

## CI 41A - HIDRAULICA

Prof. Aldo Tamburrino T.

### CAPITULO A.1.- REPASO DE MECANICA DE FLUIDOS (Continuación)

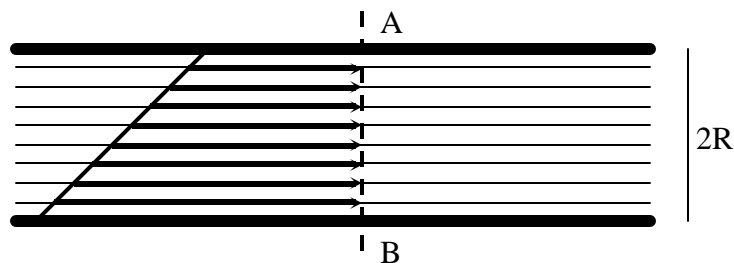
#### ESCURRIMIENTO EN TUBERIAS

##### DISTRIBUCION DE PRESIONES EN UNA TUBERIA

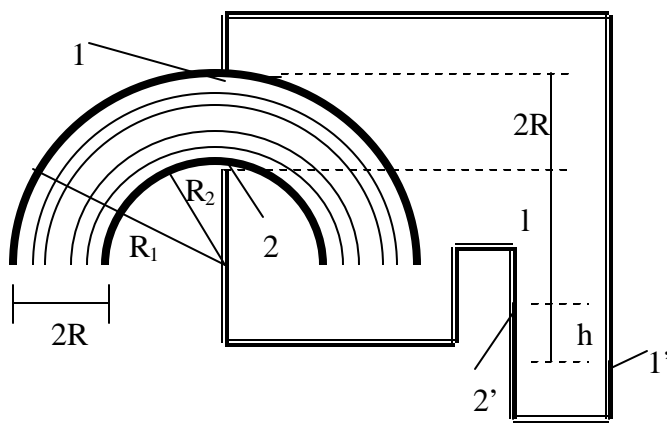
Consideremos una tubería de diámetro constante, rectilínea y horizontal. Como los filetes de escurrimiento son paralelos, tenemos una distribución hidrostática de presiones. Si  $p_B$  es la presión en un punto ubicado en el eje de la tubería, la presión en los puntos A y B será:

$$p_A = p_B - R\gamma$$

$$p_C = p_B + R\gamma$$



Consideremos ahora una tubería curvilínea. Debido a la curvatura de los filetes existe una fuerza centrífuga que actúa sobre las partículas del fluido, haciendo que la distribución de presiones no sea la hidrostática. Podemos usar esta variación de la presión para determinar el caudal que escurre por la tubería, conocida la diferencia de presiones en las paredes externa e interna.



$$p_1' = p_1 + (2R + h)\gamma$$

$$p_2' = p_2 + h\gamma$$

$$p_1' = p_2' + \gamma_m h$$

De donde resulta:

$$(p_1 - p_2)/\gamma = (\gamma_m/\gamma - 1)h - 2R$$

Supongamos, además, que el flujo es irrotacional. En este caso se cumple  $\omega = 0$ . En la curva existe sólo la componente  $v_r$ , cumpliéndose (DEMOSTRAR)  $r v_r = \text{constante}$ , o sea:

$$R_1 v_1 = R_2 v_2$$

Además,  $B_1 = B_2$  (¿por qué?), de donde puede obtenerse:

$$\frac{P_1 - P_2}{\gamma} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} - 2R$$

El caudal está dado por  $Q = VA$ , donde  $V$  es la velocidad media de la sección. Para simplificar el problema, consideremos  $V \approx (v_1 + v_2)/2$ . Formando la suma por diferencia en la ecuación anterior y reemplazando en ella la expresión para la diferencia de presiones encontrada anteriormente, obtenemos: Utilizando  $R_1 v_1 = R_2 v_2$ ,  $v_1 + v_2 = 2V$  y  $V = Q/A$  podemos reescribir la ecuación anterior como:

