección de ruta de usuarios de TP

- Llamaremos ***estrategia*** a cualquier elemento del conjunto de elección del viajero.
- Una estrategia es un conjunto de reglas que, cuando son aplicadas, permiten al viajero alcanzar su destino.
- El número y tipo de estrategias diferentes que el pasajero puede escoger dependerá de la información disponible para él (ella) durante su viaje. Si no hay información adicional durante el viaje, una estrategia define simplemente una ruta.

Estrategias en elección de ruta de usuarios de TP

- Para red de ejemplo en la figura, un ejemplo de estrategia podría ser:

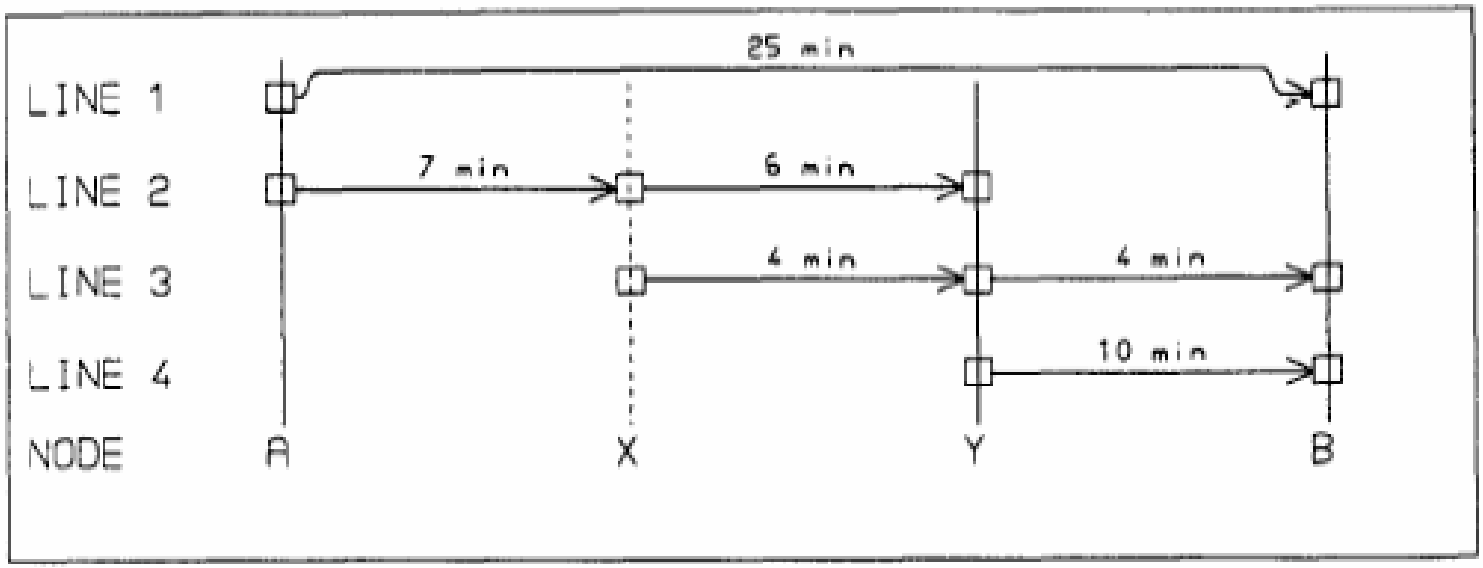
  “Tome línea 2 hasta nodo Y; transfiera a línea 3 y bájese en nodo B.” (est. Tipo 1)



