## 5. Elementos Compuestos de Materiales Diferentes

Considérese un elemento compuesto por dos o más materiales (elemento de sección transversal no homogénea), y supóngase que este elemento se somete a la acción de una fuerza axial producida ya sea por la aplicación de una carga externa o por restricciones térmicas longitudinales internas.

Por ejemplo, considérese la barra de la Fig. 12 compuesta de un núcleo cuadrado de material 2 adherido a un tubo cuadrado de material 1.

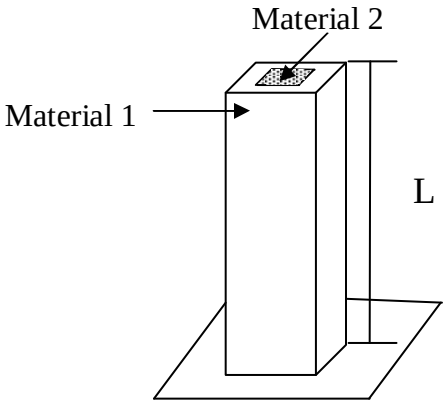


**Fig. 12. Barra compuesta de dos materiales**

Se supone que las secciones planas permanecen planas durante la acción de la carga (Hipótesis de Bernoulli). Esta hipótesis conduce a establecer que las deformaciones unitarias longitudinales de los dos materiales son iguales. Entonces,

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \tag{8}$$

Suponiendo un comportamiento elástico-lineal (ley de Hooke) para ambos materiales, se tiene

$$\frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma_2}{E_2} \quad \text{o} \quad \sigma_1 = \frac{E_1}{E_2}\sigma_2 \tag{9}$$

Además, por definición de tensión normal se tiene que $\sigma_k = P_k/A_k$ ($k$ = 1,2), expresiones que al sustituirlas en la Ec. (9), se obtiene

$$P_1 = \frac{E_1 A_1}{E_2 A_2} P_2 \tag{10}$$

Introduciendo la variable $n$, definida como la razón de los módulos de Young de ambos materiales, i.e., $n = E_1/E_2$, se obtiene

$$\sigma_1 = n\sigma_2 \quad \text{y} \quad P_1 = n\frac{A_1}{A_2} P_2 \tag{11}$$

Las ecuaciones deformación anteriormente deducidas más las ecuaciones del equilibrio estático, se necesitan para el análisis de barras formadas por dos o más materiales.

De forma más general, este problema puede tratarse analizando un elemento de sección transversal no homogénea, en que el elemento está formado por $m$ materiales diferentes. De este manera, la ecuación de equilibrio en la dirección longitudinal dada por la Ec. (4), puede rescribirse como

$$N(x) = \int_{A_i} (\sigma_x)_1 dA_1 + \int_{A_2} (\sigma_x)_s dA_2 + \cdots = \sum_k \int_{A_k} (\sigma_x)_k dA_k \tag{12}$$

Considerando la relación lineal tensión-deformación y aceptando la hipótesis de Bernoulli ($(\varepsilon_x)_k = \varepsilon_x$), la Ec. (12) puede rescribirse como

$$N(x) = \sum_k \int_{A_k} (E\varepsilon_x)_k dA_k = \varepsilon_x \sum_k \int_{A_k} E_k dA_k \tag{13}$$

El valor del módulo de Young $E_k$ es constante para el material $k$, entonces

$$N(x) = \varepsilon_x \sum_k A_k E_k \tag{14}$$

Entonces, la deformación axial unitaria de la sección y la tensión normal de cada material *k*, pueden expresarse como

$$\varepsilon_x = \frac{N(x)}{\sum_k A_k E_k} \tag{15}$$

$$(\sigma_x)_k = E_k (\varepsilon_x)_k = E_k \varepsilon_x = \frac{N(x)}{\sum_j \frac{A_j E_j}{E_k}} \tag{16}$$

El denominador de la ecuación anterior es un **<u>área</u>** y se conoce como el **<u>área de la sección transformada</u>**. En este caso, la sección transversal ha sido transformada al material con las propiedades del material *k*.

El concepto de área de la sección transformada permite analizar una sección transversal no homogénea como una sección homogénea equivalente, resultando que la tensión normal en el material al cual se ha hecho equivalente (*k*) está dada por la Ec. (16). En los puntos ubicados en los otros materiales que forman la sección, la tensión normal está dada por

$$(\sigma_x)_i = \left(\frac{E_i}{E_k}\right)(\sigma_x)_k \tag{17}$$

La relación $E_i/E_k$ se conoce como **<u>relación modular</u>**, y representa el valor *n* en la Ec. (11).