$$\left( \frac{\gamma_m}{\gamma} - 1 \right) h = \frac{v_2^2 - v_1^2}{g} V$$

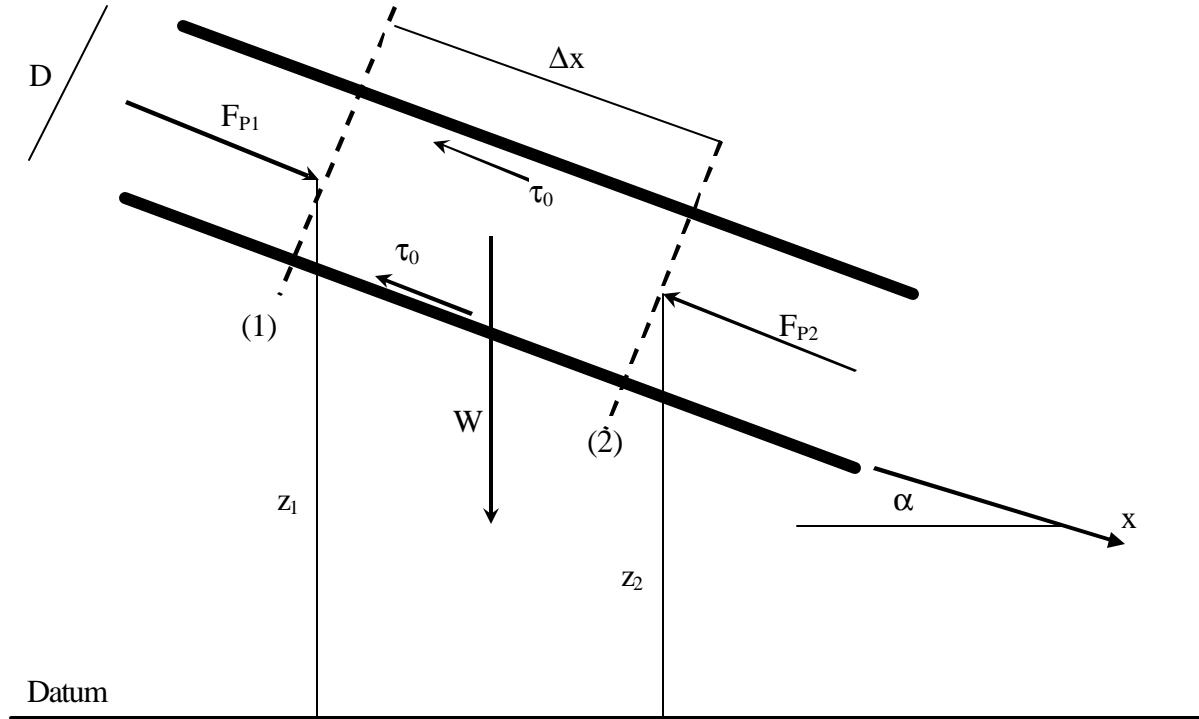
$$\left( \frac{\gamma_m}{\gamma} \right) h = \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} \frac{2}{g} \frac{Q^2}{A^2}$$

de donde podemos despejar el caudal

$$Q = A \sqrt{\frac{g}{2} \frac{R_1 + R_2}{R_1 - R_2}} \sqrt{\left( \frac{\gamma_m}{\gamma} \right) h}$$

Generalmente se usa  $Q = m A h^{1/2}$ , donde el coeficiente  $m$  se determina experimentalmente. Este coeficiente absorbe todas las diferencias que pueden introducirse debido a las suposiciones hechas en el cálculo, así como condiciones experimentales particulares.

RELACION ENTRE LA CAIDA DE PRESION Y LA FUERZA DE ROCE EN UNA TUBERIA RECTILINEA DE SECCION CONSTANTE



Como la tubería no cambia su sección,  $v_1=v_2$ . Al aplicar el Teorema de la Cantidad de Movimiento, tenemos:

$$\Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{F}_P + \vec{F}_{\text{roce}} + \vec{W}$$

Nos interesa considerar sólo la componente según x de las fuerzas:

$$F_{Px} = F_{p1} - F_{p2}$$

Expandiendo  $F_{p2}$  en series de Taylor y despreciando términos de orden superior, obtenemos la siguiente expresión para la resultante de las fuerzas de presión según x:

$$F_{Px} = - \frac{\partial F_P}{\partial x} \Delta x = - A \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x$$

donde  $A$  representa el área de la sección transversal de la tubería. La fuerza de roce está dada por:

$$F_{roce\ x} = -\tau_0 \chi \Delta x$$

siendo  $\chi$  el perímetro mojado. Finalmente, la componente del peso según  $x$  es:

$$W_x = W \sin \alpha = \gamma A \Delta x \sin \alpha$$

Por lo que el equilibrio dinámico según  $x$  da:

$$\tau_0 = \left( -\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \sin \alpha \right) R$$

donde  $R = A/\chi$  corresponde al radio hidráulico de la sección.