Estrategias en elección de ruta de usuarios de TP

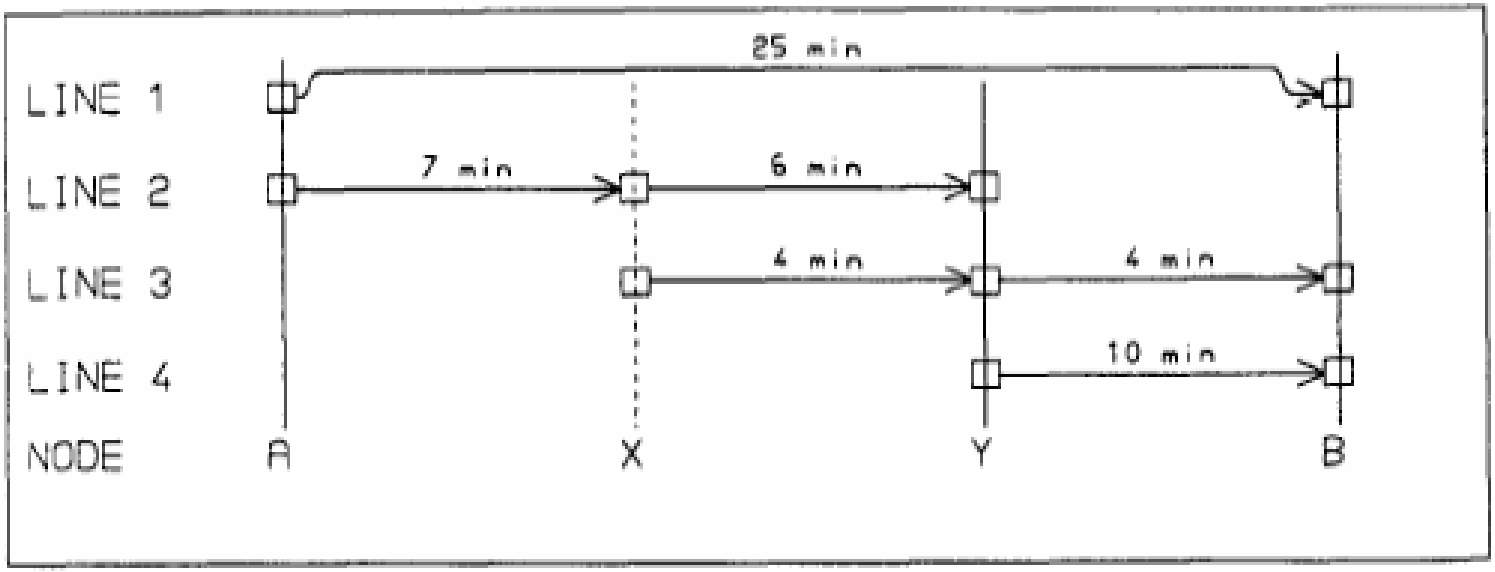
- Si el usuario, mientras espera en un nodo, pudiese saber cual es la línea que pasará a continuación, una estrategia podría contener a subconjuntos de líneas:

  "**Tome el siguiente bus entre líneas 1 y 2; si línea 1 fue escogida, bájese en nodo B; si línea 2 fue escogida, transfiera en nodo Y a cualquier línea entre 3 y 4 y bájese en B." (est. Tipo 2)**



- Mientras más información está disponible para el pasajero (tiempo de llegada de buses mientras espera en un nodo, información de otros vehículos mientras va en un bus viajando, etc.),las estrategias podrían tornarse más complejas:

"**Espera hasta 5 minutos por un bus de la línea 1; de otra forma, toma línea 2; si en nodo X usted observa un bus de la línea 3 (línea expresa), transfiera a línea 3, de otra manera continúe hasta nodo Y y transfiera ahí a líneas 3 o 4." (est. Tipo 3)**



Estrategias en elección de ruta de usuarios de TP

- Supondremos que el pasajero sólo puede acceder a la información que es capaz de averiguar durante su viaje (estrategias del tipo 2).
- Es posible definir una estrategia de este tipo, especificando en cada nodo del trayecto del pasajero (excepto su nodo destino), un conjunto no vacío de líneas atractivas, y para cada una de esas líneas el nodo (aguas arriba) en el cual el viajero se baja.
- Dada una estrategia, un viaje específico se puede materializar de acuerdo al siguiente mecanismo sistemático

1. *Establezca NODO como nodo origen*
2. *Súbase al bus que llegue primero entre los buses del conjunto de líneas atractivas en NODO.*
3. *Bájese en nodo predeterminado*
4. *Si todavía no alcanza el destino final, establezaca NODO como nodo actual y vuelva a paso 2. De otra manera, el viaje está completo.*

Estrategias en elección de ruta de usuarios de TP

- Una estrategia se dice factible si el grafo definido por las líneas atractivas de la estrategia no contienen ciclos.
- Note que una estrategia (de la forma definida antes) tiene un nodo destino bien determinado. Nodo origen no entra en definición de estrategia.
- Por lo tanto, una estrategia es un conjunto de reglas que permite al viajero alcanzar su destino partiendo de cualquier nodo de la red.
- Analicemos el caso de la red de Figura anterior (4 nodos y 4 líneas): red no contiene ciclos, por lo tanto cualquier estrategia (de la forma definida antes) es factible.

