CI63G Planificación de Sistemas de Transporte Público Urbano

Clase 9

Semestre Otoño 2008

Modelos de asignación de Transporte Público

- Para una oferta y demanda dadas de transporte público, se decide como se asignan los pasajeros a los vehículos en las paradas (equilibrio)
- Básicamente, se distingue dos enfoques:
  - Rutas mínimas
  - Estrategias óptimas (hiper-rutas mínimas)
- Complejidad del problema:
  - Sin restricción de capacidad en paraderos
  - Con restricción de capacidad en paraderos

Modelos de asignación de Transporte Público

- **Rutas mínimas**

  Sin restricción de capacidad en paraderos

  (De Cea y Fernández, 1989)

  Con restricción de capacidad en paraderos

  (De Cea y Fernández, 1993)

- **Estrategias óptimas (hiper-rutas mínimas)**

  Sin restricción de capacidad en paraderos

  (Spiess, H. y M. Florian, 1989)

  Con restricción de capacidad en paraderos

  (Cominetti, R. y J. Correa, 2001; Cepeda et al., 2006)

Modelos de asignación de Transporte Público (Referencias)

- Cepeda, M., R. Cominetti y M. Florian (2006). A frequency-based assignment model for congested transit networks with strict capacity constraints: characterization and computation of equilibria. **Transportation Research B** 40, 437-459.
- Cominetti, R. y J. Correa (2001) Common-Lines and Passenger Assignment in Congested Transit Networks. **Transportation Science 35**, 250-267.
- De Cea J. y J.E. Fernández (1989) Transit assignment to minimal routes: an efficient new algorithm. **Traffic Engineering and Control** 30, 491-494.
- **De Cea J. y J.E. Fernández (1993) Transit assignment for congested public transport systems : and equilibrium model. Transportation Science 27 (2), 133-147.**
- Spiess, H. y M. Florian (1989) Optimal strategies: a new assignment model for transit networks. **Transportation Research 23B**, 83-102.

Enfoque De Cea y Fernández (1993)

- Modelo de rutas mínimas con congestión:
  - Definición del problema similar en muchos aspectos al caso sin congestión (De Cea y Fernández, 1989)
  - Principales supuestos del modelo
  - El problema de líneas comunes
  - Definición de la red
  - Formulación matemática del problema
  - Algoritmo de solución

Principales supuestos del modelo

- El tiempo de espera es una función creciente que depende de la capacidad de la (o las) líneas esperadas y del flujo de pasajeros que las usan
- Tiempo de viaje en vehículo fijo (exógeno determinado por nivel de congestión de la red vial)
- Congestión: asociada a la capacidad limitada de los vehículos de TP. Por lo tanto, si los flujos de pasajeros aumentan, tiempos de viaje totales aumentan (vía tiempos de espera)

Principales supuestos del modelo

- Supondremos que los fenómenos de congestión en redes de transporte público se concentran en las paradas de TP
- Los pasajeros esperando en la misma parada de TP se pueden clasificar en distintos grupos, dependiendo de su siguiente nodo de trasbordo (dado que cada uno tendrá un conjunto distinto de líneas atractivas)
- Por lo tanto, los servicios que cada grupo espera serán distintos, con distintas capacidades, utilizaciones y tiempos de espera

