

CI63G Planificación de Sistemas de Transporte Público Urbano

Clase 12
Semestre Otoño 2008

Modelos de asignación de Transporte Público

- Para una oferta y demanda dadas de transporte público, se decide como se asignan los pasajeros a los vehículos en las paradas (equilibrio)
- Básicamente, se distingue dos enfoques:
 - Rutas mínimas
 - Estrategias óptimas (hiper-rutas mínimas)
- Complejidad del problema:
 - Sin restricción de capacidad en paraderos
 - Con restricción de capacidad en paraderos

Modelos de asignación de Transporte Público

- **Rutas mínimas**

Sin restricción de capacidad en paraderos

(De Cea y Fernández, 1989)

Con restricción de capacidad en paraderos

(De Cea y Fernández, 1993)

- **Estrategias óptimas (hiper-rutas mínimas)**

Sin restricción de capacidad en paraderos

(Spiess, H. y M. Florian, 1989)

Con restricción de capacidad en paraderos

(Cominetti, R. y J. Correa, 2001; Cepeda et al., 2006)

Modelos de asignación de Transporte Público (Referencias)

- **Cepeda, M., R. Cominetti y M. Florian (2006). A frequency-based assignment model for congested transit networks with strict capacity constraints: characterization and computation of equilibria. *Transportation Research B* 40, 437-459.**
- **Cominetti, R. y J. Correa (2001) Common-Lines and Passenger Assignment in Congested Transit Networks. *Transportation Science* 35, 250-267.**
- **De Cea J. y J.E. Fernández (1989) Transit assignment to minimal routes: an efficient new algorithm. *Traffic Engineering and Control* 30, 491-494.**
- **De Cea J. y J.E. Fernández (1993) Transit assignment for congested public transport systems : and equilibrium model. *Transportation Science* 27 (2), 133-147.**
- **Spiess, H. y M. Florian (1989) Optimal strategies: a new assignment model for transit networks. *Transportation Research* 23B, 83-102.**

Enfoque Cominetti y Correa (2001), Cepeda, Cominetti y Florian (2006)

- Modelo de Hiper-rutas con congestión:
 - Objetivo, es estudiar un modelo de equilibrio en redes de TP con congestión.
 - Tiempos de viaje no son necesariamente monótonos
 - Congestión afecta a los tiempos de espera, así como a la distribución de los flujos.
 - Pasajeros se asume que viajan de acuerdo a hiper-rutas mínimas (estrategias óptimas).
 - Modelo Cominetti y Correa (2001) explota la idea de líneas comunes bajo un enfoque de programación dinámica
 - Funciones de congestión se obtienen de modelos de cola

Generalidades y definiciones

- Modelo de equilibrio de TP basado en frecuencias efectivas: puede hacerse cargo de tiempos de viaje en arcos así como funciones de tiempo de espera más realistas, asintóticas en la capacidad de los buses.
- Se prueba existencia de equilibrio en términos de flujos por estrategia. Se caracteriza el problema en términos de flujos por línea de donde es posible encontrar condiciones para unicidad
- Existencia de rangos de flujos en los cuales no existe conjunto de líneas comunes que pueda llevar al equilibrio, así como también el hecho de que un aumento en el flujo no induce mayores tiempos de viaje en TP.
- De hecho, en esos rangos puede probarse que el equilibrio no corresponde al óptimo social.
- Problema de líneas comunes bajo congestión: puede ser representado por una inecuación variacional, la cual es no monotónica así como no simétrica

Generalidades y definiciones

- El conjunto de flujos por estrategia en equilibrio es en general un subconjunto no convexo.
- Se puede encontrar eso sí un problema de optimización equivalente a nivel de flujos por línea, lo cual permite establecer un modelo de equilibrio para redes genéricas (para eso, el problema de Líneas es enfocado como un problema de programación dinámica PD)
- El modelo de red resultante consiste en un conjunto de problemas de líneas comunes (uno para cada par O-D) que se combinan a través de las restricciones de conservación de flujo.
- Filosofía de este enfoque es similar a estrategias óptimas, pero permite escribir el problema en términos de flujos en línea.
- Existencia de equilibrio para redes generales se obtiene a través de argumentos de punto fijo.