Aplicaremos ahora el Teorema General de la Energía entre las secciones 1 y 2:

$$B_1 = B_2 + \Lambda_f$$

Expandiendo  $B_2$  en series de Taylor y recordando la definición de pérdida friccional de energía por unidad de longitud:

$$J = \frac{\Lambda_f}{\Delta x} = -\frac{dB}{dx}$$

podemos obtener la siguiente relación:

$$\left( -\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \sin \alpha \right) = \gamma \frac{\Lambda_f}{\Delta x}$$

por lo que finalmente se obtiene la siguiente expresión para el esfuerzo de corte:

$$\tau_0 = \gamma R J$$

Notar que la expresión para  $t_0$  es general. No se han hecho suposiciones de tipo de flujo o tipo de

pared. Si limitamos el análisis para tuberías circulares,  $t_0$  será una función de la velocidad media,  $V$ ; del diámetro de la tubería,  $D$ ; del espesor de las asperezas,  $e$ ; y las propiedades del fluido,  $\mu$  y  $\rho$ . Notar que hemos dejado de lado la presión. (Esto no es tan obvio. Euler gastó varios años tratando de ligar la fuerza debido a la presión actuando sobre la pared con el esfuerzo de corte).

Así tenemos:  $t_0 = f(V, D, e, \mu, \rho)$ . Mediante análisis dimensional:

$$\frac{\tau_0}{\rho V^2} = \phi\left(Re, \frac{D}{\epsilon}\right)$$

o:

$$\tau_0 = \rho V^2 \phi\left(Re, \frac{D}{\epsilon}\right)$$

de donde resulta

$$J = \frac{V^2}{g R} \phi\left(Re, \frac{D}{\epsilon}\right)$$

Para una tubería circular  $R = D/4$ , quedando:

$$J = 8 \phi\left(Re, \frac{D}{\epsilon}\right) \frac{1}{D} \frac{V^2}{2g}$$

El término  $8 \phi(Re, D/e)$  es nuestro conocido factor de fricción, el que denotamos como  $f$ , o sea:

$$J = f \frac{1}{D} \frac{V^2}{2g}$$

La expresión anterior es la llamada fórmula de Darcy-Weisbach.  $f(Re, D/e)$  está dado, en forma general, en el diagrama de Moody.

TAREA: Demostrar que la distribución del esfuerzo de corte en una tubería circular está dada por

$$\tau = \tau_0 \frac{2r}{D} = \tau_0 \left(1 - \frac{2y}{D}\right), \text{ donde } y \text{ es la distancia desde la pared.}$$

## DETERMINACION DEL FACTOR DE FRICCION f EN FORMA ANALITICA

### TUBERIA CON PARED HIDRODINAMICAMENTE LISA

Usando la ecuación anterior y la que liga  $t_0$  con J es posible determinar f en forma analítica si se conoce la distribución de velocidades. En efecto, reemplazando la expresión de Darcy-Weisbach en  $\tau_0 = \gamma R J$  y despejando f, obtenemos:

$$f = 8 \frac{u_*^2}{V^2}$$

Para el cálculo de V supongamos que la ley logarítmica de velocidades es válida en toda la región del flujo y consideremos una tubería de pared hidrodinámicamente lisa.. Esto significa que estamos despreciando la presencia de la subcapa viscosa. (TAREA: Estimar el error que se comete al despreciar la subcapa viscosa). La ley logarítmica está dada por:

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{y u_*}{\nu}\right) + B$$

La velocidad media se calcula de:

$$V = \frac{1}{A} \int_0^{D/2} u \, 2\pi r \, dr$$

donde  $A = \pi D^2 / 4$  y se cumple la relación  $r+y = D/2$ , donde y es la distancia medida desde la pared. Después de integrar resulta (revisar):

$$V = u_* \left( \frac{1}{\kappa} \left( \ln\left(\frac{D u_*}{2\nu}\right) - \frac{3}{2} \right) + B \right)$$

por lo que obtenemos la siguiente expresión para el factor de fricción:

$$f = 8 \left( \frac{u^*}{V} \right)^2 = 8 \left( \frac{1}{\frac{1}{\kappa} \left( \ln \left( \frac{Du^*}{2v} \right) - \frac{3}{2} \right) + B} \right)^2$$

Generalmente el dato que conocemos es  $V$  y no  $u^*$ , por lo que conviene expresar la ecuación anterior en términos de la velocidad media. Si también reemplazamos  $Re = VD/v$ , podemos obtener la siguiente ecuación (TAREA):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{1}{\sqrt{8} \kappa} (\ln(\sqrt{f} Re) + B \kappa - \ln(\sqrt{32}) - 1.5)$$