**Ejemplo**: Considérese la columna cuadrada corta de hormigón reforzado que se muestra en la Fig. 13. La columna está reforzada con ocho varillas de acero de 30 mm de diámetro y cargada con una fuerza axial externa de 1500 KN. Si $E_{ac} = 200 \cdot 10^3$ MPa y $E_c = 25 \cdot 10^3$ MPa.

(a) Cuáles son las tensiones en el hormigón y acero?

(b) Cuánto se acorta la columna?

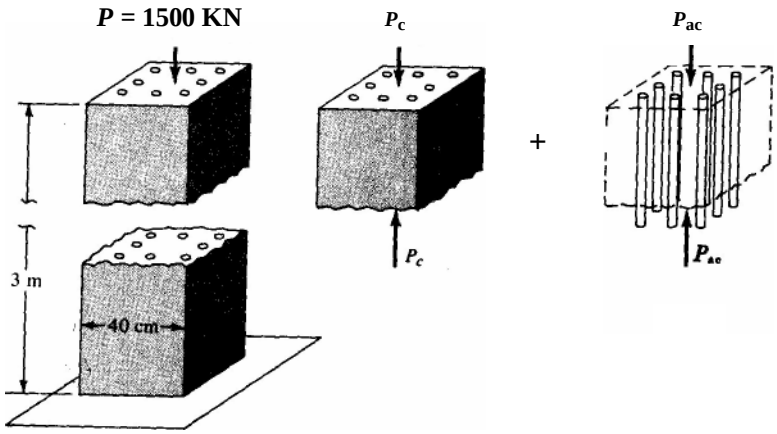


**Fig. 13. Columna de hormigón armado cargada axialmente.**

## 6. Deformaciones Plásticas

Los resultados obtenidos en las secciones precedentes están basados en la hipótesis de que existe una **relación tensión – deformación lineal**. En otras palabras, se asumió que el límite de proporcionalidad del material nunca fue excedido. Esta es una hipótesis razonable para el caso de materiales frágiles, quienes fallan sin llegar a la fluencia (aumento brusco de la deformación unitaria con un valor constante de la tensión). Sin embargo, en al caso de los materiales dúctiles, esta hipótesis implica que la tensión de fluencia del material no es excedida. Por lo tanto, las deformaciones permanecen en el rango elástico y el elemento estructural en estudio recupera su forma original una vez que las cargas son removidas. Si, por otra parte, las tensiones en cualquier zona del elemento estructural exceden la tensión de fluencia del material, éste

presenta deformaciones plásticas por lo que un análisis más detallado, basado en una **relación tensión – deformación no lineal**, es requerido.

Para introducir el concepto de compartimiento plástico de un material, considerar la relación tensión – deformación idealizada de un material elasto-plástico, que consiste en dos segmentos rectos tal como lo muestra la Fig. 14. De la figura se deduce que si la tensión $\sigma$ es menor que la tensión de fluencia $\sigma_Y$, el material se comporta elásticamente obedeciendo la ley de Hooke, $\sigma = E\varepsilon$. Cuando el valor de $\sigma$ alcanza el valor de $\sigma_Y$, el material comienza a fluir y se sigue deformando en forma plástica bajo carga constante. Si la carga es removida, el material se descarga a lo largo de la línea CD, línea paralela al segmento inicial AY de la curva de carga. El segmento AD representa la deformación permanente o deformación plástica del elemento en estudio, que resulta luego de someter a este elemento a un ciclo de carga-descarga.

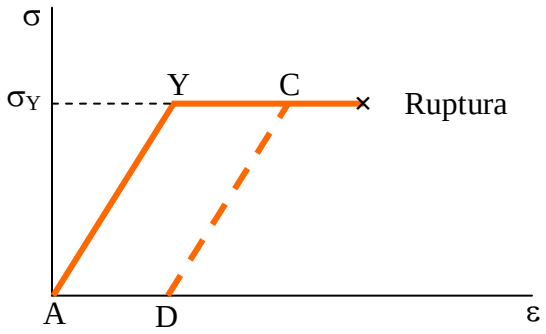


**Fig.14. Relación tensión – deformación para un material elasto-plástico.**

**Ejemplo:** Un cilindro de 30 in de longitud y sección transversal $A_r = 0.075$ in$^2$ es puesto dentro de un tubo de la misma longitud y sección transversal $A_t = 0.1$ in$^2$. Uno de los extremos del cilindro y del tubo son unidos a una placa rígida y los otros extremos son unidos a un apoyo rígido (Fig. 15). El cilindro y el tubo se consideran con comportamiento elasto-plástico, con módulos de elasticidad iguales a $E_r = 30\times10^6$ psi y $E_t = 15\times10^6$ psi, y tensiones de fluencia iguales a $(\sigma_r)_Y = 36$ ksi y $(\sigma_t)_Y = 45$ ksi. Dibujar

la curva carga-desplazamiento del sistema tubo-cilindro que resulta al aplicar una carga **P** a la placa rígida.

