

CI51J

CI51J
HIDRAULICA DE AGUAS SUBTERRANEAS
Y SU APROVECHAMIENTO

TEMA 6
HIDRAULICA DE CAPTACIONES VERTICALES
INTERFERENCIA ENTRE POZO DE BOMBEO Y FUENTE
LONGITUDINAL
OTOÑO 2008



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL



CI51J

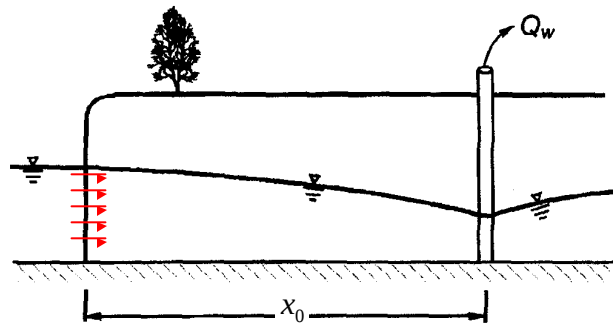
INTRODUCCION
SOLUCION DE JENKINS
SOLUCION DE HANTUSH
SOLUCION DE HUNT
COMPARACION



CI51J

El esquema tradicional de análisis de interferencia entre un pozo de bombeo y un río o cauce superficial se basa en una serie de supuestos básicos que en problemas prácticos no son del todo ciertos.

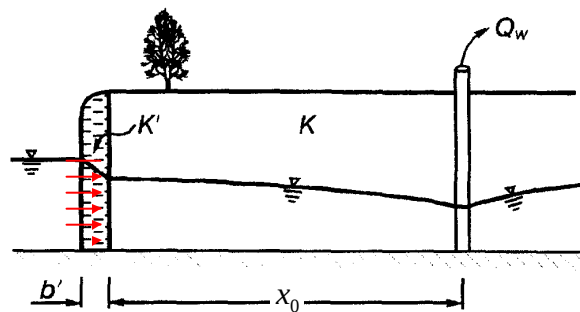
Uno de los aspectos más controvertidos acerca de esta situación corresponde al uso de un esquema analítico que supone una penetración total del cauce dentro del acuífero.



CI51J

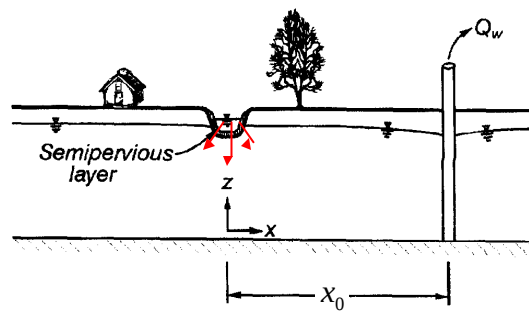
Debido a la discrepancia que se ha observado entre las soluciones analíticas tradicionales y el problema real, una serie de investigadores se ha dedicado a buscar esquemas alternativos o a mejorar las soluciones analíticas existentes.

Hantush (1964) consideró la existencia de una zona de menor permeabilidad adyacente al cauce, cuyo espesor es conocido.



CI51J

Hunt (1999) abordó la solución analítica de un problema con una geometría más cercana a la del caso real. En este caso se considera un cauce superficial que penetra sólo una fracción del espesor saturado, bajo el cual se ubica una zona o lecho de menor permeabilidad (*streambed*).