Node	Attractive Lines (line → exit node)	Waiting Time (minutes)	Line Probabilities 1	2	3	4
A	1→B	6.0	1.00	-	-	-
A	2→X	6.0	-	1.00	-	-
A	2→Y	6.0	-	1.00	-	-
A	1→B, 2→X	3.0	0.50	0.50	-	-
A	1→B, 2→Y	3.0	0.50	0.50	-	-
X	2→Y	6.0	-	1.00	-	-
X	3→Y	15.0	-	-	1.00	-
X	3→B	15.0	-	-	1.00	-
X	2→Y, 3→Y	4.3	-	0.71	0.29	-
X	2→Y, 3→B	4.3	-	0.71	0.29	-
Y	3→B	15.0	-	-	1.00	-
Y	4→B	3.0	-	-	-	1.00
Y	3→B, 4→B	2.5	-	-	0.17	0.83

Table 1. All possible sets of attractive lines

- Existen 75 estrategias diferentes para alcanzar nodo B desde nodos A, X e Y (enumeración de todos los posibles conjuntos de líneas atractivas en cada nodo excepto B)
- Sin embargo, se aprecian sólo 5 rutas distintas desde A hasta B, cuatro rutas distintas entre X y B, y dos rutas distintas entre Y y B.
- Suponemos que el tiempo de espera es la mitad del intervalo y que las frecuencias se combinan linealmente.
- “Line probability”: razón entre la frecuencia de la línea dividida por las frecuencias combinadas.

- Podemos entonces calcular el tiempo de viaje esperado desde A hasta B para cada estrategia.
- En figura abajo se muestra la estrategia óptima, la que minimiza el tiempo total de viaje esperado (Tesp= 27.75 min., que no corresponde a ninguna ruta definida a priori (v indica los volúmenes por segmento de asignar un viaje desde A hasta B

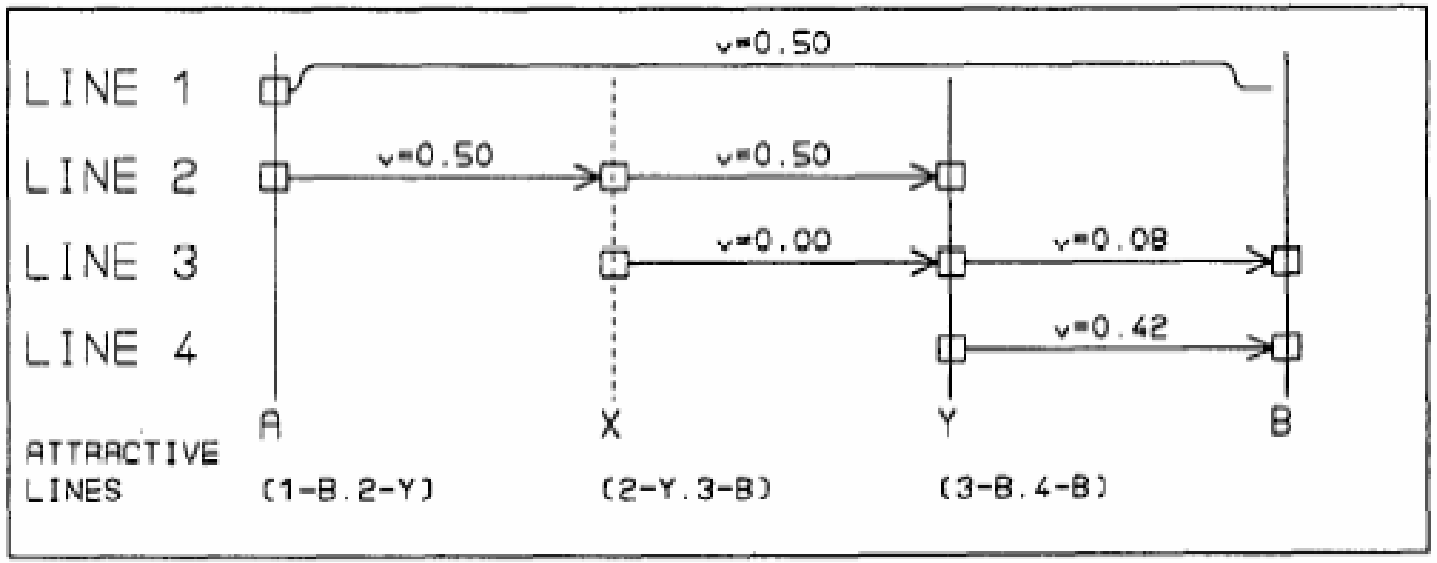


Fig. 2. Optimal strategy. Expected travel time from *A* to *B* is 27.75 min.