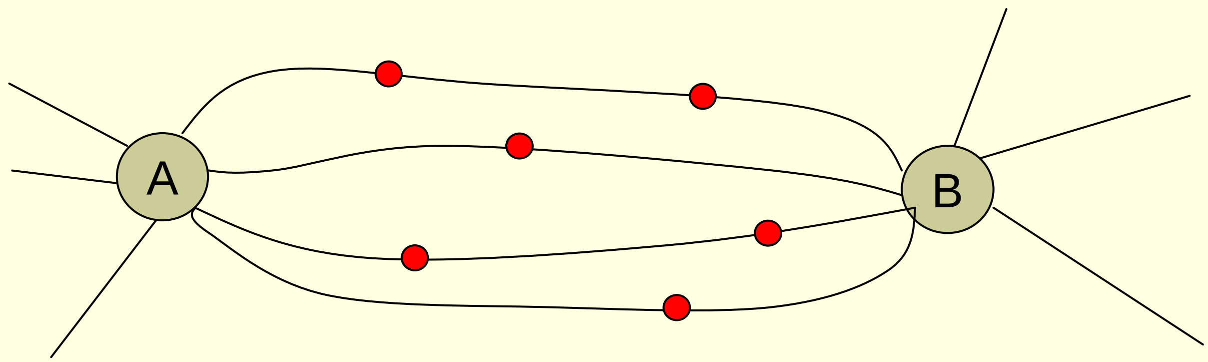
Principales supuestos del modelo

- En general, de las rutas disponibles para viajar en un par O/D dado, los viajeros eligen aquella que minimice su costo generalizado de viaje (primer principio de Wardrop): equivalente a modelos de equilibrio para tpte. privado
- Al aumentar los flujos de pasajeros, algunas rutas se congestionarán ⇒ otras rutas se harán convenientes

Aumento en congestión ⇒ *aumento del número de rutas usadas*

El problema de las líneas comunes

- Cuando no se supone congestión (no hay restricción de capacidad en los vehículos) el conjunto de líneas comunes (atractivas) entre dos nodos está predefinido



- Dados los tiempos de viaje y las frecuencias de las líneas que pasan por nodos A y B, se puede determinar el subconjunto (que considerado como una sola línea) permite minimizar el tiempo (o costo generalizado) total esperado de viaje

El problema de las líneas comunes

- Así, cuando no se considera congestión, el problema conjunto de asignación y selección de líneas comunes puede separarse.
  - Primero se define una red $G(N, S)$
  - Luego se asigna matriz de viajes sobre esa red (se obtiene flujos en secciones de ruta)
  - Luego, se reparten los flujos anteriores entre las líneas (secciones de línea) y se cargan los segmentos
- ¿Qué sucede cuando consideramos restricción de capacidad?

El problema de las líneas comunes

- Si se considera restricción de capacidad: cambia concepto de líneas comunes

- Cuando no se considera congestión (por restricción de capacidad en vehículos), el conjunto de líneas atractivas es aquel que entre dos nodos A y B permite al viajero minimizar su tiempo esperado de viaje (directo entre A y B) si aborda en A el primer bus pertenenciente a cualquiera de tales líneas

- Nada se dice respecto de disponibilidad de espacio

El problema de las líneas comunes

- Así, al considerar restricción de capacidad, el método de determinación de conjunto de líneas comunes (problema de programación hiperbólica) ya no puede usarse.
- Ya no basta con considerar tiempos de viaje y frecuencias (frecuencias nominales) donde se asume que siempre se podrá tomar un determinado bus.
- En lugar de frecuencia nominal, interesa conocer la frecuencia efectiva (espacios disponibles por unidad de tiempo), la cual depende del flujo de pasajeros.

El problema de las líneas comunes

- Asignación y selección de líneas atractivas ya no son problemas separables
- ¿Cómo abordar el problema?
- Se considera la siguiente simplificación: Suponga un par de nodos A y B, tal que desde A hasta B circula un conjunto de servicios de TP, A_s caracterizados por un tiempo de viaje en vehículo t_ℓ, y una frecuencia nominal f_ℓ, para toda línea $\ell \in A_s$