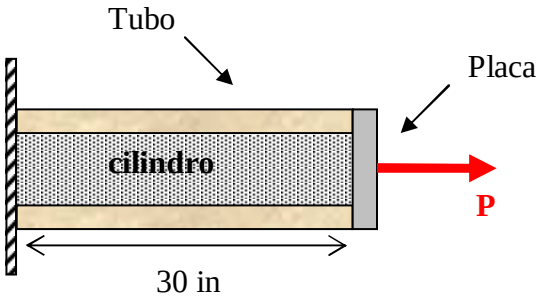


**Fig. 15. Sistema tubo-cilindro con comportamiento elasto-plástico cargado axialmente**

## 7. Energía de Deformación: Efecto de Carga Axial

Considerar un elemento prismático de sección transversal A y longitud L que está siendo sometido a una carga *P* axial (Fig. 16a). El trabajo *dU* realizado por la carga *P* al tiempo que el elemento se deforma en una cantidad infinitesimal *dx*, puede ser evaluado mediante la expresión

$$dU = Pdx \tag{18}$$

Notar que la expresión obtenida es igual al área de ancho *dx* ubicada bajo la curva carga-deformación. El trabajo total U realizado por la carga *P*, considerando una deformación $x_1$ del elemento, está dado por (Fig. 16b)

$$U = \int_0^{x_1} Pdx \tag{19}$$

que es igual al área bajo la curva carga-deformación entre los puntos $x = 0$ y $x = x_1$.

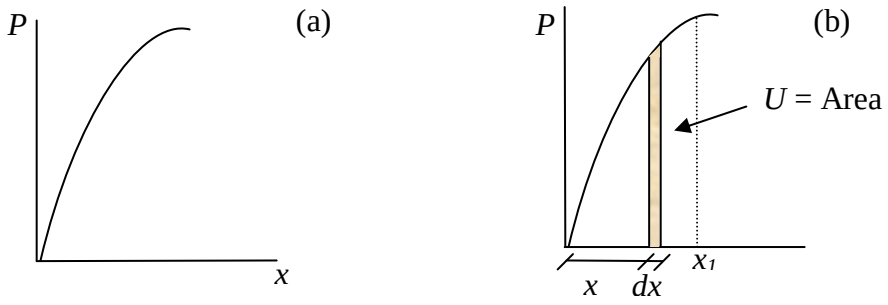


**Fig. 16. (a) Curva carga-deformación; (b) definición de energía de deformación interna**

El trabajo realizado por la carga P, que es aplicada en forma gradual, induce a un aumento de la energía interna asociada a la deformación del elemento. Esta energía interna se conoce como **energía de deformación**. Por definición, la energía interna se denomina por la variable U y está dada por la Ec. (19).

La energía de deformación U definida por la Ec. (19), depende de las dimensiones del elemento en estudio. De manera de eliminar la dependencia en el tamaño del elemento y focalizar el estudio en las propiedades del material, se define la densidad de energía de deformación $U_v$ en un elemento diferencial como la energía de deformación $dU$ de elemento diferencial por unidad de volumen $dV$. De esta forma se tiene,

$$U_v = \frac{dU}{dV} = \int_0^{x_1} \frac{dPdx}{dAdL} = \int_0^{\varepsilon_1} \sigma_x d\varepsilon_x \qquad (20)$$

Si la tensión $\sigma_x$ permanece dentro del límite proporcional del material, la ley de Hooke es válida, por lo que se tiene la relación

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \qquad (21)$$

Reemplazando la Ec. (21) en Ec. (20) se tiene

$$U_v = \int_0^{\varepsilon_1} E\varepsilon_x d\varepsilon_x = \frac{E\varepsilon_1^2}{2} \tag{22}$$

La obtención de una expresión para la energía interna de deformación *U* en función del esfuerzo interno *N* (fuerza axial) puede obtenerse utilizando la Ecs. (20) y (22). Entonces,

$$U = \int_V U_v dV = \int_V \frac{E\varepsilon_1^2}{2} dV = \int_A \int_L \frac{\sigma_1^2}{2E} dx dA = \int_0^L \frac{N^2(x)dx}{2A^2E} \int_A dA \tag{23a}$$

$$U = \int_0^L \frac{N^2(x)dx}{2A(x)E(x)} \tag{23b}$$