Comparación con algoritmos que se basan en encontrar la ruta mínima

- Algoritmos que se basan en encontrar mejor costo mínimo

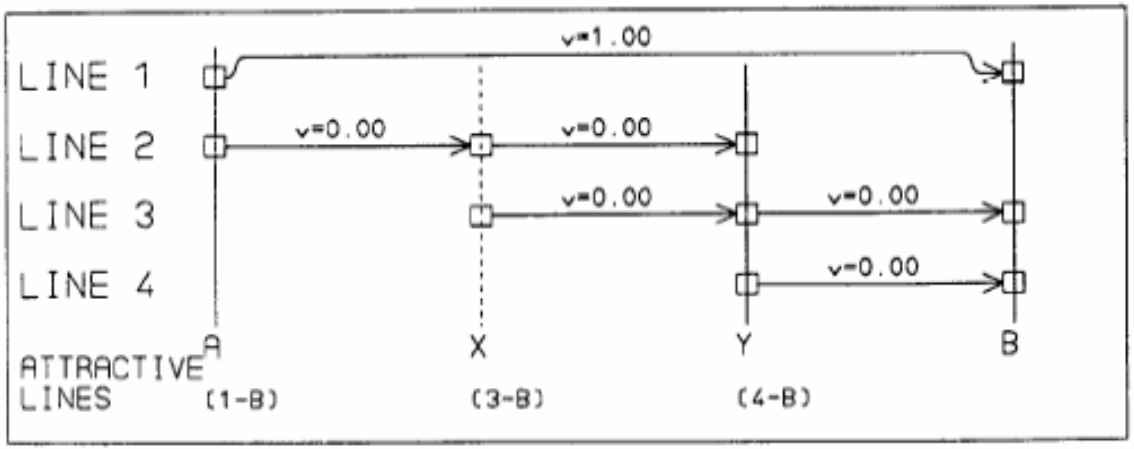


Fig. 3. Best path to node *B*. Expected travel time from *A* to *B* is 31 min.

- Algoritmos que definen secuencia de nodos de trasbordo

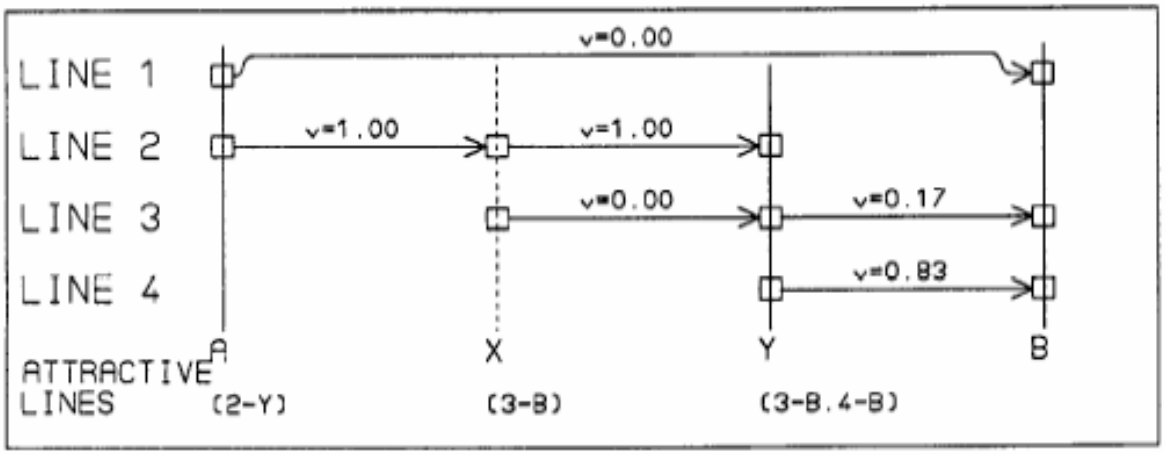


Fig. 4. Best transfer sequence. Expected travel time *A* to *B* is 30.5 min.

Modelo de asignación de TP

- Componentes de viaje en TP
  - Acceso de origen hasta parada de TP
  - Espera por un bus
  - Viaje a bordo de bus
  - Bajada de bus
  - Caminata entre dos paradas de TP
  - Egreso de parada de TP hasta destino final
- Componentes del viaje representadas por arcos $a \in A$ de la red *G =(I,A)* con nodos $i \in I$
- Cada arco caracterizado por par (c_a,G_a): tiempo de viaje en arco; función Distribución para tiempo de espera.

$$G_a(x) = \Pr\{\text{tiempo espera en arco } a \leq x\}$$

Modelo de asignación de TP

- Funciones $G_a(x)$ pueden ser obtenidas de la distribución de tiempos entre llegadas (headways) y de la distribución de tiempos de llegada de pasajeros.
- Para arcos *a* que no involucran tiempos de espera, tendremos

$$G_a(x) = \Delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- Usando formulación general, se puede representar cualquier red de TP, *T*
- Formulación no depende de lineas de TP, ahora depende de arcos de TP: cada arco es servido por buses y cada pasajero espera por un arco a ser servido.

