8. Flexión Asimétrica (Biaxial) de Vigas

8.1 Introducción

En esta sección, el análisis de la flexión en elementos-vigas, estudiado en las secciones precedentes, es ampliado a casos más generales. Primero, se considera el caso de la flexión **asimétrica** o **inclinada** (biaxial) de vigas prismáticas con secciones transversales doblemente simétricas. Luego, empleando el método de superposición, se trata la flexión elástica con cargas axiales. A continuación, se estudia la flexión inelástica con fuerzas axiales en secciones doblemente simétricas. Luego, se analiza la flexión elástica en vigas prismáticas de sección transversal arbitraria. Para tratar este tema se establecen las ecuaciones básicas para los momentos y productos de inercias de áreas, seguido por las ecuaciones para los ejes principales de inercia. Usando estas ecuaciones, se establecen las ecuaciones generales para determinar las tensiones de flexión elástica lineales en vigas de sección transversal arbitraria.

8.2 Flexión Asimétrica en Secciones transversales Doblemente Simétricas.

Como un ejemplo de flexión pura **asimétrica** o **inclinada**, considere la viga rectangular mostrada en la Fig. 18. Basado en la figura se cumple lo siguiente:

- Los momentos de flexión **M** aplicados actúan en forma normal al plano abad
- Momento de flexión **M** tiene dos componentes: M_z y M_y

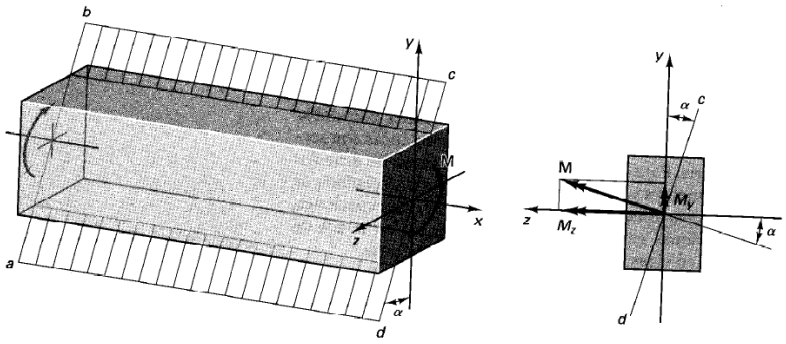


Fig. 18. Flexión asimétrica o inclinada de una viga con sección transversal doblemente simétrica

Debido a la doble simetría de la sección transversal, las fórmulas obtenidas en las secciones precedentes son directamente aplicables para el caso en estudio. Debido a la simetría, el producto de inercia para esta sección es cero y los ejes ortogonales mostrados son los ejes *principales* de la sección transversal.

Suponiendo un comportamiento lineal-elástico de un material homogéneo, una superposición de las tensiones normales debido a M_z y M_y entrega la distribución de las tensiones normales que actúan en la sección de la viga. Por consiguiente, aplicando la fórmula de Navier para ambos ejes, se obtiene lo siguiente

$$\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z \tag{33}$$

donde un momento M_z positivo genera fibras traccionadas para $y < 0$ y un momento M_y positivo genera fibras traccionadas para $z > 0$.

Una ilustración gráfica de la superposición de las tensiones normales, representada en la Ec. (33), se muestra en la Fig. 19.

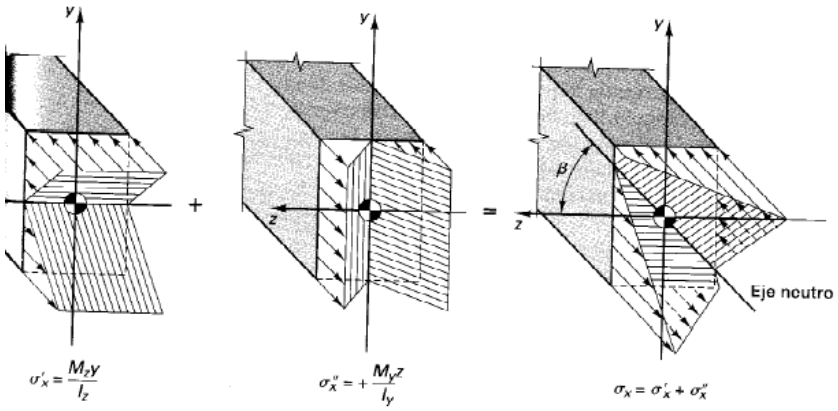


Fig. 19. Superposición de las tensiones normales elásticas de flexión

Se debe notar de la Fig. 19, que la línea de tensión cero (eje neutro) forma un ángulo β con el eje *z*. Analíticamente, tal eje puede determinarse haciendo igual a cero la tensión σ_x dada por la Ec. 33. Entonces,

