

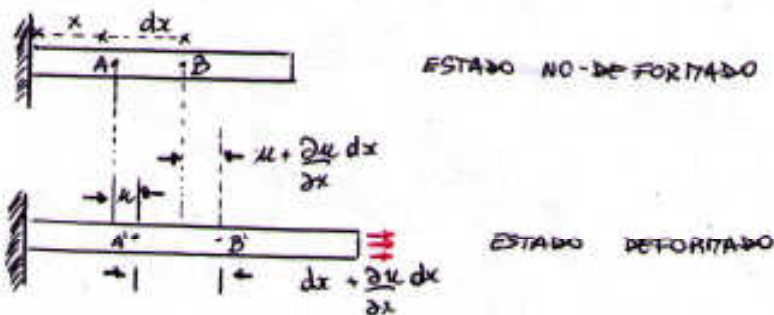
0 Deformación y Desplazamiento

OBJETIVOS:

- DETERMINAR RELACION DEFORMACION - DESPLAZAMIENTO PARA MATERIALES CONTINUOS
- CONSIDERAR DEFORMACIONES INFINITESIMALES
- INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA DEFORMACION (TENSOR)

- RELACIONES DEFORMACION - DESPLAZAMIENTO.

- UN CUERPO O SÓLIDO SE DICE QUE ESTÁ DEFORMADO CUANDO LAS POSICIONES RELATIVAS DE PUNTOS (MATERIAL) DEL SÓLIDO CAMBIAN. ESTO SE CONTRASTA CON EL CASO DE MOVIMIENTO DE CUERPO RÍGIDO EN DONDE LAS POSICIONES RELATIVAS ENTRE PUNTOS DEL SÓLIDO PERMANECEN FIJAS ANTE LA ACCIÓN DE UNA CARGA EXTERNA.
- EL DESPLAZAMIENTO DE UN PUNTO DEL SÓLIDO, SE DEFINE COMO EL VECTOR DISTANCIA ENTRE LA POSICIÓN INICIAL Y FINAL DEL PUNTO
- CONSIDERAR QUE u , v y w SON LAS COMPONENTES DEL VECTOR DESPLAZAMIENTO EN LAS DIRECCIONES x , y , z RESPECTIVAMENTE. SE ASUME UN SISTEMA DE REFERENCIA MUTUAMENTE ORTOGONAL XYZ . POR LO TANTO, UN PUNTO INICIALMENTE SITUADO EN LA POSICIÓN (x, y, z) SEHA DESPLAZADO A LA POSICIÓN $(x+u, y+v, z+w)$. EN GENERAL, u , v y w SON FUNCIONES DE x, y, z .
- CONSIDERAR EL SIGUIENTE MODELO EN UNA DIMENSION



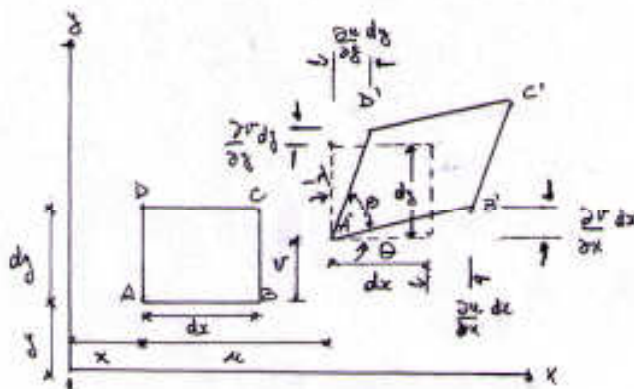
- LOS PUNTOS A, B SE DESPLAZAN A LA POSICIÓN A', B' RESPECTIVAMENTE, ANTE LA ACCIÓN DE FUERZA EXTERNA.
- DEFINIENDO LA DEFORMACIÓN NORMAL E COMO LA VARIACIÓN DE LONGITUD POR UNIDAD DE CARGO, SE TIENE

$$E_x = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

- CONSIDERAR UN CÓRPO EN UN ESTADO PLANO DE DEFORMACIÓN, QUE ES DEFINIDO POR

$$u = u(x, y); \quad v = v(x, y) \quad \text{y} \quad w = 0.$$

EN ESTE CASO PARTICULAR DE ESTADO DE DEFORMACIÓN, LOS PUNTOS DEL CÓRPO EN EL ESTADO NO-DEFORMADO QUE PERTENECEN AL PLANO XY PERTENECEN EN DICHO PLANO EN EL ESTADO DEFORMADO.