CI51J

INTRODUCCION

SOLUCION DE JENKINS

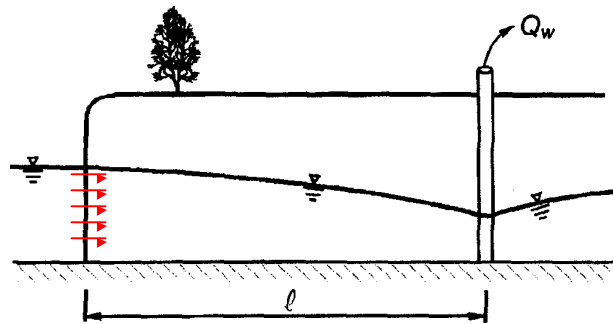
SOLUCION DE HANTUSH

SOLUCION DE HUNT

COMPARACION

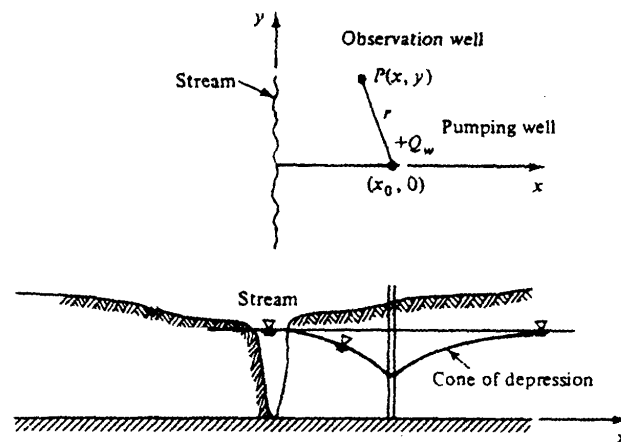
CI51J

La solución o **Enfoque de Jenkins** fue desarrollado en forma inicial por Theis (1941), luego fue mejorado por Glines and Balmer (1954) y finalmente fue popularizado por Jenkins en 1968. Esta solución toma como hipótesis más controvertida que el cauce penetra completamente la profundidad de la napa, con lo que da origen a una solución analítica muy simple para evaluar el porcentaje del caudal del pozo de bombeo que es proporcionado por el río hacia la napa.



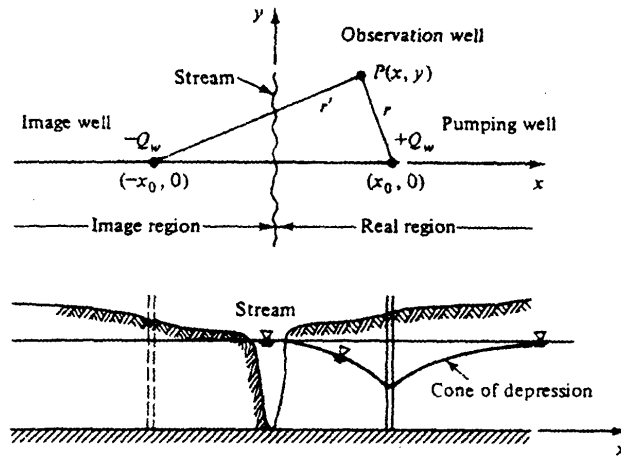
CI51J

Para estimar el efecto de un pozo de bombeo ubicado en la posición $(x_0, 0)$ sobre una fuente longitudinal se considera el principio de superposición en conjunto con el método de las imágenes.



CI51J

En este caso la fuente longitudinal se reemplaza por un pozo de inyección ubicado en una posición simétrica a la del pozo de bombeo.

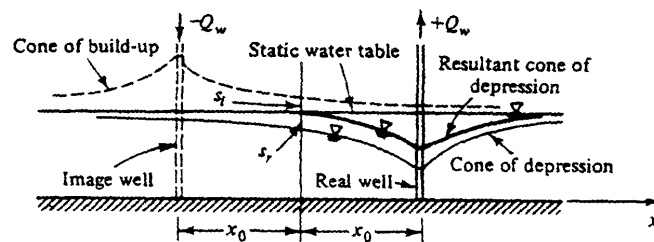


CI51J

Al considerar la superposición de los efectos de ambos pozos sobre un pozo de observación ubicado en la posición P, de coordenadas (x,y), se puede utilizar la solución de Theis para escribir:

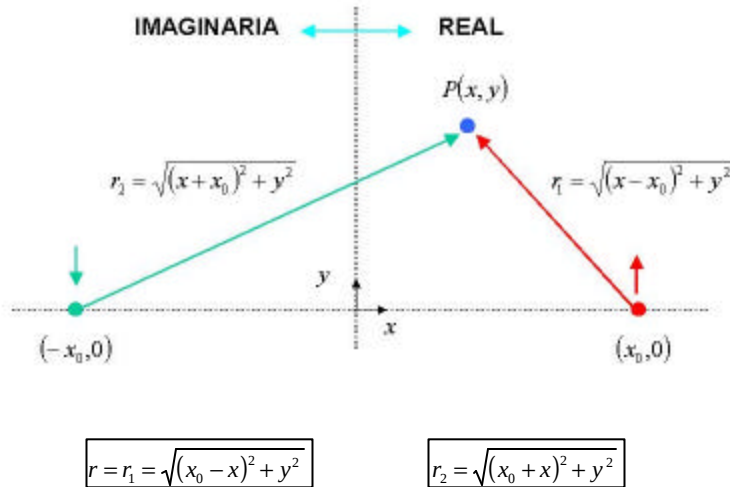
$$s(r,t) = s_p = \frac{Q}{4 \cdot p \cdot T} \cdot (W(u_1) - W(u_2))$$

$$s_p = \frac{Q}{4 \cdot p \cdot T} \cdot \left[W\left(\frac{r_1^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t}\right) - W\left(\frac{r_2^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t}\right) \right]$$