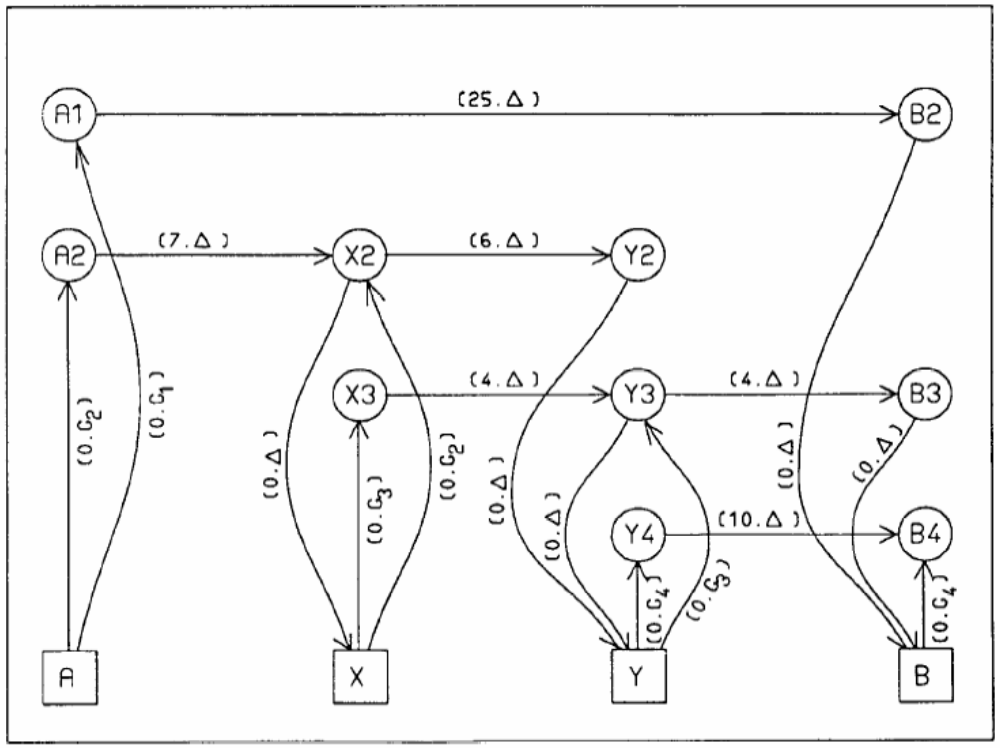


Fig. 5. Link representation of example transit network.

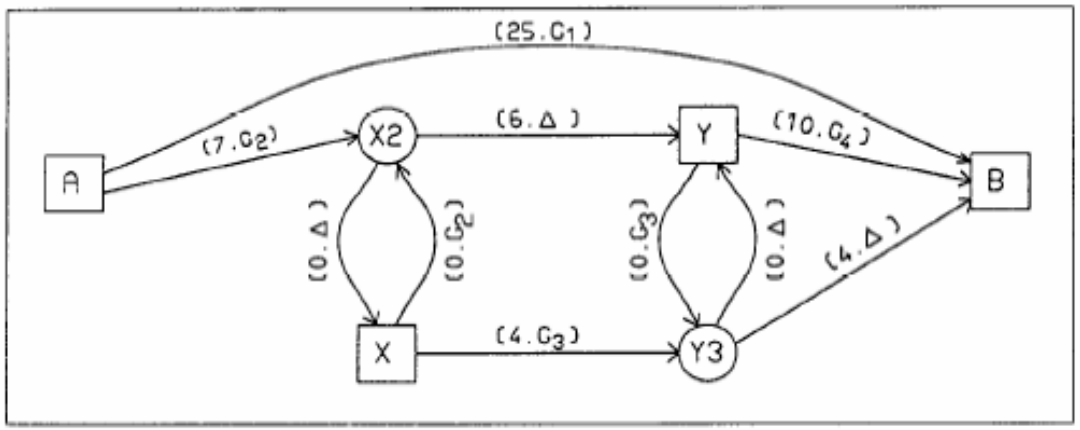


Fig. 6. Simplified link representation of example transit network.