$$-\frac{M_z}{I_z}y+\frac{M_y}{I_y}z=0 \tag{34a}$$

$$\frac{y}{z}=\frac{M_yI_z}{M_zI_y}=\tan\beta \tag{34b}$$

En general, $M_y = M\sin\alpha$ y $M_z = M\cos\alpha$, la Ec. (34b) se reduce a

$$\tan\beta=\frac{I_z}{I_y}\tan\alpha \tag{34c}$$

Por lo general, los ángulos *a* y β no son iguales, a menos que $I_y = I_z$, o α sea igual a 0º o 90º.

Los resultados obtenidos en esta sección pueden generalizarse a elementos con secciones transversales arbitrarias, siempre que la flexión sea en torno a los ejes *principales*. Considerar un elemento elástico homogéneo con una sección transversal arbitraria, flexionada con respecto al eje *z*, que es un eje principal (Fig. 20).

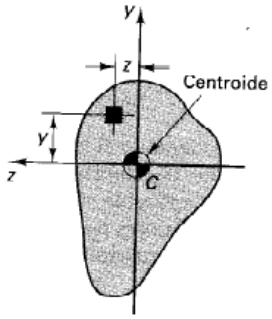


Fig. 20. Sección arbitraria sometida a flexión respecto a un eje principal

La distribución de tensiones normales en la sección está dada por la ecuación de Navier, $\sigma_x = -M_z\, y/I_z$. Si esta distribución de tensiones no causa un momento de flexión M_y en torno al eje y, esta es la solución correcta del problema. Por lo tanto,

$$M_y = \int_A \sigma_x dAz = \int_A -\frac{M_z y}{I_z} z dA = -\frac{M_y}{I_z}\int_A yz dA = 0 \qquad (35a)$$

$$\int_A yz dA = 0 \qquad (35b)$$

La Ec (35b) se cumple si el producto de inercia se calcula con respecto a ejes *principales*. Por lo tanto, la Ec. (33) puede utilizarse en secciones transversales arbitrarias, siempre que se utilicen los ejes *principales* de la sección.

Ejemplo: Para la viga de madera de 100×150 mm mostrada en la Fig. 21, se pide determinar la tensión máxima de flexión en el centro de la viga y la ubicación del eje neutro.

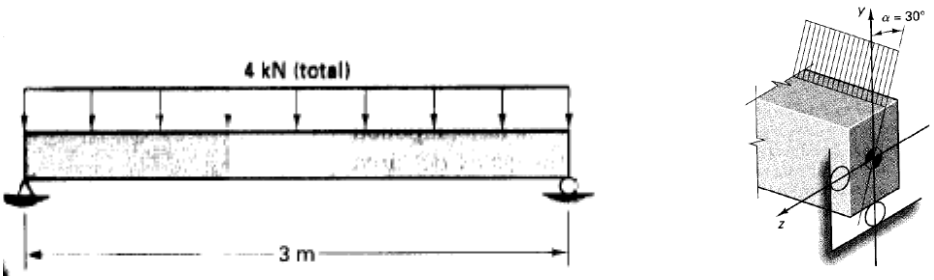


Fig. 21. Sección rectangular sometida a simétrica

8.3 Flexión Elástica con cargas Axiales (Flexión Compuesta)

8.3.1 Distribución de la Tensión Normal σ_x

Una solución para la flexión asimétrica, considerando ambos ejes principales de un elemento, puede ampliarse para incluir el efecto de cargas axiales empleando el principio de *superposición*. Tal enfoque sólo es aplicable en secciones homogéneas, considerando el rango de comportamiento lineal-elástico del material. En este análisis no se considera la posibilidad de pandeo del miembro producto de la acción de una carga axial de compresión. Con estas consideraciones, la Ec. (33) toma la siguiente forma generalizada

$$\sigma_x = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z \tag{36}$$

donde la variables *N* y *A* corresponden al esfuerzo axial y área de la sección transversal, respectivamente. El esfuerzo axial *N* se considera positivo si es de tracción y la flexión tiene lugar respecto a los dos ejes principales *y* y *z*.