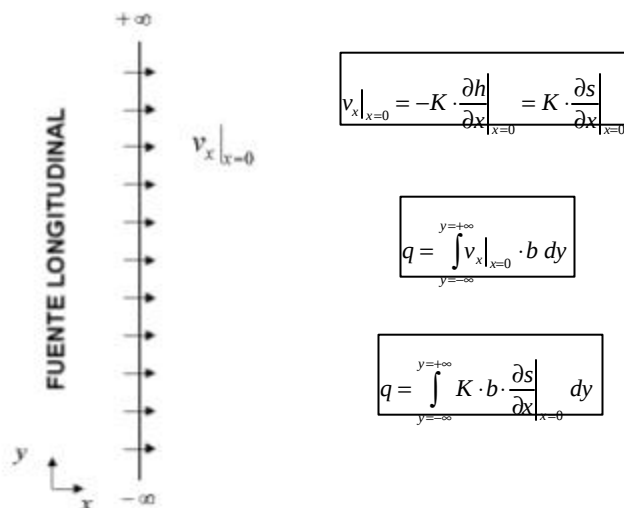
CI51J

Las distancias r , r_1 y r_2 pueden expresarse en coordenadas cartesianas como:



CI51J

Si deseamos evaluar el caudal aportado por la fuente longitudinal podemos considerar lo que ocurre en las cercanías de la misma, en la cual la velocidad del escurrimiento es perpendicular a la fuente.



CI51J

A partir de la ecuación para el descenso es posible escribir la siguiente expresión para la derivada del descenso:

$$s(r, t) = s_p = \frac{Q}{4 \cdot p \cdot T} \cdot (W(u_1) - W(u_2))$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{Q}{4 \cdot p \cdot T} \cdot \left(\frac{\partial W(u_1)}{\partial x} - \frac{\partial W(u_2)}{\partial x} \right)$$

la que puede ser evaluada en forma más adecuada utilizando la regla de la cadena:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{Q}{4 \cdot p \cdot T} \cdot \left(\frac{\partial W(u_1)}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial r_1} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial x} - \frac{\partial W(u_2)}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial r_2} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial x} \right)$$

Donde para evaluar la derivada de $W(u)$ se debe utilizar la regla de Leibnitz:



CI51J

Regla de Leibnitz:

$$F(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx$$

$$\frac{dF}{dt} = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx + f(b(t), t) \cdot \frac{db(t)}{dt} - f(a(t), t) \cdot \frac{da(t)}{dt}$$

$$W(u) = \int_u^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$$

$$f(x, u) = \frac{e^{-x}}{x}$$

$$u = \frac{r^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t}$$

$$\frac{dW}{du} = \int_u^{\infty} \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} dx + f(\infty, u) \cdot \frac{d\infty}{du} - f(u, u) \cdot \frac{du}{du}$$

$$\frac{dW}{du} = \int_u^{\infty} 0 dx + f(\infty, u) \cdot 0 - \frac{e^{-u}}{u} \cdot 1 = -\frac{e^{-u}}{u}$$



CI51J

A partir de la expresión anterior se obtiene:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{Q}{4 \cdot p \cdot T} \cdot \left(\frac{\partial W(u_1)}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial r_1} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial x} - \frac{\partial W(u_2)}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial r_2} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial x} \right)$$

$$\frac{dW}{du_1} = -\frac{\exp(-u_1)}{u_1}$$

$$\frac{dW}{du_2} = -\frac{\exp(-u_2)}{u_2}$$

$$\frac{du_1}{dr_1} = \frac{r_1 \cdot S}{2 \cdot T \cdot t}$$

$$\frac{du_2}{dr_2} = \frac{r_2 \cdot S}{2 \cdot T \cdot t}$$

$$\frac{dr_1}{dx} = \frac{x_0 + x}{\sqrt{(x_0 + x)^2 + y^2}}$$

$$\frac{dr_2}{dx} = -\frac{x_0 - x}{\sqrt{(x_0 - x)^2 + y^2}}$$

$$r_1 = \sqrt{(x_0 + x)^2 + y^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x_0 - x)^2 + y^2}$$