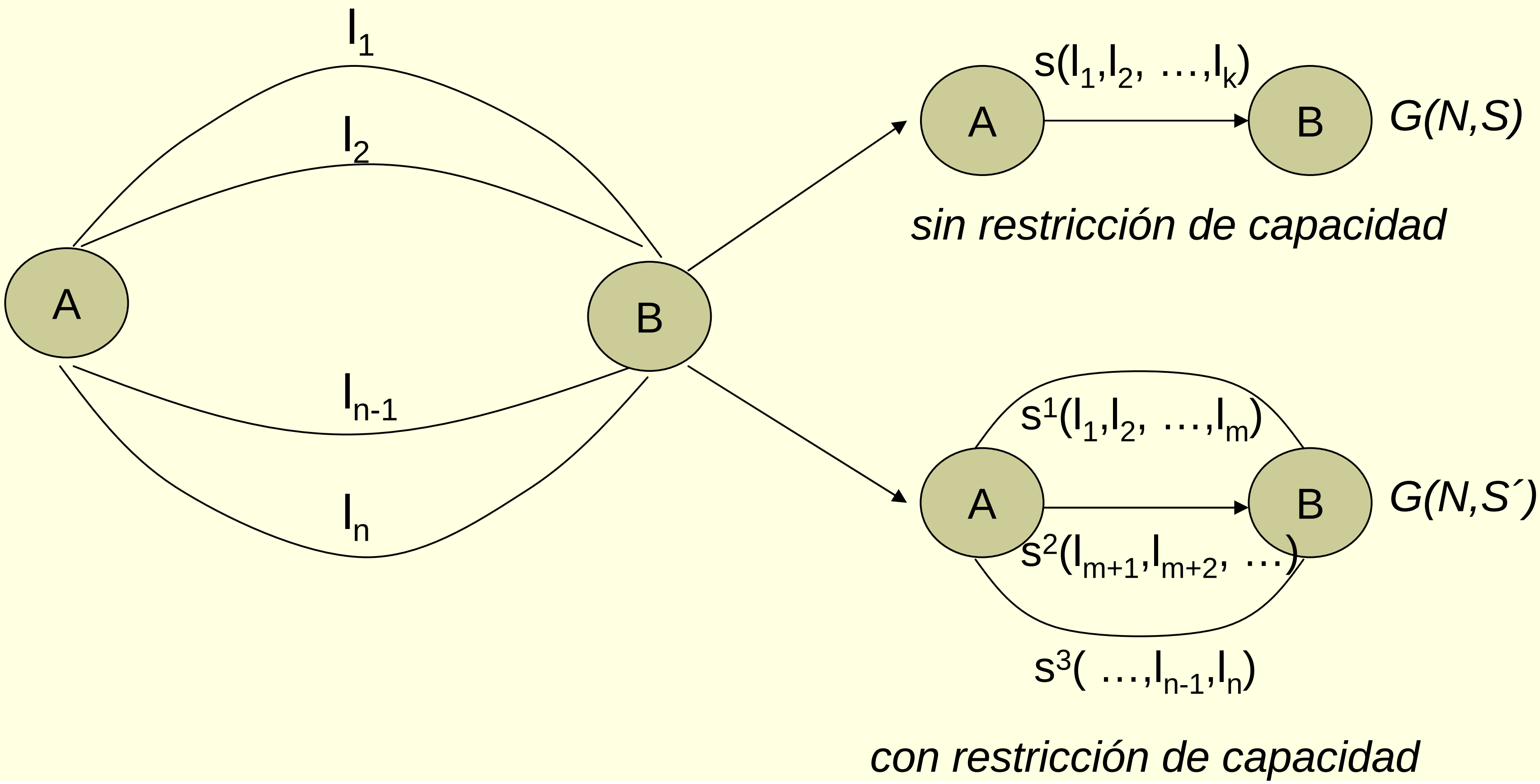
- Se crea más de un arco s para unir A con B (a diferencia del caso sin restricción de capacidad) donde basta un sólo arco

El problema de las líneas comunes

- El primer arco virtual contiene a las líneas atractivas para el caso en que no se considera restricción de capacidad (líneas $\ell \in A_s$)
- Con las líneas restantes (líneas de $\bar{A}_s - A_s$) se vuelve a resolver el problema hiperbólico, obteniendo así un nuevo conjunto de líneas comunes que dan origen a un segundo arco virtual.
- Se continúa haciendo lo mismo, hasta que se terminan las líneas de A_s

El problema de las líneas comunes

Estos arcos virtuales, que como en el caso en que no hay restricción de capacidad, representan conjuntos de líneas se denominan ***“arcos de TP”***

