

## MÉTODOS NUMÉRICOS DE SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES CARACTERÍSTICAS

El método más simple es el método explícito de diferencias finitas.

Tenemos:

$$C^+ : \frac{dh}{dt} + \frac{a}{g} \frac{dv}{dt} + v \sin \theta + \frac{a}{g} \left( \frac{v|v|}{2\Delta} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{dx}{dt} = v + a \quad (2)$$

$$C^- : \frac{dh}{dt} - \frac{a}{g} \frac{dv}{dt} + v \sin \theta - \frac{a}{g} \left( \frac{v|v|}{2\Delta} \right) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{dx}{dt} = v - a \quad (4)$$

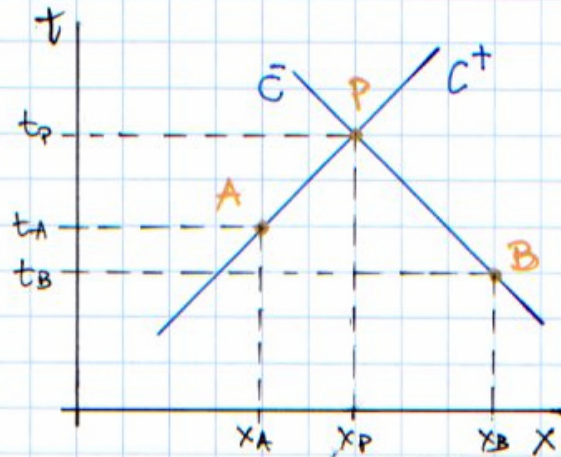
En tuberías, la celeridad de la onda de presión es mucho mayor que la velocidad del flujo:  $a \gg v$ , por lo que las ecuaciones (2) y (4) se reducen a:

$$(2) : \frac{dx}{dt} = a \quad (5)$$

$$(4) : \frac{dx}{dt} = -a \quad (6)$$

Las ecuaciones (5) y (6) definen trayectorias de ondas de presión. Como  $a$  depende de las características del fluido y la tubería, es constante, por lo que las trayectorias son líneas rectas.

En un plano  $x-t$ :

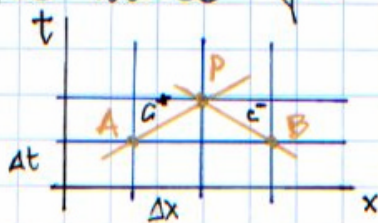


A lo largo de la trayectoria definida por  $dx/dt = a$ , el comportamiento de  $H$  y  $v$  está dado por la Ec(1). Del mismo modo, a lo largo de la trayectoria definida por  $dx/dt = -a$ , la Ec(3) define el comportamiento de  $H$  y  $v$ .

Lo que sucede en la posición  $x_P$  en el tiempo  $t_P$  (punto P), se debe a la interacción de dos perturbaciones: una que salió de la posición  $x_A$  en el tiempo  $t_A$  y que siguió la trayectoria definida por  $dx/dt = a$ , y de otra perturbación que en el tiempo  $t_B$  salió de la posición  $x_B$  y que se movió según  $dx/dt = -a$ .

En el método de diferencias finitas, las derivadas se aproximan a diferencias  $\frac{d}{dt} \approx \frac{\Delta}{\Delta t}$ .

Es claro que la discretización se simplifica si se hace que se cumpla  $\Delta x = a \Delta t$ !



El objetivo es conocer  $H$  y  $v$  en el punto P, conocidos  $H$  y  $v$  en los puntos A y B.

En el método explícito,  $u \sin \theta$  y  $f|v|v|$  se evalúan en los puntos A y B.

Evaluemos los derivados de las Ecs. (1) y (3):

$$C^+: \quad \frac{dH}{dt} \approx \frac{H_P - H_A}{\Delta t}, \quad \frac{dv}{dt} \approx \frac{v_P - v_A}{\Delta t}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = a$$

Reemplazando en Ec. 1:

$$C^+ \Rightarrow H_P - H_A + \frac{a}{g}(v_P - v_A) + v_A \sin \theta \Delta t + \frac{a}{g} \frac{f_A v_A |v_A|}{2D} \Delta t = 0 \quad (7)$$

$$C^-: \quad \frac{dH}{dt} \approx \frac{H_P - H_B}{\Delta t}, \quad \frac{dv}{dt} \approx \frac{v_P - v_B}{\Delta t}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = -a$$

Reemplazando en Ec. 3:

$$C^- \Rightarrow H_P - H_B - \frac{a}{g}(v_P - v_B) + v_B \sin \theta \Delta t - \frac{a}{g} \frac{f_B v_B |v_B|}{2D} \Delta t = 0 \quad (8)$$

(Ec. (7) + Ec. (8))/2 permite obtener  $H_P$ :