Finalmente, al evaluar en $x=0$ se tiene:

$$\left. \frac{\partial s}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{Q \cdot x_0}{p \cdot T} \cdot \frac{1}{x_0^2 + y^2} \cdot \exp\left(-\frac{x_0^2 + y^2}{4 \cdot T \cdot t} \cdot S\right)$$



CI51J

Al reemplazar en la ecuación para el caudal aportado por el río se tiene:

$$q(t) = \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} K \cdot b \cdot \left. \frac{\partial s}{\partial x} \right|_{x=0} dy$$

$$q(t) = T \cdot \frac{Q \cdot x_0}{p \cdot T} \cdot \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} \frac{1}{x_0^2 + y^2} \cdot \exp\left(-\frac{x_0^2 + y^2}{4 \cdot T \cdot t} \cdot S\right) dy$$

La cual al ser evaluada permite escribir:

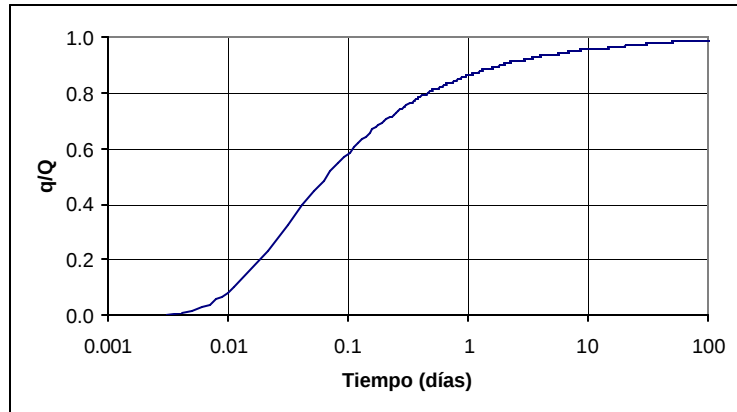
$$q(t) = Q \cdot \left(1 - \operatorname{erf} \left[\sqrt{\frac{S \cdot x_0^2}{4 \cdot T \cdot t}} \right] \right)$$

$$\frac{q(t)}{Q} = \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{S \cdot x_0^2}{4 \cdot T \cdot t}} \right)$$



CI51J

$$sdf = \frac{x_0^2 \cdot S}{T}$$



$$\frac{q(t)}{Q} = \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{S \cdot x_0^2}{4 \cdot T \cdot t}}\right) = \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{sdf}{4 \cdot t}}\right)$$

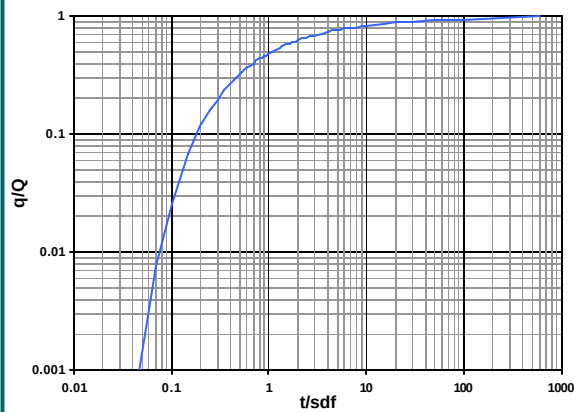


CI51J

INTERFERENCIA

SOLUCION DE JENKINS

Método de Jenkins



$$Q, T, S, l$$

$$sdf = \frac{x_0^2 \cdot S}{T} \quad y \quad t$$

$$q$$

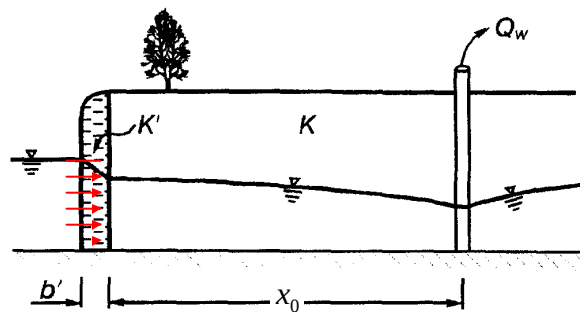


INTRODUCCION
SOLUCION DE JENKINS
SOLUCION DE HANTUSH
SOLUCION DE HUNT
COMPARACION



Debido a la discrepancia que se ha observado entre las soluciones analíticas tradicionales y el problema real, una serie de investigadores se ha dedicado a buscar esquemas alternativos o a mejorar las soluciones analíticas existentes.