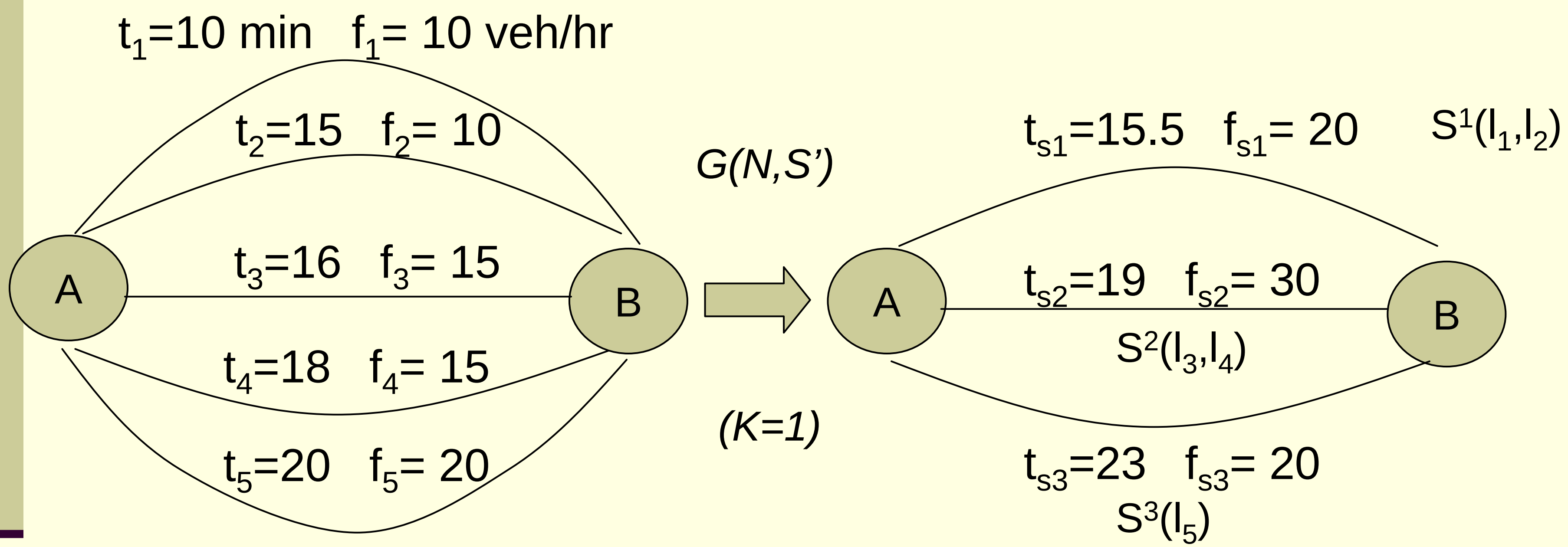


El problema de las líneas comunes

- Nótese que si se codifica una red G(N,S’) y sobre ella no hay congestión, sólo arco s’ será usado entre A y B.
- A medida que aumenta el flujo (se congestiona s^1) el arco s^2 puede hacerse conveniente $\longrightarrow$ luego el arco s^3, etc.

Ejemplo: Supongamos la red simple siguiente (para cada línea se indica el tiempo de viaje en vehículo y su frecuencia nominal)

El problema de las líneas comunes



Si cuando hay congestión el costo se considera igual a un término constante (tiempo de viaje más parte fija de tiempo de espera) más un término dependiente del flujo (tiempo de espera variable):

El problema de las líneas comunes

- A flujo libre muy bajo s^1 tendrá un tiempo igual a 15.5 + Δ (que varía con el flujo).

  Mientras $\Delta \leq 3.5 \Rightarrow$ sólo s^1 será usado (igual al caso sin restr. de capacidad)
- Al aumentar el flujo y al aumentar Δ, s^2 se hará atractiva: flujo se repartirá por equilibrio entre s^1 y s^2.
- Al seguir aumentando, llegará un flujo para el que los tres arcos serán usados.