- CONSIDERAR EL ELEMENTO INFINITESIMAL ABCD MOSTRADO EN LA FIGURA.
- EL ELEMENTO SE DESPLAZA A SU POSICIÓN FINAL A'B'C'D' (ESTADO DEFORMADO). EN ESTE PROCESO, EXISTE UNA TRASLACIÓN Y DEFORMACIÓN DEL ELEMENTO.
- EXISTEN DOS TIPOS DE DEFORMACIONES
 - (a) CAMBIO DE LONGITUD DE LOS LADOS DEL ELEMENTO
 - (b) EXISTE ROTACIÓN DE LOS LADOS DEL ELEMENTO CON RESPECTO A SU CONFIGURACIÓN INICIAL.

• DEFINICIONES

- 1- DEFORMACIÓN NORMAL (ϵ): CAMBIO DE LONGITUD POR UNIDAD DE LONGITUD DE UN SEGMENTO EN LA DIRECCIÓN QUE ORIGINALMENTE ESTABA ORIENTADO.

LA DEFORMACION NORMAL ES POSITIVA SI EL ELEMENTO AUMENTA EN LONGITUD Y NEGATIVA SI DISMINUYE EN LONGITUD.

2- DEFORMACION POR CORTE (γ): CAMBIO DEL ANGULO RECTO (ORIGEN) ENTRE DOS EJEES. LOS ANGULOS SE MEDEN EN RADIANES.

LA DEFORMACION POR CORTE ES POSITIVA, SI EL ANGULO RECTO ENTRE DOS EJEES CON DIRECCIONES POSITIVAS DISMINUYE.

• BASADO EN LA FIGURA ANTERIORMENTE MOSTRADA, SE TIENE^{QUE} LAS COMPONENTES DE LA DEFORMACION REFERIDAS A LOS EJEES COORDENADOS X E Y SON:

$$\epsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{A'B' - dx}{dx}$$

$$\epsilon_y = \frac{A'D' - AD}{AD} = \frac{A'D' - dy}{dy}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \beta = \theta - \lambda.$$

DONDE EL SIGNO NEGATIVO EN FRENTE DE λ , CONSIDERA EL HECHO QUE LOS ANGULOS CON ROTACION CONTRARIA AL SENO DE LAS MANECILLAS DEL RELOJ SON POSITIVOS.

OBSERVACION:

EN ESTE ESTUDIO, LAS DEFORMACIONES SE CONSIDERAN INFINITESIMALES, LO QUE LIMITA LA GENERALIDAD DE LAS SOLUCIONES ENCONTRADAS. SIN EMBARGO, EXISTE UNA GRAN CANTIDAD DE PROBLEMAS QUE PUEDEN SER TRATADOS CON BASTANTE EXACTITUD USANDO ESTAS RESTRICCIONES (SUPOSICIONES). SI LAS DEFORMACIONES Y DESPLAZAMIENTOS SON RELATIVAMENTE GRANDES, ESTAS SUPOSICIONES NO SON VALIDAS Y LOS COMPONENTES DE LA DEFORMACION DEBEN SER REDEFINIDOS.

• EL PUNTO A TIENE COMO COMPONENTES DE DESPLAZAMIENTO u Y v .
EL PUNTO B SE DESPLAZA EN $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ Y $v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$, YA QUE y ES CONSTANTE A LO LARGO DE LINDA AB.