Modelo de asignación de TP

- Para el problema de elección de ruta de TP, una estrategia para alcanzar nodo destino *r* es definida por una red parcial $G(I, \overline{A})$ que contiene aquellos arcos que serán usados como consecuencia de tal estrategia.
- Estrategia: $\overline{A} \subseteq A$
- Entre los arcos incluidos en estrategia $\overline{A}$, en cada nodo $i \in I$ un viajero abordará el primer bus que sirva cualquiera de los arcos $a \in \overline{A}_i^+$
- Para que una estrategia sea factible, debe contener al menos una ruta desde cada nodo hasta el nodo destino *r* y no debe contener ciclos.

Modelo de asignación de TP

$W(\overline{A}_i^+)$: tiempo de viaje esperado para la llegada del primer bus sirviendo cualquiera de los arcos $a \in \overline{A}_i^+$

$P_a(\overline{A}_i^+)$: probabilidad que arco *a* sea servido primero entre arcos $\overline{A}_i^+$.

Por conveniencia $P_a(\overline{A}_i^+) = 0$ para $a \notin \overline{A}_i^+$

- Relación entre estas variables y distribución de tiempos de espera $G_{a.}$
- Asignación de los viajes desde todos los nodos hasta un nodo destino *r*.
- Sea $g_i > 0$ (*i* distinto de *r*): demanda (número de viajes) desde nodo *i* hasta *r,* definamos

$$g_r = -\sum_{i \neq r} g_i$$

Modelo de asignación de TP

- Dada estrategia $\overline{A}$, la demanda se asigna sobre la red generando volúmenes v_a. Luego, volumen en el nodo *i* en *I*, será:

$$V_i = \sum_{a \in A_i^-} v_a + g_i, \quad i \in I \tag{1}$$

luego:

$$v_a = P_a(\overline{A}_i^+) V_i, \quad a \in A_{i^+}, \quad i \in I \tag{2}$$

y dado que $\sum_{a \in A_i^+} P_a(\overline{A}_i^+) = 1$ se obtiene

$$\sum_{a \in A_i^+} v_a - \sum_{a \in A_i^-} v_a = g_i, \quad i \in I \tag{3}$$

Modelo de asignación de TP

- Estrategia óptima $\overline{A}^*$ es aquella que minimiza tiempo total de viaje (a bordo + espera). Consideraremos:

$$W(\overline{A}_i^{+}) = \frac{\alpha}{\sum_{a \in \overline{A}_i^{+}} f_a}, \quad \alpha > 0, \tag{4}$$

$$P_a(\overline{A}_i^{+}) = \frac{f_a}{\sum_{a' \in \overline{A}_i^{+}} f_{a'}}, \quad a \in \overline{A}_{i^+} \tag{5}$$

- Expresaremos la estrategia $\overline{A}$ como función de las variables 0-1, x_a como sigue:

$$x_a = \begin{cases} 0, \text{if } a \notin \overline{A} \\ 1, \text{if } a \in \overline{A} \end{cases}, \ a \in A \tag{6}$$

Modelo de asignación de TP

- Podemos entonces establecer el problema de encontrar la estrategia óptima $\overline{A}^*$ como:

P1

$$Min \sum_{a \in A} c_a v_a + \sum_{i \in I} \frac{V_i}{\sum_{a \in A_i^+} f_a x_a} \quad (7)$$

s.a

$$v_a = \frac{x_a f_a}{\sum_{a' \in A_i^+} x_{a'} f_{a'}} V_i, \quad a \in A_{i^+}, i \in I \quad (8)$$

$$V_i = \sum_{a \in A_i^-} v_a + g_i, i \in I, \quad (9)$$

$$V_i \geq 0, i \in I, \quad (10)$$

$$x_a = 0 \text{ or } 1, \ a \in A \quad (11)$$

Modelo de asignación de TP

- Problema P1 (no lineal en FO y restricciones, combinando además variables enteras con continuas), puede ser reducido a un problema lineal más simple observando que restricciones (10) pueden ser reemplazadas por restricción (12) debido a (9):

$$v_a \geq 0, \quad a \in A \tag{12}$$

Además, sumando restricciones (8) para $a \in \overline{A}_i^+$, obtenemos:

$$\sum_{a \in A_i^+} v_a = V_i, \quad i \in I, \tag{13}$$

Modelo de asignación de TP

Introduciendo variables w_i que denotan el tiempo de espera total para todos los viajes en nodo *i*:

$$\omega_i = \frac{v_i}{\sum_{a \in A_i^+} f_a x_a}, \ i \in I, \tag{14}$$

Problema queda independiente de vars V_i, y se puede demostrar que P1 es equivalente a P2