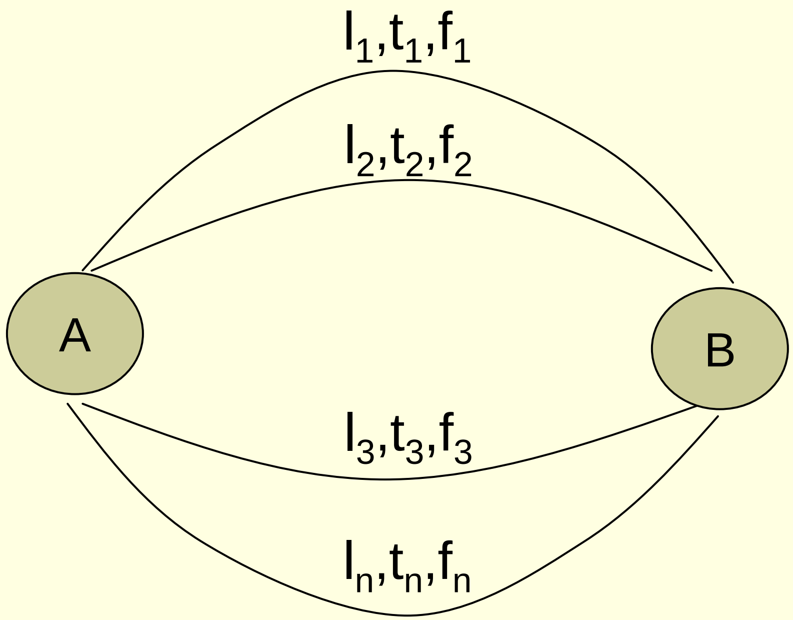
Ventajas y limitaciones del enfoque

- Permite separar problema de asignación del de selección de líineas comunes. Luego, la red G(N,S’) se puede construir primero y luego sobre ella de hace asignación de equilibrio
- Pero:
  - Es una simplificación que hace tratable el problema
  - Crece fuertemente el número de arcos de S’

Ventajas y limitaciones del enfoque

- En adelante, a red G(N,S’) la denominaremos simplemente G(N,S), y a los arcos de S los nombraremos arcos de TP.
- Esta nueva red tiene arcos paralelos entre nodos (tratamiento adecuado)

Sustento teórico del método propuesto para definir arcos de TP (Red G(N,S))



t_i = tiempo de viaje en veh. para línea *i*

f_i = frecuencia nominal línea *i*

$$t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \ldots \leq t_n$$

$$L = \left\{ l_1, l_2, \ldots, l_n \right\}$$

- Se puede demostrar que si las primeras q líneas son atractivas en situación sin congestión, el conjunto de líneas atractivas en situación con congestión incluirá a esas q líneas.
- A medida que aumenta la congestión, las líneas q+1, q+2…comenzarán a hacerse atractivas y se comenzarán a usar para ir de A hasta B

Representación de la red

- G(N,S): equivalencia directa entre arco y sección de ruta.
- Funciones de costo: enfoque similar a aquel usado para predecir condiciones de equilibrio en redes de Transporte privado con congestión.
- **Funciones convexas de flujo-demora son usadas (enfoque simple aunque algunos arcos pueden sobrecargarse cuando las demandas son altas)**

Funciones de costo

- En general, el tiempo de espera experimentado por un pasajero que se sube en sección de ruta s (con origen i(s)) dependerá de:
  - V^s: número de pasajeros totales que se suben a la misma sección de ruta, en nodo i(s)
  - V_{is}^+: número de pasajeros totales que se suben, en nodo i(s), a toda sección de ruta que usa las líneas que contienen sección de ruta s.
  - $\overline{V}_{is}$: número de pasajeros que se suben a todas las líneas que pertenecen a sección de ruta s en un nodo anterior a i(s) y se bajan después de i(s)

Funciones de costo

$$\tilde{V}_s = \sum_{l \in s} \sum_{r \in S_{is}^{+}} v_l^r + \sum_{r \in \bar{S}_{is}} v_l^r$$

$$V_{is}^{+} \qquad \bar{V}_{is}$$

- S_{is}^{+}: conjunto de secciones de ruta saliendo de i(s) excepto sección s.
- $\bar{S}_{is}$: conjunto de secciones de ruta con nodo inicial anterior a i(s)y nodo final posterior a i(s)
- v_l^r: pasajeros que viajan en línea *l* sobre sección de ruta s (flujo en sección de línea)