DE LA GEOMETRÍA DEL ESTADO DEFORMADO SE OBTIENE

$$(A'B')^2 = [dx(1 + \epsilon_x)]^2 = \left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx\right)^2$$

$$1 + 2\epsilon_x + \epsilon_x^2 = 1 + 2\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$$

CONSIDERANDO PEQUEÑAS ^{LAS} DEFORMACIONES Y DERIVADAS DE LAS FUNCIONES DESPLAZAMIENTOS, LOS TÉRMINOS AL CUADRAO SE DESPRECIAN CON RESPECTO AL TÉRMINO LINEAL. ENTONCES,

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

SIMILARMENTE SE OBTIENE

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\tan \theta = \frac{(\partial v / \partial x) dx}{dx + (\partial u / \partial x) dx} \Rightarrow \text{PEQUEÑAS DERIVADAS DE} \Rightarrow \tan \theta \approx \theta$$

LAS FUNCIONES DESPLAZAMIENTOS.

POR LO TANTO, $\theta = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}}$, CONSIDERANDO $1 \gg \frac{\partial u}{\partial x}$

$$\theta = \frac{\partial v}{\partial x}$$

SIMILARMENTE SE OBTIENE

$$\gamma = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\therefore \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

EN EL CASO TRIDIMENSIONAL, DONDE EL ELEMENTO INFINITESIMAL ORIGINAL ES UN PRISMA RECTANGULAR, LOS COMPONENTES DE DEFORMACIÓN SON

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

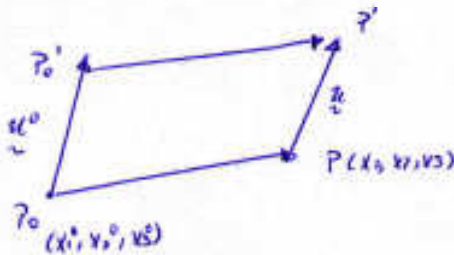
$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

SE OBSERVA QUE:

$$\gamma_{2j} = \gamma_{j2} ; \gamma_{j3} = \gamma_{3j} ; \gamma_{32} = \gamma_{23}$$

LAS EXPRESIONES ANTERIORES SE DENOMINAN RELACIONES DEFORMACION-DESPLAZAMIENTO

CONSIDERAR LOS PUNTOS P_0 y P y P'_0 y P' EN LA CONFIGURACION INICIAL (NO DEFORMADA) Y DEFORMADA, RESPECTIVAMENTE.



CONFIGURACION INICIAL

$$P_0: (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$$

$$P: (x_1, x_2, x_3)$$

CONFIGURACION DEFORMADA

$$P'_0: (x_1^0 + u_1^0, x_2^0 + u_2^0, x_3^0 + u_3^0)$$

$$P': (x_1 + u_1, x_2 + u_2, x_3 + u_3)$$

SE ASUME QUE $(x_i - x_i^0)$ ES INFINITESIMAL, POR LO QUE NUESTRA ATENCION SE CONCENTRA EN EL MATERIAL EN UNA VECINDAD DE P_0 .

SE TIENE QUE EL VECTOR DESPLAZAMIENTO u , ES FUNCION DE LA POSICION DEL PUNTO P .

$$\therefore u_i = u_i(x_1, x_2, x_3) ; i=1, 2, 3$$

SE EXPRESAN LOS COMPONENTES DEL VECTOR u , EN UNA EXPANSION DE TAYLOR,

$$u_i = u_i^0 + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} (x_j - x_j^0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} (x_j - x_j^0)(x_k - x_k^0) + \dots$$

CONSIDERANDO QUE $(x_j - x_j^0)$ ES INFINITESIMAL,

$$u_i \approx u_i^0 + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} (x_j - x_j^0) = u_i^0 + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j ; dx_j = (x_j - x_j^0)$$

$$u_i \approx u_i^0 + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j$$

$$\Rightarrow u = u^0 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot dx$$

EL SEGUNDO TERMINO DE LA EXPRESION ANTERIOR, ES UN PRODUCTO DE UN TENSOR DE SEGUNDO ORDEN Y UN VECTOR

EL TENSOR DE SEGUNDO ORDEN PUEDE SER ESCRITO COMO LA SUMA DE UN TENSOR SIMETRICO Y UNO ANTISIMETRICO:

$$u_i = u_i^0 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)_0 dx_j + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)_0 dx_j$$