El problema de líneas comunes bajo congestión (Cepeda et al., 2006)

- Consideremos una red simple conectando un origen O con un destino D , y un conjunto finito de líneas de buses $A=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$
- Cada línea se caracteriza por un tiempo de viaje en vehículo constante t_a en R , y una función de frecuencia efectiva $f_a : [0, \bar{v}_a) \rightarrow (0, \infty)$ con

$$f'_a(v_a) < 0 \text{ y } f_a(v_a) \rightarrow 0 \text{ cuando } v_a \rightarrow \bar{v}_a$$

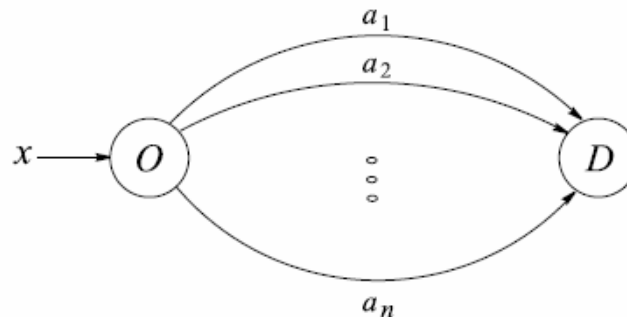


Fig. 1. The common-line problem.

El problema de líneas comunes bajo congestión (Cepeda et al., 2006)

- La frecuencia efectiva se supone decreciente para reflejar incremento en tiempos de espera producto de aumento en los flujos
- Constante $\bar{v}_a > 0$ es el flujo de saturación
- Para viajar entre O y D, cada pasajero selecciona un conjunto no vacío de líneas atractivas $s \subseteq A$ que llamaremos líneas comunes o estrategia

Thus, the total flow $x \geq 0$ splits among all possible strategies $s \in \mathcal{S}$ so that $x = \sum_{s \in \mathcal{S}} h_s$ where $h_s \geq 0$ denotes the flow on strategy $s \in \mathcal{S}$. Assuming that a passenger using strategy s boards line $a \in s$ with probability $\pi_a^s = f_a(v_a) / \sum_{b \in s} f_b(v_b)$, it turns out that each strategy-flow vector $h = (h_s)_{s \in \mathcal{S}}$ induces a unique vector of line-flows $v = v(h)$ through the system of equations

$$(E) \quad v_a = \sum_{s \in \mathcal{S}: a \in s} h_s \frac{f_a(v_a)}{\sum_{b \in s} f_b(v_b)} \quad \forall a \in A.$$

This line-flow vector v determines in turn the expected transit time of each strategy

$$(T) \quad T_s(v) \triangleq \frac{1 + \sum_{a \in s} t_a f_a(v_a)}{\sum_{a \in s} f_a(v_a)}.$$

El problema de líneas comunes bajo congestión (Cepeda et al., 2006)

Invoking Wardrop's principle, a strategy-flow vector $h \geq 0$ with $\sum_{s \in \mathcal{S}} h_s = x$ is said to be an *equilibrium* iff all strategies carrying flow are of minimal time, that is to say,

$$(W) \quad h_s > 0 \Rightarrow T_s(v(h)) = \tau(v(h)),$$

where $\tau(v) \triangleq \min_{s \in \mathcal{S}} T_s(v)$. The set of equilibria is denoted H_x , while V_x stands for the set of induced line-flows $v(h)$ corresponding to all $h \in H_x$.