Funciones de costo

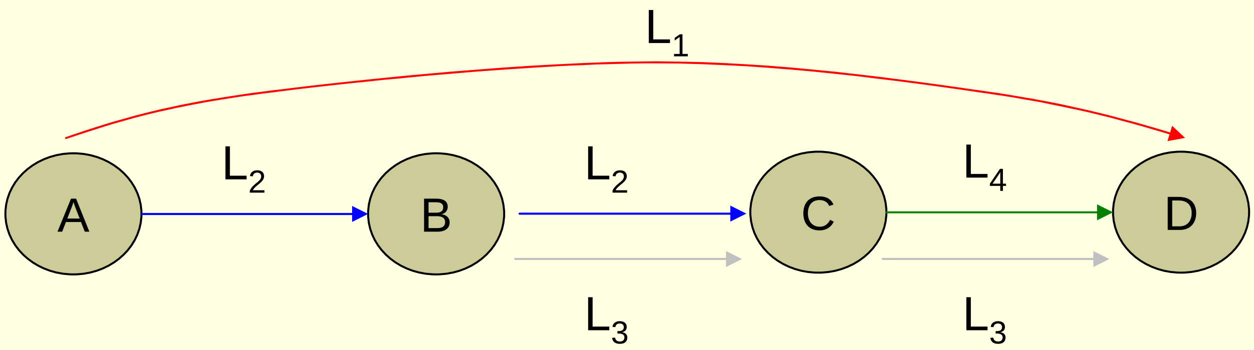
$$c_S = \overline{c_S} + \frac{\alpha}{f_S} + \beta \cdot \phi_S \left(\frac{V_S + \tilde{V}_S}{K_S} \right) \qquad \text{(c1)}$$

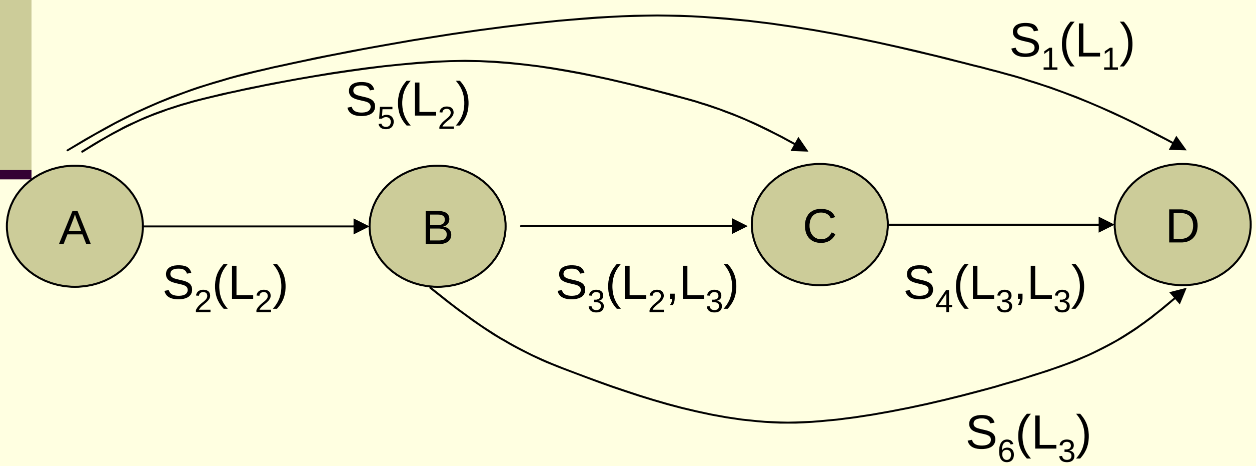
donde

$$\phi_S = \left(\frac{V_S + \tilde{V}_S}{K_S} \right)^n$$

Jacobiano J(c) asimétrico

Ejemplo:





$$c_1 = f(V_1)$$

$$c_2 = f(V_2, V_5)$$

$$c_3 = f(V_3, V_5, V_6)$$

$$c_4 = f(V_4, V_6)$$

$$c_5 = f(V_5, V_2)$$

$$c_6 = f(V_6, V_3)$$

Formulación matemática del problema

- Congestión y frecuencias efectivas
  - Definimos frecuencia efectiva de la línea *l* en paradero i(s):

$$f_l^{\prime s} = \frac{\alpha_l}{w_l^i} \qquad \text{(d1)}$$

donde $w_l^i =$ índice de tiempo de espera promedio

$$w_l^i \equiv \frac{\alpha_l}{f_l} + \rho_l \left(\frac{\tilde{v}_{il}}{k_l} \right) \qquad \text{(d2)}$$

con $\tilde{v}_{il}$ pasajeros que abordan la línea *l* antes del paradero i(s) y se bajan después