SEA

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)_0$$

$$W_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)_0$$

LOS COMPONENTES DE E_{ij} SON:

$$E_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$E_{xy} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] = E_{yx} = \frac{1}{2} \delta_{xy}$$

$$E_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$E_{yz} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right] = E_{zy} = \frac{1}{2} \delta_{yz}$$

CONVENCION

$$\underline{u} = (u, v, w)$$

$$E_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$E_{zx} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right] = E_{xz} = \frac{1}{2} \delta_{zx}$$

Por lo tanto:

$$u_i = u_i^0 + E_{ij} dx_j + W_{ij} dx_j$$

↓
TRANSLACION
ALREDEDOR DE
P₀

↓
MOVIMIENTO
RELATIVO DE P
DEBIDO A LA
DEFORMACION

↓
ROTACION DE
ALREDEDOR DE P₀

E_{ij} SE DENOMINA TENSOR DE DEFORMACIONES Y W_{ij} TENSOR DE ROTACION

EN FORMA MATRICIAL SE TIENE:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ & & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} +$$

GRADIENTE VECTOR
DEPLAZAMIENTO.

SIMETRICO.

E_{ij}

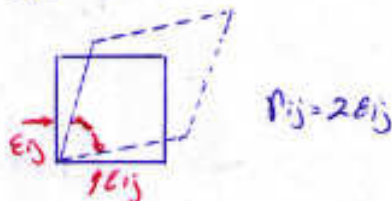
$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \text{Antisimetrico} & & 0 \end{bmatrix}$$

w_{ij}

ENTON DES,

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & 1/2 \delta \alpha_{xy} & 1/2 \delta \alpha_{xz} \\ 1/2 \delta \alpha_{yx} & \epsilon_{yy} & 1/2 \delta \alpha_{yz} \\ 1/2 \delta \alpha_{zx} & 1/2 \delta \alpha_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

$2\epsilon_{ij}$, si ϵ_{ij} , cambio del ángulo ENTRE DOS ELEMENTOS MATERIALES ORIENTADOS EN DIRECCIONES ORTOGONALES, x_i y x_j , ANTES DE LA DEFORMACION



2. DEFORMACION DE VOLUMEN (VOLUMETRICA) Y DEFORMACION DEVIATORICA

DE MANERA SIMILAR A LA UTILIZADA PARA EL ANALISIS DEL TENSOR DE TENSIONES $\underline{\underline{\sigma}}(\sigma_{ij})$, EL TENSOR DE DEFORMACION $\underline{\underline{\epsilon}}(\epsilon_{ij})$ PUEDE DESCOMponERSE EN UNA DEFORMACION DE VOLUMEN $\underline{\underline{\epsilon}}_v$ y UNA DEFORMACION DEVIATORICA $\underline{\underline{\epsilon}}_d(d_{ij})$.

$$\epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \epsilon_p & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_p & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{xx} & d_{xy} & d_{xz} \\ d_{yx} & d_{yy} & d_{yz} \\ d_{zx} & d_{zy} & d_{zz} \end{bmatrix}$$

donde $d_{xx} = \epsilon_{xx} - \epsilon_p$, $d_{yy} = \epsilon_{yy} - \epsilon_p$, $d_{zz} = \epsilon_{zz} - \epsilon_p$

El valor de ϵ_p es el promedio [lineal] de los componentes del tensor de deformaciones que representan los cambios de longitud por unidad de largo

POR LO TANTO,

$$E_v = \frac{1}{3} (E_{xx} + E_{yy} + E_{zz}) = \frac{1}{3} E_{kk} = \frac{1}{3} E$$

ENTONCES,

$$d_v = \frac{1}{3} (d_{xx} + d_{yy} + d_{zz}) = 0$$

∴

$$E_{ij} = E_{ij} = \frac{1}{3} E I_{ij} + d_{ij}$$

$$\rightarrow d_{ij} = -\frac{1}{3} E I_{ij} + E_{ij}$$

$$d_{ij} = -\frac{1}{3} E \delta_{ij} + E_{ij}$$

LA DEFORMACION DE VOLUMEN E_v DESCRIBE SOLO DILATACION (ELONGACION) PURA Y

LA DEFORMACION DEVIATORICA DESCRIBE DISTORSION PURA A VOLUMEN CONSTANTE.