Hantush (1964) consideró la existencia de una zona de menor permeabilidad adyacente al cauce, cuyo espesor es conocido.



CI51J

Hantush (1964) consideró la existencia de una zona de menor permeabilidad adyacente al cauce, cuyo espesor es conocido. Aún cuando siguió considerando que el cauce penetra completamente la napa, esta nueva hipótesis se acerca más a una situación real. Esta solución tiene la forma siguiente:

$$\frac{q(t)}{Q} = \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{S \cdot x_0^2}{4 \cdot T \cdot t}}\right) - \exp\left(\frac{T \cdot t}{S \cdot L^2} + \frac{x_0}{L}\right) \cdot \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{T \cdot t}{S \cdot L^2}} + \sqrt{\frac{S \cdot x_0^2}{4 \cdot T \cdot t}}\right)$$

donde L es un coeficiente de recarga desde el cauce, el que tiene dimensiones de longitud, mientras que el resto de las variables son similares al problema anterior. La expresión para el coeficiente de recarga es como sigue:

$$L = \frac{K}{K'} \cdot b'$$

donde K' es la conductividad de la zona más impermeable al costado del cauce y b' es su espesor.



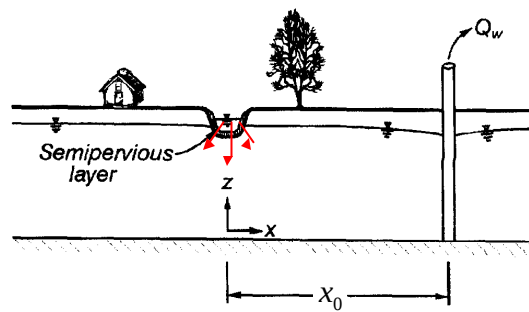
CI51J

INTRODUCCION
SOLUCION DE JENKINS
SOLUCION DE HANTUSH
SOLUCION DE HUNT
COMPARACION



CI51J

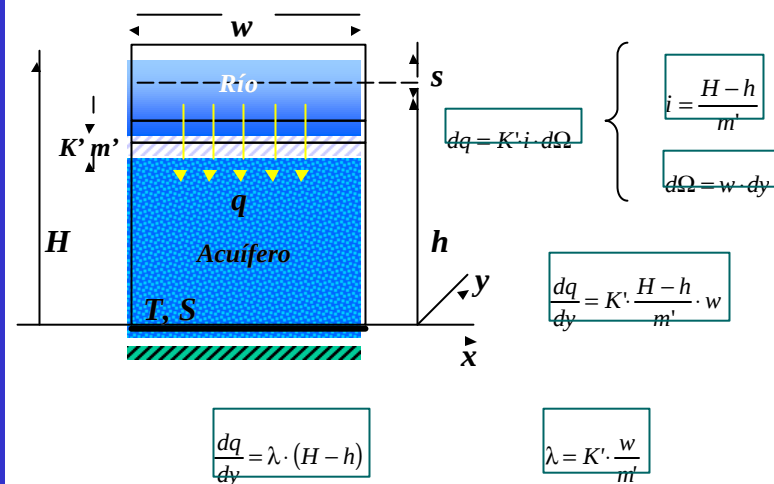
Hunt (1999) abordó la solución analítica de un problema con una geometría más cercana a la del caso real. En este caso se considera un cauce superficial que penetra sólo una fracción del espesor saturado, bajo el cual se ubica una zona o lecho de menor permeabilidad (*streambed*).



CI51J

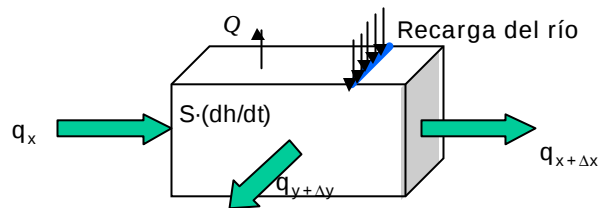
SOLUCION DE HUNT

El río es simulado utilizando la ley de Darcy



La ecuación diferencial que describe las variaciones de flujo en el agua subterránea está dado por la siguiente expresión.

$$T \cdot \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) - Q \cdot \delta(x-l) \cdot \delta(y) + \lambda \cdot (H-h) \cdot \delta(x) = S \cdot \frac{\partial h}{\partial t}$$



La ecuación de flujo en el agua subterránea puede ser escrita en función de los descensos.

$$s = H - h$$

Resolviendo la ecuación anterior se obtiene una expresión para los descensos en el acuífero.