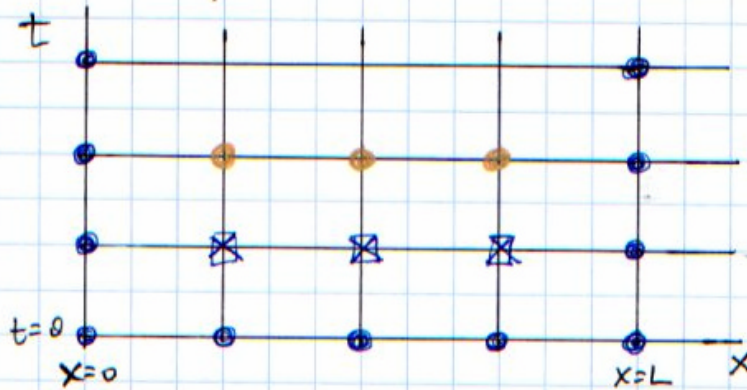
$$H_P = \frac{1}{2} \left[ H_A + H_B + \frac{a}{g}(v_A - v_B) - (v_A + v_B) \sin \theta \Delta t - \frac{a}{2gD} (f_A v_A |v_A| - f_B v_B |v_B|) \right] \quad (9)$$

(Ec. (7) - Ec. (8))/2 permite obtener  $v_P$ :

$$v_P = \frac{1}{2} \left[ \frac{g}{a}(H_A - H_B) + v_A + v_B + \frac{g}{a}(v_B - v_A) \sin \theta \Delta t - \frac{\Delta t}{2D} (f_A v_A |v_A| + f_B v_B |v_B|) \right] \quad (10)$$

Las Ecs. (9) y (10) permiten obtener  $H$  y  $v$  en cualquier punto del espacio-tiempo al que lleguen las ecuaciones características  $C^+$  y  $C^-$ .

## Forma de proceder:

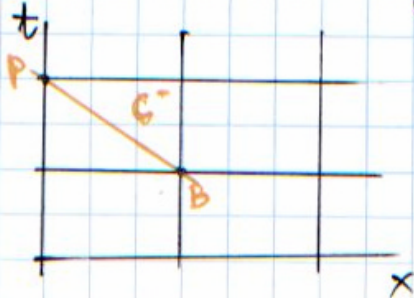


- : Condiciones de borde e inicial (conocidos)
- ⊗ : Se calculan en el primer  $\Delta t$  a partir de ●
- : Se calculan a partir de dos ⊗, excepto en los puntos contiguos a  $x=0$  y  $x=L$  (condiciones de borde), donde se calculan a partir de un ⊗ y un ●

## CONDICIONES DE BORDE

En los extremos de aguas arriba ( $x=0$ ) o aguas abajo ( $x=L$ ) no pueden aplicarse las Ecs. (a) y (b) ya que a esas ubicaciones sólo llega una característica:  $C^-$  para aguas arriba y  $C^+$  para aguas abajo.

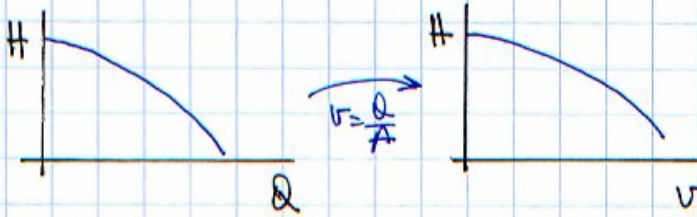
Algunas condiciones de borde usuales en el extremo de aguas arriba son:



1) Estanque a nivel constante:  
 $H_P = H_0 = \text{cte}, \forall t$

Ea. (b) permite conocer  $v_P$  ( $C^+$ )

2') Caudal suministrado por una bomba con curva característica conocida

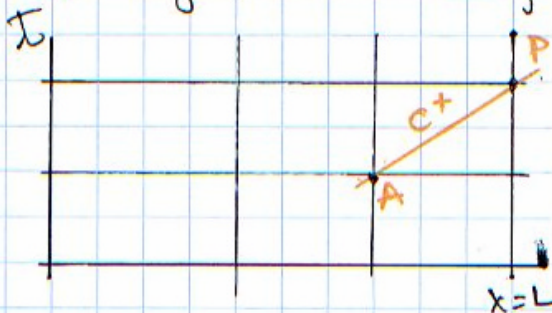


Podemos escribir la curva característica de la bomba en términos de la velocidad:

$$H_p = a + b v_p + c v_p^2$$

lo que se usa junto a C<sup>+</sup> (Ec. 8)

La condición de borde más común en el extremo de aguas abajo corresponde a una válvula que descarga a la atmósfera.



$$Q = vA = C_d A_0 \sqrt{2gH}$$

En el régimen permanente inicial:

$$Q_0 = v_0 A = (C_d A_0)_0 \sqrt{2gH_0}$$

de donde  $\frac{v}{v_0} = \frac{C_d A_0}{(C_d A_0)_0} \sqrt{\frac{H}{H_0}} = \eta(t) \sqrt{\frac{H}{H_0}}$

Aplicamos esta ecuación en  $x=L$  y obtenemos  $v_p$ :

$$v_p = v_0 \eta(t) \sqrt{\frac{H_p}{H_0}} \quad (*)$$

Ec. (\*) junto a C<sup>+</sup> (Ec. 7) nos permiten obtener  $v_p$  y  $H_p$ .