Reemplazando  $\kappa = 0.4$  y  $B = 5.5$  obtenemos:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0.884 \ln(\sqrt{f} Re) - 0.913$$

Esta ecuación fue obtenida por Prandtl en 1935 y la expresó en términos del logaritmo decimal:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.035 \log(\sqrt{f} Re) - 0.913$$

Debido a que Prandtl supuso que la ecuación de la capa límite interna de la región turbulenta era válida en toda la región del flujo, la ecuación anterior tiene necesariamente que tener un error. Prandtl usó los datos experimentales tomados por Nikuradse y ajustó las constantes numéricas, obteniendo:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log(Re \sqrt{f}) - 0.8$$

La ecuación anterior no tiene limitación en el número de Reynolds. Debemos recordar que en 1911, Blasius propuso la siguiente relación empírica:

$$f = \frac{0.3164}{Re^{1/4}}, \quad Re \leq 10^5$$

TAREA: Demostrar que  $f = 64 / Re$  para régimen laminar en tuberías.

## TUBERIA CON PARED HIDRODINAMICAMENTE RUGOSA

En forma similar puede obtenerse la ley de resistencia para régimen turbulento en pared hidrodinámicamente rugosa. En este caso la distribución de velocidades es:

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{y}{k_s}\right) + B, \quad (\kappa, B) = (0.4, 8.5)$$

resultando:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0,942 \ln\left(\frac{D}{2k_s}\right) + 1,68 = 2,2 \log\left(\frac{D}{2k_s}\right) + 1,68$$

Al igual que en el caso de pared lisa, la ecuación anterior, no es completamente correcta. Al ajustar las constantes numéricas con información experimental, resulta la siguiente expresión:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log\left(\frac{3,7D}{k_s}\right)$$

## PARED EN TRANSICION LISA-RUGOSA

En este caso no tenemos una expresión analítica simple para la distribución de velocidades ya que la constante aditiva depende de  $k_s u_* / \nu$ . Para paredes lisas teníamos:

$$2 \log(\text{Re} \sqrt{f}) - \frac{1}{\sqrt{f}} = 0,8$$

y para paredes rugosas:

$$2 \log\left(\frac{3,7D}{k_s}\right) - \frac{1}{\sqrt{f}} = 0$$

Veamos cuál es la desviación de  $f$  para paredes lisas con respecto a  $f$  para paredes rugosas. Para visualizar esto, manipulemos la ecuación de paredes lisas con el objeto de poder formar la de paredes rugosas. Al hacerlo (TAREA), resulta:



$$2 \log\left(\frac{3,7D}{k_s}\right) - \frac{1}{\sqrt{f}} = 1,03 - 2 \log\left(\frac{k_s u^*}{v}\right)$$

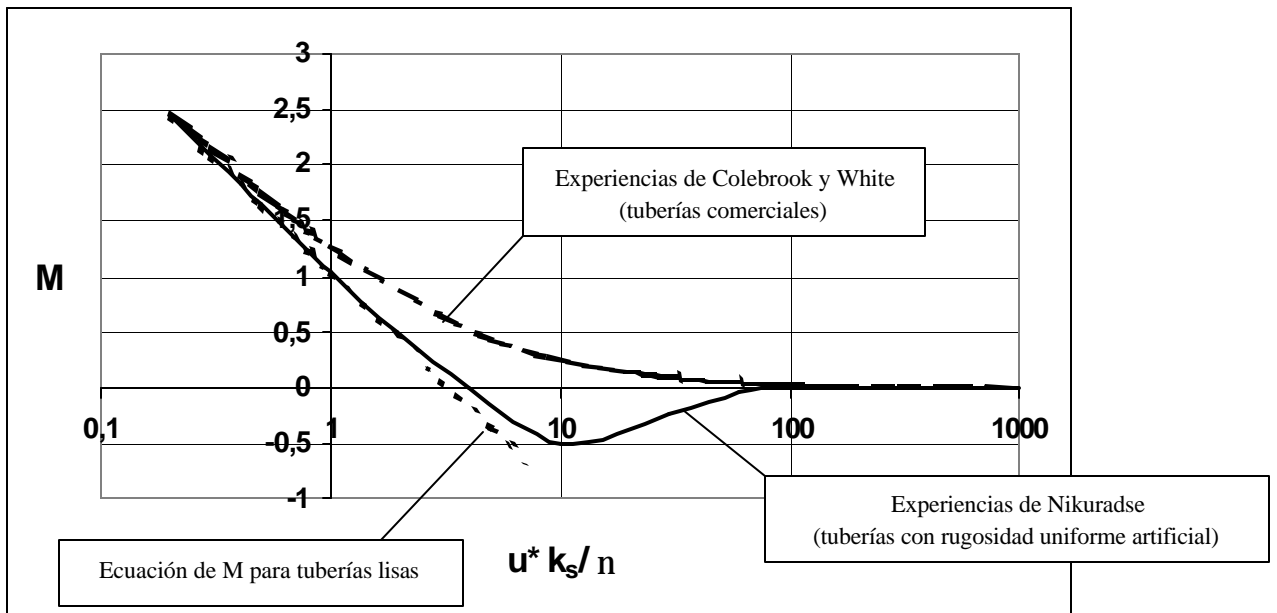
El lado derecho de la ecuación anterior corresponde a la desviación que buscamos. Definamos la función M, válida para todo tipo de tuberías (lisas, transición y rugosas):