La Ec. (36) se puede expresar en términos del esfuerzo axial y de las coordenadas del *centro de solicitación* (z_0, y_0), coordenadas que se determinan de las ecuaciones siguientes

$$y_0 = -\frac{M_z(x)}{N(x)} \tag{37a}$$

$$z_0 = \frac{M_y(x)}{N(x)} \tag{37b}$$

El centro de solicitación corresponde a un punto ubicado en el plano de la sección transversal donde se debe aplicar la fuerza axial N(x), actuando aisladamente, de modo que al reducirla al centro de gravedad de la sección transversal, el estado de esfuerzo resultante sea igual a una carga axial *N* y momentos de flexión M_y y M_z en torno a los ejes *y* y *z*, respectivamente (Fig. 22).

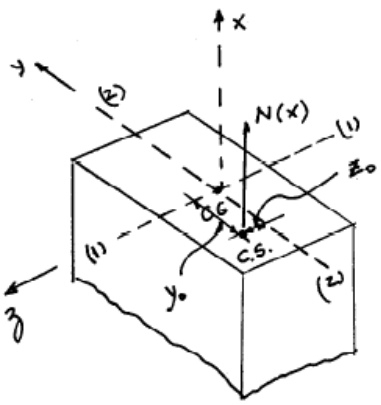


Fig. 22. Estado de esfuerzo interno debido a una carga axial excéntrica.

Utilizando las coordenadas del centro de solicitación, la Ec. (36) se reduce a

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{Ny_0}{I_z} y + \frac{Nz_0}{I_y} z \tag{38a}$$

$$\sigma_x = \frac{N}{A}\left(1 + \frac{y_0}{\rho_z^2} y + \frac{z_0}{\rho_y^2} z\right) \tag{38b}$$

donde $\rho_z = \sqrt{I_z / A}$ y $\rho_y = \sqrt{I_y / A}$ son los radios de giro de la sección transversal en torno a los ejes de inercia principal que coinciden con los ejes *z*-*z* e *y*-*y* del sistema local de referencia, respectivamente.

En el caso particular en que el plano de cargas contenga al eje principal de inercia que se hace coincidir con el eje e *y*-*y* del sistema local de referencia, la flexión es recta en torno de une eje paralelo a al eje *z*-*z* del sistema de referencia. En este caso M_y es igual a cero y la Ec. (36) se reduce a

$$\sigma_x = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y \tag{39a}$$

o

$$\sigma_x = \frac{N}{A}\left(1 + \frac{y_0}{\rho_z^2} y\right) \tag{39b}$$

Al analizar las expresiones que determinan la distribución de la tensión normal σ_x en la sección de un elemento sometido a **flexión compuesta**, se deduce que ésta varía en forma lineal en la sección transversal del elemento.

8.3.2 Ubicación del eje Neutro: Flexión Compuesta

Cuando el material que forma el elemento en flexión compuesta resiste tanto tensiones de tracción y compresión o cuando no resistencia tracción, el centro de solicitación se ubica en el interior del núcleo central de la sección (esto implica que toda la sección está comprimida), el eje neutro se determina imponiendo que este eje es el lugar geométrico de los puntos del plano que contiene la sección transversal que satisfacen la condición $\sigma_x = 0$. Por lo tanto, basado en la Ec. (38b), los puntos satisfacen la relación siguiente

$$\left(1 + \frac{y_0}{\rho_z^2} y + \frac{z_0}{\rho_y^2} z\right) = 0 \tag{40}$$

La posición del eje neutro se determina ubicando los puntos en que esta línea recta intersecta a los ejes *z* e *y* del sistema local de referencia, que son los puntos A y B de la Fig. 23. Las coordenadas de los puntos A y B son las siguientes:

$$A = (y_a, 0) = \left(-\frac{\rho_z^2}{y_0}, 0\right) \tag{41a}$$

$$B = (0, z_b) = \left(-\frac{\rho_y^2}{z_0}, 0\right) \tag{41b}$$

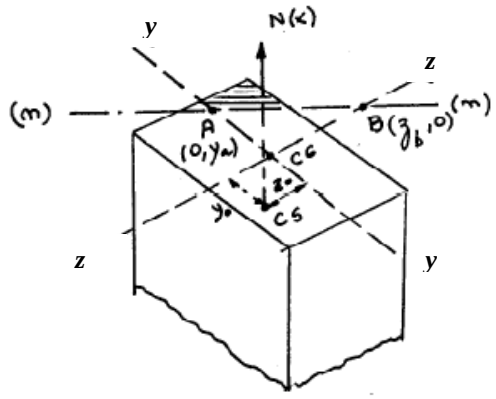


Fig. 23. Ubicación del eje neutro en una sección sometida a flexión compuesta.