- Notar que (E) y (T) presuponen que las llegadas de las diferentes líneas son independientes y siguen una exponencial negativa (lo único tratable a la fecha de esta publicación)

The set V_x was characterized in [Cominetti and Correa \(2001\)](#) as the optimal solution set of an equivalent optimization problem which implies the existence of a constant $\alpha_x \geq 0$ such that $v \in V_x$ if and only if $v \geq 0$ with $\sum_{a \in A} v_a = x$ and

$$(C_0) \quad \frac{v_a}{f_a(v_a)} \begin{cases} = \alpha_x & \text{if } t_a < \tau(\hat{v}(\alpha_x)), \\ \leq \alpha_x & \text{if } t_a = \tau(\hat{v}(\alpha_x)), \\ = 0 & \text{if } t_a > \tau(\hat{v}(\alpha_x)), \end{cases}$$

where $\hat{v}_a(\alpha)$ is the inverse function of $v_a \mapsto v_a/f_a(v_a)$.

El problema de líneas comunes bajo congestión (Cepeda et al., 2006)

- Resultado provee una descripción simple del conjunto V_x que usaremos más adelante para caracterizar el equilibrio en el caso más general de redes de TP.
- Cepeda et al. (2006) entregan una caracterización más simple del problema. Formalmente se parece a (C_0) , pero evitando las funciones $\hat{v}_a(\alpha)$

Theorem 2.1. $v \in V_x$ if and only if $v \geq 0$ with $\sum_{a \in A} v_a = x$ and there exists $\alpha \geq 0$ such that

$$(C_1) \quad \frac{v_a}{f_a(v_a)} \begin{cases} = \alpha & \text{if } t_a < \tau(v), \\ \leq \alpha & \text{if } t_a = \tau(v), \\ = 0 & \text{if } t_a > \tau(v). \end{cases}$$

- This result states that—for a simple network of one OD pair and non-overlapping common lines—all the arcs with travel time strictly less than the equilibrium time must carry an amount of flow which induces the same waiting time α , so that they are in some sense *evenly congested*. Arcs with travel time equal to the equilibrium time must have waiting time at most α , while arcs with larger travel times are not used. This characterization leads to an equivalent formulation of Wardop's user equilibrium for the transit route choice problem in a general network

El problema de líneas comunes bajo congestión (Cepeda et al., 2006)

■ Caracterización de estrategias óptimas:

Lemma 2.1. *Let $\check{s}(v) \triangleq \{a : t_a < \tau(v)\}$ and $\hat{s}(v) \triangleq \{a : t_a \leq \tau(v)\}$. Then for each $s \in \mathcal{S}$ the following are equivalent:*

- (a) $T_s(v) = \tau(v)$,
- (b) $t_a \leq T_s(v) \leq t_b \quad \forall a \in s, b \notin s$,
- (c) $\check{s}(v) \subseteq s \subseteq \hat{s}(v)$.

■ Al modelar redes de TP, muchos arcos no tienen tiempo de espera, y por lo tanto se le asigna frecuencia igual a infinito. Lo anterior puede ser tratado de forma de no alterar ni el teorema ni el lema anteriores (Cepeda, 2002; Cepeda et al, 2006)

El modelo de equilibrio en redes generales de TP

- Red de TP representada por grafo $G=(N,A)$, construido tal como se hizo en Spiess y Florian, 1989)
- N_s en N representan las paradas en red de TP.
- N_a corresponde a la secuencia de paradas de línea a
- Nodos en N_a se conectan con N_s a través de arcos de subida y bajada