$$s(x, y, t) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot T} \left[W \left(\frac{(l-x)^2 + y^2}{4 \cdot T \cdot t / S} \right) - \int_0^\infty e^{-\theta} \cdot W \left(\frac{(l+|x| + 2 \cdot T \cdot \theta / \lambda)^2 + y^2}{4 \cdot T \cdot t / S} \right) d\theta \right]$$

El vaciamiento del río producto de la extracción del Q del pozo está dado por la siguiente expresión

$$q(t) = l \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (H - h) dy = l \cdot \int_{-\infty}^{\infty} s(x=0, y, t) dy$$

CI51J

La solución analítica a este problema es similar a la de Hantush (1964) con algunas diferencias en cuanto al significado de algunos parámetros:

$$\frac{q(t)}{Q} = \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{S \cdot x_0^2}{4 \cdot T \cdot t}}\right) - \exp\left(\frac{l^2 \cdot t}{4 \cdot S \cdot T} + \frac{l \cdot x_0}{2 \cdot T}\right) \cdot \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{l^2 \cdot t}{4 \cdot S \cdot T}} + \sqrt{\frac{S \cdot x_0^2}{4 \cdot T \cdot t}}\right)$$

donde λ se define como un coeficiente de recarga que tiene dimensiones de velocidad. La forma de este coeficiente de recarga es como sigue:

$$l = \frac{K' \cdot w}{b'}$$

donde K' es la conductividad de la zona más impermeable bajo el cauce, b' es su espesor, y w es el ancho del cauce.



CI51J

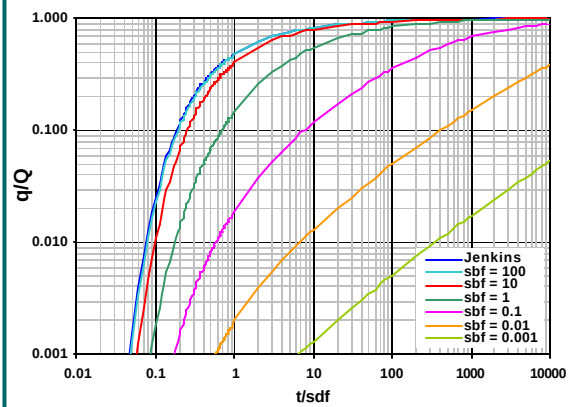
Se define el parámetro adimensional sbf como el “streambed factor” o “factor del lecho del río”:

$$sbf = \frac{\lambda \cdot l}{T}$$

Es posible escribir la solución en términos de sdf y sbf

$$\frac{q(t)}{Q} = \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{sdf}{4 \cdot t}}\right) - \exp\left(\frac{sbf^2 \cdot t}{4 \cdot sdf} + \frac{sbf}{2}\right) \cdot \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{sbf^2 \cdot t}{4 \cdot sdf}} + \sqrt{\frac{sdf}{4 \cdot t}}\right)$$



Método de Hunt.

$$Q, T, S, l, \lambda$$

$$sbf = \frac{\lambda \cdot l}{T}$$

$$sdf = \frac{l^2 \cdot S}{T} \quad y \quad t$$

$$q$$

INTRODUCCION
 SOLUCION DE JENKINS
 SOLUCION DE HANTUSH
 SOLUCION DE HUNT
COMPARACION

CI51J

Para efectos de ilustrar las soluciones anteriores se ha utilizado un caso real en el cual se evaluó el efecto de un pozo de bombeo sobre un curso de aguas superficiales que escurre cercano a él.



CI51J

La información para este análisis se muestra en la tabla siguiente. En este caso se ha supuesto que el bombeo se realiza a lo largo de un año de operación y se ha considerado dos valores posibles de la conductividad hidráulica del fondo del cauce.

Parámetro	Símbolo	Valor	Unidad
Transmisibilidad	T	1280	m ² /día
Espesor acuífero	m	60	m
Conductividad Hidráulica	K	≈ 20	m/día
Coefficiente de Almacenamiento	S	0.15	
Longitud pozo y cauce	l	175	m
Espesor lecho	b'	1.0	m
Ancho cauce	w	5.0	0
Conductividad Hidráulica Lecho	K'	$\frac{1}{100} \cdot K \approx 0.2$ $\frac{1}{200} \cdot K \approx 0.1$	m/día
Coefficiente de recarga	λ	1.0 0.1	m/día

COMPARACION JENKINS Y HUNT