Formulación matemática del problema

Importante (d2) es una definición que no significa que corresponda al tiempo de espera promedio de la línea *l* (los viajeros esperan conjuntos de líneas

¿Relación entre f_l y f_l's ? $f_l^{\prime s} \leq f_l$

- Frecuencia nominal de una línea es la misma en todo paradero
- Frecuencia efectiva de unalínea no existe. Se define para un paradero dado
- En terminal de inicio del recorrido, frecuencia nominal y efectiva son iguales

Condiciones de equilibrio

- Las condiciones de equilibrio de Wardrop (primer principio) son:

$$C_r = \begin{cases} = u_w, & \forall r \in R_w \,/\, h_r \geq 0 \\ \geq u_w, & \forall r \in R_w \,/\, h_r = 0 \end{cases} \qquad \forall w \in W \qquad \text{(d3)}$$

Condiciones de equilibrio

- Expresadas como desigualdad variacional

$$C(H^*)\cdot(H^* - H) \leq 0, \quad \forall H \in \Omega$$ (d4)

Donde Ω es el conjunto definido por:

$$\sum_{r\in R_w} h_r = T_w \quad \forall w \in W$$ (d5)

$$\sum_{r\in R} \delta_{sr} h_r = V_s \quad \forall s \in S'$$ (d6)

$$v_l^s = f_l^{\prime s}(v)\cdot\frac{1}{f_s'}\cdot V_s \quad \forall l \in B_s, \forall s \in S'$$ (d7)

$$h_r \geq 0 \qquad \forall r \in R$$ (d8)

Condiciones de equilibrio

(d4) puede escribirse:

$$C(V^*)\cdot(V^* - V) \leq 0, \quad \forall V \in \Omega \qquad \text{(d9)}$$

El principal problema de la formulación anterior radica en la existencia de restricciones (d7)

$$v_l^s = f_l^{\prime s}(v)\cdot\frac{1}{f^{\prime s}(v)}\cdot V_s$$

¿por qué?: son no lineales

Condiciones de equilibrio

Simplificación: Repartir el flujo de un arco de TP, entre sus líneas, proporcionalmente a las frecuencias nominales. Esto es, reemplazar (d7) por:

$$v_l^s = f_l^s \cdot \frac{1}{f_s} \cdot V_s \quad \forall l \in B_s, \forall s \in S´ \qquad \text{(d10)}$$

La formulación simplificada queda

$$C(V^*) \cdot (V^* - V) \leq 0, \quad \forall V \in \Omega´ \qquad \text{(d11)}$$

donde $\Omega´$ es igual a Ω salvo que la restricción (d7) es reemplazada por la (d10)

PROBLEMA: NO PUEDO ASEGURAR QUE LAS LÍNEAS NO SE SOBRECARGUEN

Algoritmo de solución: DIAGONALIZACIÓN

Paso 0: Encontrar solución inicial factible $(\overline{V}, \overline{v})$

Paso 1: Diagonalizar $c(V)$ en $(\overline{V}, \overline{v})$ $\Rightarrow \hat{c} = \left\{ \hat{c}_1(V_1), \hat{c}_2(v_2), \ldots \right\}$

Paso 2: Resolver

$$C(V^*) \cdot (V^* - V) \leq 0, \quad \forall V \in \Omega' \qquad \Rightarrow (\hat{V}, \hat{v})$$

Paso 3: Test de parada

- si $(\overline{V}, \overline{v})$ y $(\hat{V}, \hat{v})$ son suficientemente cercanos PARAR
- si no ir al paso 4

Paso 4: hacer $(\hat{V}, \hat{v}) \longrightarrow (\overline{V}, \overline{v})$

Ir al paso 2