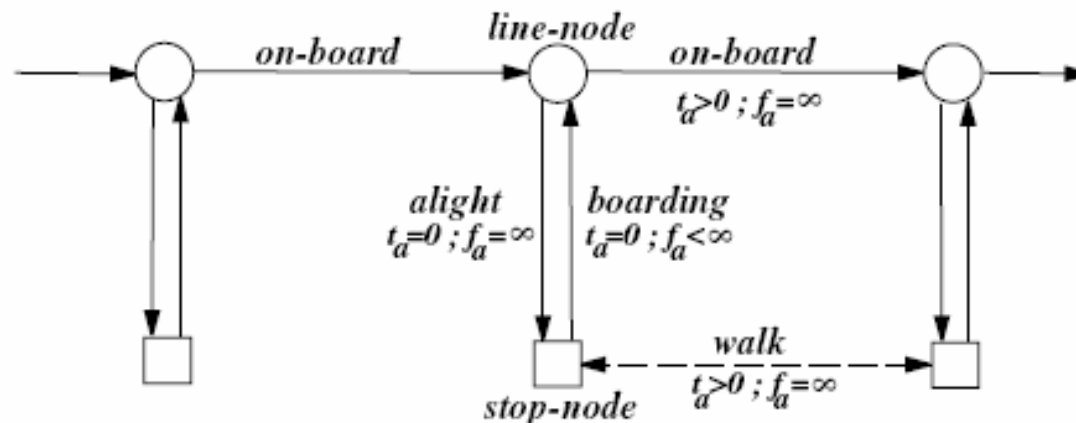


Fig. 2. Representation of a transit network.

El modelo de equilibrio en redes generales de TP

- Conjunto de destinos es D en N , y para cada d en D cada nodo i distinto a d tiene demanda positiva g_i^d (estrictamente positiva en paradas de TP)

The set $\mathcal{V} = [0, \infty)^{A \times D}$ denotes the space of arc-destination flow vectors v with non-negative entries $v_a^d \geq 0$, while $\mathcal{V}_0$ is the set of feasible flows $v \in \mathcal{V}$ such that $v_a^d = 0$ for all $a \in A_d^+$ (i.e. no flow with destination d exits from d) and satisfying the flow conservation constraints

$$g_i^d + \sum_{a \in A_i^-} v_a^d = \sum_{a \in A_i^+} v_a^d \quad \forall i \neq d. \quad (1)$$

Here $A_i^+ = \{a : i_a = i\}$ and $A_i^- = \{a : j_a = i\}$ are the forward and backward stars of node $i \in N$, with i_a and j_a denoting respectively the tail and head nodes of arc $a \in A$.

Every arc $a \in A$ has an associated travel-time function $t_a : \mathcal{V} \rightarrow [0, \infty)$ and an effective frequency $f_a : \mathcal{V} \rightarrow [0, \infty]$, both of which are continuous with $t_a(\cdot)$ bounded and $f_a(\cdot)$ either identically ∞ or everywhere finite. In the latter case, for each $d \in D$ we assume that $f_a(v) \rightarrow 0$ when $v_a^d \rightarrow \infty$ with $f_a(v)$ strictly decreasing with respect to v_a^d as long as $f_a(v) > 0$. Notice that $f_a(v)$ may take the value 0, which allows to model waiting times that explode to infinity beyond the line capacity.

El modelo de equilibrio en redes generales de TP

- Notar que las funciones $t_a(v)$ y $f_a(v)$ dependen en general de los flujos de todos los arcos de la red. Esto es relevante para el caso de frecuencias efectivas, ya que los tiempos de espera no sólo dependen de los flujos que abordan y de las características especiales de las líneas, (capacidad, frecuencia nominal, distribución de tiempos entre llegadas) sino que también de los flujos a bordo que consumen parte de la capacidad
- Noción de equilibrio en redes: considere un pasajero viajando hacia su destino d y que alcanza nodo intermedio i durante su viaje. Para continuar desde i , él puede usar los arcos $a \in A_i^+$ para alcanzar el siguiente nodos j_a