P2

$$Min \sum_{a \in A} c_a v_a + \sum_{i \in I} \omega_i \tag{15}$$

s.a. (3), (11), (12), y

$$v_a = x_a f_a \omega_i, \quad a \in A_i^+, i \in I \tag{16}$$

Modelo de asignación de TP

Función objetivo lineal y no aparecen V_i

Variables 0-1 sólo aparecen en las restricciones (16). Si relajamos:

$$v_a \leq f_a \omega_i, \quad a \in A_i^+, i \in I \qquad (17)$$

Obtenemos el siguiente problema P3 que se puede demostrar es equivalente a P2

P3

$$Min \sum_{a \in A} c_a v_a + \sum_{i \in I} \omega_i \qquad (18)$$

s.a. (3), (17) y (12)

Modelo de asignación de TP

- Podemos también examinar el problema dual

P4
$$Max \sum_{i \in I} g_i u_i \tag{19}$$

s.a.
$$u_i + c_a + \mu_a \geq u_i, a = (i, j) \in A, \tag{20}$$

$$\sum_{a \in Ai^+} f_a \mu_a = 1, i \in I, \tag{21}$$

$$\mu_a \geq 0, \quad a \in A \tag{22}$$

Sean (v^*, w^*) y (u^*, μ^*) las soluciones óptimas de P3 y P4 respectivamente
Condiciones HC:

$$(v_a^* - f_a \omega_i^*) \mu_a^* = 0, \quad a \in A_{i^+}, i \in I, \tag{23}$$

$$(u_i^* + c_a + \mu_a^* - u_i^*) v_a^* = 0, \quad a = (i, j) \in A \tag{24}$$

Modelo de asignación de TP

- Hasta ahora hemos considerado el caso de redes donde todos los arcos consideran tiempo de espera.
- Caso en que un subconjunto de arcos $\underline{A} \subseteq A$ no considere espera puede ser modelado estableciendo $f_a = M$, con M suficientemente grande (luego 1/M puede ser ignorado).
- También puede modificarse P2, P3 y P4 para que consideren este tipo de arcos (cambia restr. (21) y condiciones HC adecuadamente)
- Asignación RM (caso en que no se consideren arcos en la red con espera, o sea $\underline{A} = A$

Algoritmo de solución

Algoritmo se separa en dos partes.

- En el primer paso se computan la estrategia óptima $\bar{A}^*$ y los tiempos totales de viaje esperados u_i^* desde cada nodo *i* en *I* al destino *r.*
- En el segundo paso, desde cada origen al destino se asigna la demanda sobre la red de acuerdo con la estrategia óptima.

Algoritmo de solución

Part 1: Find optimal strategy

1.1 (Initialization) $u_i := \infty, i \in I - \{r\}$; $u_r := 0$;
$f_i := 0, i \in I$;
$S := A$; $\overline{A} := \emptyset$.

1.2 (Get next link) If $S = \emptyset$ then STOP,
otherwise find $a = (i, j) \in S$ which satisfies
$u_j + c_a \leq u_{j'} + c_{a'}, a' = (i', j') \in S$;
$S := S - \{a\}$.

1.3 (Update node label) If $u_i \geq u_j + c_a$ then

$$u_i := \frac{f_i u_i + f_a (u_j + c_a)}{f_i + f_a},$$

$f_i := f_i + f_a$, $\overline{A} := \overline{A} + \{a\}$;
go to step 1.2.

Part 2: Assign demand according to optimal strategy

2.1 (Initialization) $V_i := g_i, i \in I$;

2.2 (Loading) Do for every link $a \in A$, in decreasing order of $(u_j + c_a)$:

if $a \in \overline{A}$ then $v_a := \frac{f_a}{f_i} V_i$,
$V_j := V_j + v_a$,
otherwise $v_a := 0$.

Algoritmo de solución

- Paso 1.1: Inicialización.
- Paso 1.2: Arco más cercano al destino se selecciona entre aquellos arcos que todavía no han sido examinados. Si se decide incluir a en la estrategia óptima, u_i y f_i son actualizados según Paso 1.3 (Convención $0 \cdot \infty = \alpha$)
- Parte 1 del algoritmo termina cuando todos los arcos han sido examinados
- Segunda parte: demanda desde nodo *i* al destino (g_i) se asigna de acuerdo con estrategia A . Dado que los arcos son procesados en orden topológico reverso, los volúmenes en nodos pueden ser actualizados en paralelo (cada arco se examina sólo 1 vez)
- Solución $(\hat{u}, \hat{v})$ obtenida por este algoritmo es solución óptima de P4, lo cual se demuestra probando primero que $\hat{u}$ es solución factible de P4 y que $(\hat{u}, \hat{v})$ satisfacen condiciones HC de P3 y P4. Optimalidad resulta del teorema de HC de LP.