En base a la Ec. (40) y Fig. 23, se pude concluir lo siguiente:

- En una flexión compuesta el eje neutro no pasa por el centro de gravedad de la sección.
- El eje neutro intersecta los cuadrantes donde no se ubica el centro de solicitación y puede localizarse dentro, tangente al contorno o fuera de la sección transversal.
- La posición del eje neutro depende del esfuerzo que predomina en el estado de tensión normal. Si predomina la fuerza axial, el eje neutro tiende a ubicarse fuera de la sección transversal. En cambio, si predomina el momento de flexión, el eje neutro tiende a ubicarse dentro de la sección transversal.
- Cuando el eje neutro se localiza fuera de la sección o tangente a su contorno, las tensiones normales en todos los puntos de la sección transversal son de un mismo tipo: todas tracciones o todas compresiones.
- Cuando el eje neutro se localiza dentro de la sección, las tensiones normales que se producen en los puntos de la sección son tanto tracciones como compresiones.

  En el caso particular que la flexión sea recta en torno del eje de inercia principal, que se hace coincidir con el eje *z* del sistema de referencia, la ecuación del eje neutro es

$$\left(1+\frac{y_0}{\rho_z^2}\,y\right)=0 \qquad (42)$$

La Ec. (42) define una recta paralela al eje *z* que interfecta al eje y a la altura $\bar{y} = -\rho_z^2 / y_0$, tal como lo muestra la Fig. 24.

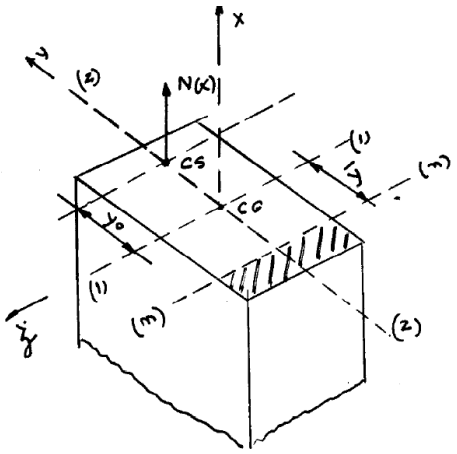


Fig. 24. Ubicación del eje neutro en una sección sometida a flexión compuesta (flexión en torno a eje *z*).

8.3.3 Núcleo Central de una Sección Transversal.

El núcleo central de una sección transversal es una región ubicada en torno al centro de gravedad de la sección que tiene las siguientes propiedades:

- El núcleo central es una figura convexa.
- El núcleo central es un polígono que tiene tantos lados como vértices tiene la sección transversal.

Desde el punto de vista de la mecánica estructural, el contorno del núcleo central se define como el lugar geométrico donde deben ubicarse los centros de solicitación para que los ejes neutros asociados sean tangentes a ala sección sin cortarla.

De esta forma, para determinar el núcleo central de una sección, sólo se deben considerar algunas posiciones de la línea neutra tangenciales al contorno sin que la corten en ningún punto. Las coordenadas $\left(z_0^*, y_0^*\right)$ de los centros de solicitación se calculan utilizando la Ec. (40), que determina el eje neutro. Por lo tanto, se obtiene la siguiente relación para determinar las coordenadas $\left(z_0^*, y_0^*\right)$

$$\left(1+\frac{y_0^*}{\rho_z^2}\,y+\frac{z_0^*}{\rho_y^2}\,z\right)=0 \qquad (43)$$

A continuación, se consideran algunos ejemplos de cálculo del núcleo central de una sección transversal.

a. Sección transversal rectangular.

Considerar la sección rectangular mostrada en la Fig. 25a. Se calculan los radios de giro asociados a los ejes *y*-*y* y *z*-*z*. Entonces, $\rho_z^2 = I_z / A = I_{11} / A = h^2/12$ y $\rho_y^2 = I_y / A = I_{22} / A = b^2/12$.