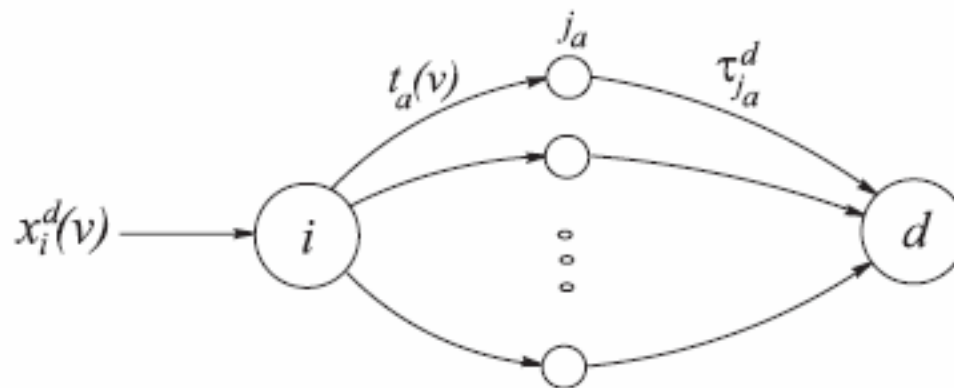


Fig. 3. The i -to- d common-line problem.

El modelo de equilibrio en redes generales de TP

By taking the arc travel times $t_a(v)$ and the transit times $\tau_{j_a}^d$ from j_a to d as fixed, the decision faced at node i is a common-line problem with travel times $t_a(v) + \tau_{j_a}^d$ and effective frequencies corresponding to the services operating on the arcs $a \in A_i^+$. The solution of this common-line problem determines the transit time τ_i^d from i to d , which can then be used recursively to solve the upstream nodes.

Since all the variables τ_i^d and v_a^d must be determined at the same time, the transit network model is stated as a set of simultaneous common-line problems (one for each pair i, d) coupled by flow conservation constraints. More precisely, for each $v \in \mathcal{V}$ the flow entering node i with destination d is defined as $x_i^d(v) \triangleq g_i^d + \sum_{a \in A_i^-} v_a^d$, while the *time-to-destination* functions $\tau_i^d(v)$ are the unique solution of the generalized Bellman equations (see Nguyen and Pallotino, 1988; Spiess and Florian, 1989; Cominetti and Correa, 2001):

$$\begin{cases} \tau_d^d = 0, \\ \tau_i^d = \min_{s \in \mathcal{S}_i} \frac{1 + \sum_{a \in s} [t_a(v) + \tau_{j_a}^d] f_a(v)}{\sum_{a \in s} f_a(v)} \quad \forall i \neq d, \end{cases}$$

where $\mathcal{S}_i$ stands for the set of non-empty subsets $s \subseteq A_i^+$. The quantity $t_a^d(v) \triangleq t_a(v) + \tau_{j_a}^d(v)$ represents the minimal time to destination d when using arc a . Let $V_i^d(v)$ denote the set of *local equilibrium flows* corresponding to a common-line problem defined by the arcs A_i^+ , with total flow $x_i^d(v)$, constant travel times $t_a^d(v)$, and diagonal effective frequencies $f_a^d(\cdot)$ obtained from $f_a(\cdot)$ by considering it as a function of the flow v_a^d alone, and keeping the other variables fixed. A flow v is a *global equilibrium* if it is a local equilibrium with respect to itself, that is to say, a fixed point for the above set-valued maps.

El modelo de equilibrio en redes generales de TP

Definition 3.1. A feasible flow $v \in \mathcal{V}_0$ is called a *network equilibrium* iff for all $d \in D$ and $i \neq d$ the flows $(v_a^d)_{a \in A_i^+}$ belong to $V_i^d(v)$. The set of network equilibrium flows will be denoted $\mathcal{V}_0^*$.

Taking into account the common-line model described in the previous section and introducing strategy-flow variables h_s^d , one may directly restate the above definition in the following terms: the vector $v \in \mathcal{V}$ is an equilibrium iff for all $d \in D$ and $i \neq d$ there exist $\tau_i^d \in \mathbb{R}$ and strategy-flows $h_s^d \geq 0$ for $s \in \mathcal{S}_i$ satisfying the flow equations

$$\sum_{s \in \mathcal{S}_i} h_s^d = x_i^d(v),$$

$$v_a^d = \sum_{s \ni a} h_s^d \frac{f_a(v)}{\sum_{b \in s} f_b(v)} \quad \forall a \in A_i^+,$$

and the Wardrop's equilibrium conditions

$$T_s^d(v) \begin{cases} = \tau_i^d & \text{if } h_s^d > 0, \\ \geq \tau_i^d & \text{if } h_s^d = 0, \end{cases}$$

where the cost of strategy $s \in \mathcal{S}_i$ is given by

$$T_s^d(v) = \frac{1 + \sum_{a \in s} [t_a(v) + \tau_{j_a}^d] f_a(v)}{\sum_{a \in s} f_a(v)}.$$