Extensión no lineal del modelo

- Concentremos nuestra atención en el caso de asignación de TP donde tiempos de viaje en arcos c_a son ahora funciones continuas $c_a(v)$ del vector de flujos en arco.
- Veamos el caso $c_a(v)=c_a(v_a)$ donde existe un POE convexo.
- Sea v_a^r volumen en arco a asociado a destino r. Entonces, dado

$$v_a = \sum_{r \in R} v_a^r, \quad a \in A \tag{25}$$

no es posible separar el problema por destino

Extensión no lineal del modelo

- Denotemos g_i^r demanda desde nodo *i* a destino *r,* y sea K_r el conjunto de todas las estrategias factibles para alcanzar *r*. h_i^k será la porción de g_i^r que es asignada a la red usando estrategia $k \in K_r$. Luego

$$\sum_{k \in K_r} h_i^k = g_i^r, \quad i \in I, k \in K_r, r \in R \qquad (26)$$

- Asumimos, igual que antes, que los viajeros escogen la estrategia que minimiza su tiempo esperado de viaje. Sin embargo, en modelo no lineal, los tiempos de viaje dependen del vector de flujos en arcos *v* y por lo tanto de las estrategias escogidas por los otros viajeros
- Condiciones de equilibrio: segundo principio de Wardrop

Extensión no lineal del modelo

- Sea s_i^k el tiempo de viaje esperado de *i* a *r* usando estrategia *k*; y sea u_i^r el mínimo tiempo de viaje esperado para ir de *i* a *r.* Luego, las condiciones de equilibrio son:

$$\left.\begin{array}{ll} s_i^{k^*} = u_i^{r^*}, & si\ h_i^{k^*} > 0 \\ s_i^{k^*} \geq u_i^{r^*}, & si\ h_i^{k^*} = 0 \end{array}\right\}, \quad i \in I, k \in K_r, r \in R \qquad (27)$$

- Lamentablemente, *c(v)* no necesariamente son estrictamente monótonas, por lo que pueden existir múltiples equilibrios.
- Si $c_a(v_a)$ son funciones continuas y crecientes, entonces existe el siguiente POE convexo P5 que soluciona el problema de asignación

Extensión no lineal del modelo

P5

$$Min \sum_{a \in A} \int_0^{v_a} c_a(x)dx + \sum_{i \in I} \sum_{r \in R} w_i^r \qquad (28)$$

s.a.

$$v_a^r \leq f_a w_i^r, \quad a \in A_i^+, i \in I, r \in R, \qquad (29)$$

$$\sum_{a \in A_i^+} v_a^r = \sum_{a \in A_r^-} v_a^r + g_i^r, \quad i \in I, r \in R, \qquad (30)$$

$$v_a^r \geq 0, a \in A, r \in R. \qquad (31)$$

Algoritmo de solución

Basado en método de combinaciones convexas (no requiere guardar explícitamente volúmenes a destino v_a^r). Aproximación lineal de FO genera subproblema separable por destino

0. (Initialization) Find a feasible solution $(\boldsymbol{\nu}^0, \omega^0)$, where $\boldsymbol{\nu}^0$ denotes a feasible vector of total flows ν_a and the scalar ω^0 denotes the corresponding total waiting time $\Sigma_{i \in I} \Sigma_{r \in R} \omega_i^r$.
   Set $k := 0$.
1. (Subproblem) Set $k := k + 1$.
   Compute $(\hat{\nu}, \hat{\omega})$ by applying the algorithm of Section 4 with link times $c_a = c_a(\nu_a^{k-1})$ for each destination $r \in R$.
2. (Line Search) Find λ^k that minimizes the objective function of P5 on the line segment
   $(1 - \lambda)(\nu^{k-1}, \omega^{k-1}) + \lambda(\hat{\nu}, \hat{\omega}), 0 \leq \lambda \leq 1$.
3. (Update) Set $(\nu^k, w^k) := (1 - \lambda^k)(\nu^{k-1}, w^{k-1}) + \lambda^k(\hat{\nu}, \hat{\omega})$.
   If $\| (\nu^k, w^k) - (\nu^{k-1}, w^{k-1}) \| < \in$ then STOP.
   otherwise go to step 1.