$$M = 2 \log\left(\frac{3,7D}{k_s}\right) - \frac{1}{\sqrt{f}}$$

Insistamos que aunque la expresión anterior tiene la forma de la ecuación para tuberías rugosas, f cubre todo el rango de rugosidades debido a la presencia de M. Usando los datos experimentales de Nikuradse, podemos obtener la siguiente información:

Re	D/k <sub>s</sub>	f	M	k <sub>s</sub> u* /v
:	:	:	:	:
:	:	:	:	:
:	:	:	:	:
:	:	:	:	:

Nikuradse graficó los valores de M versus k<sub>s</sub> u\* /v de la tabla anterior, obteniendo la curva indicada en el gráfico siguiente:



Nikuradse realizó sus mediciones en tuberías con asperezas artificialmente añadidas, de tamaño uniforme. Las tuberías comerciales no tienen una rugosidad uniforme, sino que fluctúa entre ciertos límites. Para utilizar los resultados de Nikuradse en tuberías comerciales se procedió a la inversa, o sea, se midió la caída de presión en tuberías comerciales (recordar  $\partial p / \partial x \rightarrow \tau_0 \rightarrow f$ ) y se determinó cuál sería la rugosidad equivalente en una tubería de Nikuradse que diese la misma pérdida. La rugosidad equivalente se denota con  $e$ . Así, para tuberías rugosas:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \left( \frac{3,7D}{\epsilon} \right)$$

Aunque el efecto de no uniformidad de las asperezas no es importante para tuberías rugosas, sí lo es para tuberías en transición lisa-rugosa. Colebrook y White (1937) experimentaron con tuberías comerciales (rugosas y transición) y de sus experiencias se obtiene la siguiente expresión para  $M$ :

$$M = 2 \log \left( 1 + \frac{3,29}{\frac{u^* \epsilon}{v}} \right)$$

por lo que la ley friccional para tuberías en transición lisa-rugosa tiene la forma:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{\epsilon}{3,7D} + \frac{2,51}{\frac{VD}{v} \sqrt{f}} \right)$$

La discrepancia entre los resultados de Nikuradse y Colebrook-White para  $M$  se debe a que las tuberías comerciales al tener rugosidad no uniforme, presentan una distribución (en el sentido estadístico) de rugosidades. Es así como algunas asperezas tienen un tamaño mayor que el promedio y ellas tienden a perturbar la subcapa viscosa antes que si todas las asperezas tuviesen el mismo tamaño, haciendo que la separación de la curva con respecto a la tubería lisa comience antes y gradualmente.

De este modo, hemos caracterizado con ecuaciones los factores de fricción para tuberías con escurrimientos en régimen laminar y turbulento. No se ha hecho lo mismo para el régimen de transición laminar-turbulento ya que es muy incierto y pequeñas variaciones de  $Re$  significan grandes cambios en  $f$ . En general, se trata de evitar el diseñar en dicha zona.. Las expresiones aquí presentadas no son las únicas.

Existe una enormidad de ellas, prácticamente todas determinadas experimentalmente, algunas de las cuales introducen parámetros adicionales que dependen del material del que están hechas las tuberías.

#### VALORES DE LA ASPEREZA $\varepsilon$ PARA ALGUNOS MATERIALES

MATERIAL	$\varepsilon$ (mm)
Latón, cobre, plomo, vidrio	0,0015
Cemento-asbesto (rokalit)	0,0125
Acero sin remaches, fierro forjado	0,045
Fundición asfaltada	0,120
Fierro galvanizado	0,15
Dovelas de madera	0,18 – 0,90
Fundición	0,26
Concreto	0,30 – 3,0
Mortero seco	1,25
Acero remachado	0,9 – 9,0
Metal corrugado	20