El modelo de equilibrio en redes generales de TP

- Es posible derivar la existencia de un equilibrio (Teorema punto fijo) bajo condiciones apropiadas de compactos.
- Caracterización del equilibrio:

A direct application of Theorem 2.1 gives the following characterization of network equilibria.

Theorem 3.1. $v \in \mathcal{V}_0^*$ iff $v \in \mathcal{V}_0$ and there exist numbers $\alpha_i^d \geq 0$ such that for all $d \in D$ and $i \neq d$

$$\frac{v_a^d}{f_a(v)} \begin{cases} = \alpha_i^d & \text{if } t_a^d(v) < \tau_i^d(v), \\ \leq \alpha_i^d & \text{if } t_a^d(v) = \tau_i^d(v), \\ = 0 & \text{if } t_a^d(v) > \tau_i^d(v), \end{cases}$$

where $t_a^d(v) \triangleq t_a(v) + \tau_{j_a}^d(v)$.

This characterization allows to derive a gap function with the property that each of its minimizers corresponds precisely to a network equilibrium.

Theorem 3.2. For all $v \in \mathcal{V}_0$, $d \in D$ and $i \neq d$ the following inequality holds:

$$\sum_{a \in A_i^+} [t_a(v) + \tau_{j_a}^d(v)] v_a^d + \max_{a \in A_i^+} \frac{v_a^d}{f_a(v)} \geq \tau_i^d(v) \sum_{a \in A_i^+} v_a^d \quad (2)$$

and moreover $v \in \mathcal{V}_0^*$ iff $v \in \mathcal{V}_0$ and all these inequalities are satisfied as equalities.

El modelo de equilibrio en redes generales de TP

Este resultado muestra que los flujos de equilibrio $v \in V_0^*$ corresponden al equilibrio global de la siguiente función:

$$\sum_{\substack{d \in D \\ i \neq d}} \left[\sum_{a \in A_i^+} [t_a(v) + \tau_{j_a}^d(v)] v_a^d + \max_{a \in A_i^+} \frac{v_a^d}{f_a(v)} - \tau_i^d(v) \sum_{a \in A_i^+} v_a^d \right]$$

with optimal value equal to 0. Re-arranging terms, the problem of finding equilibrium flows may be restated in the form

$$(P) \quad \underset{v \in \mathcal{V}_0}{\text{Minimize}} \quad G(v),$$

where

$$G(v) \triangleq \sum_{d \in D} \left[\sum_{a \in A} t_a(v) v_a^d + \sum_{i \neq d} \max_{a \in A_i^+} \frac{v_a^d}{f_a(v)} - \sum_{i \neq d} g_i^d \tau_i^d(v) \right].$$

- Enfoque para computar equilibrio para redes congestionadas: $\min G(v)$
- Problema: es posible caer en mínimo local, sin embargo dado que el objetivo final es acercarse a cero, es posible monitorear el progreso de algoritmo apropiadamente y derivar regla de parada.