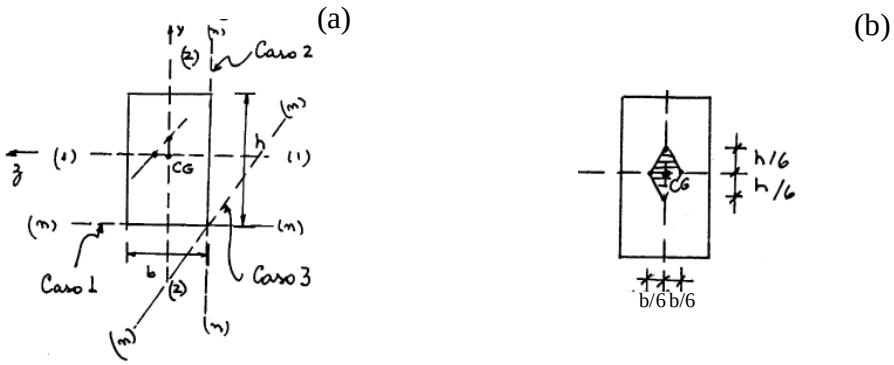


Fig. 25. Núcleo central de una sección convexa (rectangular)

Para determinar el núcleo central de la sección rectangular mostrada en la Fig. 25a, se utiliza la Ec. (43) considerando que el eje neutro se ubica en el contorno de la sección.

<u>Caso 1</u>: Centro de solicitación ubicado en cuadrante tal que $z_0 = 0$, $y_0 > 0$.

Debido a la excentricidad de la carga axial *P*, se genera un momento flector $M_z = Py_0$. Debido a este momento flector las fibras más solicitadas a la tracción son las fibras inferiores ($y = -h/2$). Imponer en la Ec. (43) la condición de $z_0 = 0$ e $y = -h/2$, lo que resulta en un valor de $y_0 = h/6$.

Caso 2: Centro de solicitación ubicado en cuadrante tal que $y_0 = 0$, $z_0 > 0$.

Debido a la excentricidad de la carga axial *P*, se genera un momento flector $M_y = Pz_0$. Debido a este momento flector las fibras más solicitadas a la tracción son las fibras ubicadas en las coordenada ($z = -b/2$, y). De manera similar al caso anterior, se impone en la Ec. (43) la condición de $y_0 = 0$ y $z = -b/2$, lo que resulta en un valor de $z_0 = b/6$.

Caso 3: Centro de solicitación ubicado en cuadrante tal que $y_0, z_0 > 0$.

Debido a la excentricidad de la carga axial *P*, se genera una flexión biaxial tal que $M_y = Pz_0$ y $M_z = Py_0$. Debido a la acción de la flexión biaxial, el punto más solicitado a la tracción es el ubicado en las coordenadas ($z = -b/2$, $y = -h/2$). Utilizando la Ec. (43) para este punto, se obtiene la siguiente expresión

$$\left(1 - \frac{y_0}{h/6} - \frac{z_0}{b/6}\right) = 0 \tag{44a}$$

$$\left(1 - \frac{6y_0}{h} - \frac{6z_0}{b}\right) = 0 \tag{44b}$$

La Ec. (44b) es la ecuación de la recta que intersecta los ejes *z* e *y* en los puntos ($b/6$, 0) y ((0, $h/6$). Cualquier centro de solicitación ubicado sobre la recta definida por la Ec. (44b), genera que el punto de coordenadas ($z = -b/2$, $y = -h/2$) tenga tensiones cero (eje neutro).

De forma análoga al Caso 3, se puede asumir que el centro de solicitación se ubica en alguno de los tres cuadrantes del plano *zy* mostrado e la Fig. 25a. Para cada una de estas suposiciones, se encuentra una ecuación similar a la Ec. (44b), que indica la ubicación del centro de solicitación tal que el eje neutro coincide con un contorno de la sección o que contenga al menos un punto de éste.

Realizando el procedimiento anteriormente descrito, se concluye que el núcleo central de una sección rectangular de dimensiones $b \times h$ es igual al mostrado en la Fig. 25b.

b. Sección transversal cóncava: sección canal y sección T

Para trazar el núcleo central de este tipo de sección (Fig. 26), ésta es modificada transformándola en una sección convexa. Esta modificación, sólo se limita a eliminar la parte entrante de la sección convexa original, trazando una recta tangente t_1, tal como se muestra en la Fig 26a.

Trabajando en la sección modificada, se comprueba que el núcleo de la sección original tiene tantos lados como vértices tiene la sección modificada y tantos vértices como lados tiene la sección modificada (Fig. 26b).