Casos especiales de (P)

- Sin congestión $t_a(v)=t_a$, $f_a(v)=f_a$
 - Problema (P) se reduce a Spiess, Florian (1989)

$$\begin{aligned}
 \text{(PL)} \quad & \text{Min}_{v \in \mathcal{V}_0} \sum_{d \in D} \left[\sum_{a \in A} t_a v_a^d + \sum_{i \neq d} w_i^d \right] \\
 \text{s.t.} \quad & v_a^d \leq w_i^d f_a, \quad d \in D, \quad i \neq d, \quad a \in A_i^+,
 \end{aligned}$$

- Congestión parcial $t_a(v)$, $f_a(v)=f_a$
 - Problema (P) se reduce a Spiess, Florian (1989) extendido

$$\text{Min}_{v \in \mathcal{V}_0} \sum_{d \in D} \left[\sum_{a \in A} t_a(v_a) v_a^d + \sum_{i \neq d} \max_{a \in A_i^+} \frac{v_a^d}{f_a} - \sum_{i \neq d} g_i^d \tau_i^d(v) \right]$$

Algoritmo de solución

- Minimización heurística para evaluar la desviación de optimalidad de las soluciones que se computan vía función $G(v)$
- MSA: en cada iteración el método computa equilibrio en redes (con congestión), fijando tiempos de viaje y frecuencias de los valores determinados por flujos actuales
- Equilibrio para redes con costo lineal se puede obtener de resolver (PL), donde se computa la hiper-ruta mínima para cada destino d en D , y de ahí se computa el vector de flujo en arcos a destino
- Hiper-rutas mínimas pueden ser determinadas por los métodos de Spiess y Florian (1989) o por el método hiper-ruta-Dijkstra propuesto por Cominetti y Correa (2001)

Algoritmo de solución

Hence, choosing $\alpha_k \in (0, 1)$ with $\alpha_k \rightarrow 0$ and $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty$, the method can be described as

ALGORITHM MSA

Initialize: find $v^0 \in \mathcal{V}_0$ and set $k \leftarrow 0$

while $G(v^k) > \epsilon$

- compute $t_a = t_a(v^k)$ and $f_a = f_a(v^k)$
- compute shortest hyperpaths for each $d \in D$
- determine the induced flows $\hat{v}_a^d$
- update $v^{k+1} = (1 - \alpha_k)v^k + \alpha_k \hat{v}$
- set $k \leftarrow k + 1$

end

Stop: v^k is a solution with gap $G(v^k) \leq \epsilon$.

The computation of the gap $G(v^k)$ requires the storage of the flow variables v_a^d for every destination $d \in D$ and all arcs $a \in A$. As the network and the number of destinations grows, the storage requirement grows accordingly but even for large networks this remains within the capabilities of standard computers.

A starting point $v^0 \in \mathcal{V}_0$ may be obtained by performing an “all-or-nothing” assignment using shortest hyperpaths computed with constant times $t_a = t_a(0)$ and frequencies $f_a = f_a(0)$. It may happen that this flow violates the capacity constraints reflected in the fact that $f_a(v^0) = 0$ for some arcs, and then (PL) could become infeasible in the following iteration.

Hyperpath-Dijkstra

HYPERPATH-DIJKSTRA

Initialize: $\tau_i = \tau_i^\infty = \infty$, $s^i = s_\infty^i = \emptyset$, and $f^i = 0$

for $i \neq k$; $\tau_k = \tau_k^\infty = 0$; $S = \emptyset$;

while ($S \neq N$) **do**

{ find $j \notin S$ with smallest $\bar{\tau}_j = \min\{\tau_j, \tau_j^\infty\}$

and update $S \leftarrow S \cup \{j\}$

for ($a \in A$ with $j(a) = j$ and $i(a) \notin S$) **do**

{set $i = i(a)$ and $\tilde{t}_a = t_a + \bar{\tau}_j$

if ($f_a = \infty$) and ($\tilde{t}_a < \tau_i^\infty$) **then** $\{s_\infty^i \leftarrow \{a\}$;

$\tau_i^\infty \leftarrow \tilde{t}_a\}$

if ($f_a < \infty$) and ($\tilde{t}_a < \tau_i$) **then** ADD(a)

while ($\exists b \in s^i$ with $\tilde{t}_b \geq \tau_i$) **do** REMOVE(b)

}

}