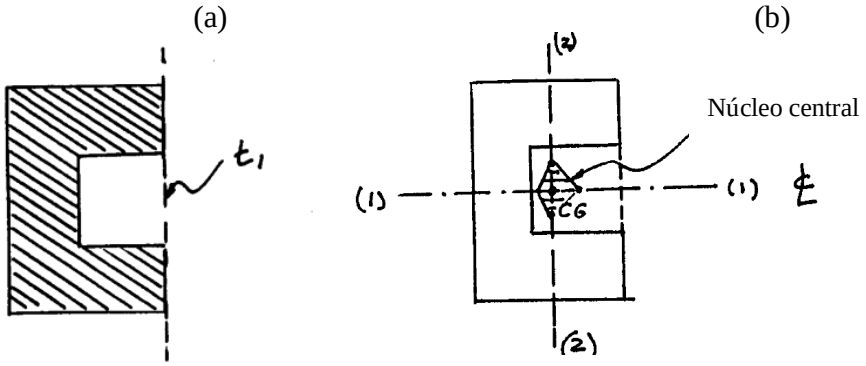
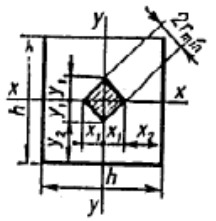
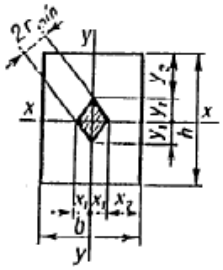
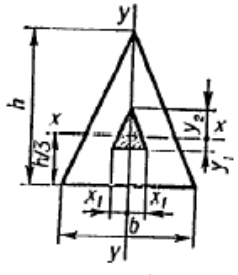
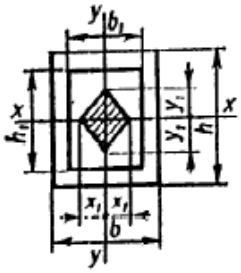
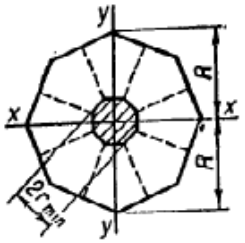
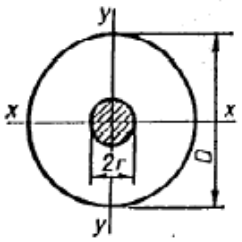


Fig. 26. Núcleo central de una sección cóncava (canal)

En la tabla adjunta se entrega la forma y dimensiones del núcleo central de algunas secciones transversales.

Forma y dimensiones del núcleo central de la sección

Sección transversal; núcleo central de la sección (sombreado)	Dimensiones del núcleo central de la sección
Cuadrado  El núcleo central es un cuadrado	$x_1 = y_1 = \frac{h}{6}$; $x_2 = y_2 = \frac{h}{3}$; $r_{min} = 0{,}0589\,h$
Rectángulo  El núcleo central es un rombo	$x_1 = \frac{b}{6}$; $y_1 = \frac{h}{6}$; $x_2 = \frac{b}{3}$; $y_2 = \frac{h}{3}$; $r_{min} = \frac{bh}{6\sqrt{b^2 + h^2}}$
Triángulo isósceles  El núcleo central es semejante a la sección transversal	$x_1 = \frac{b}{8}$; $y_1 = \frac{h}{12}$; $y_2 = \frac{h}{6}$. Cuando $h = \frac{\sqrt{3}}{2}\,b$ (triángulo equilátero) $x_1 = \frac{b}{8}$; $y_1 = \frac{\sqrt{3}}{24}\,b$; $y_2 = \frac{\sqrt{3}}{12}\,b$

Sección transversal; núcleo central de la sección (sombreado)	Dimensiones del núcleo central de la sección
Rectángulo hueco  **El núcleo central es un rombo**	$$x_1 = \frac{1}{6}\,\frac{hb^2 - h_1 b_1^2}{b(bh - b_1 h_1)}\,;$$ $$y_1 = \frac{1}{6}\,\frac{bh^2 - b_1 h_1^2}{h(bh - b_1 h_1)}\,.$$ **Cuando** $h = b$ **y** $h_1 = b_1$ **(cuadrado hueco)** $$r_{min} = 0{,}0589\,h\left[1 + \left(\frac{h_1}{h}\right)^2\right]$$
Octágono  El núcleo central es un octágono	$$r_{min} = 0{,}2256\,R$$ Si el octágono es hueco (radio de la circunferencia circunscrita exterior es R_2, de la interior, R_1; el espesor de la pared es igual a $0{,}924(R_2 - R_1)$), se tiene $$r_{min} = 0{,}2256 R_2\left[1 + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\right]$$
Círculo  El núcleo central es un círculo	$$r = \frac{D}{8}$$