

**Mecánica de Sólidos I - CI32C - Otoño 2008**  
**Auxiliar N°1-C1**  
**Prof. J.F. Beltran M. Aux. H. Ulloa S.**

**Resumen**

La teoría de la elasticidad estudia la mecánica de los cuerpos sólidos, considerados como medios continuos (Las ecuaciones fundamentales de la teoría de la elasticidad fueron establecidas por Cauchy y Poisson en la década de 1820.).

Bajo la acción de fuerzas aplicadas, los sólidos se deforman, o sea, cambian de forma y volumen, en mayor o menor grado. La deformación de un cuerpo se describe analíticamente de la siguiente manera. La posición de cualquier punto del cuerpo queda definida mediante su radio vector  $\mathbf{r}$  (con componentes  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ ) en cierto sistema de coordenadas. En general, cuando el sólido se deforma, cada punto se desplaza. Considerando un punto particular; sea  $\mathbf{r}$  su radio vector antes de la deformación,  $\mathbf{r}'$  (con componentes  $x'_i$ ) después de la misma. El desplazamiento de este punto debido a la deformación está determinado por el vector  $\mathbf{r}' - \mathbf{r}$ , que llamaremos  $\mathbf{u}$ .

En un cuerpo que no se halla deformado, la distribución de las moléculas corresponde a su estado de equilibrio térmico. Todas las partes del cuerpo se hallan en equilibrio mecánico. Esto significa que si consideramos una porción del sólido, la resultante de las fuerzas que sobre ella actúan debidas a todas las demás es cero.

Cuando ocurre una deformación, cambia la distribución de las moléculas y el cuerpo deja de encontrarse en su estado de equilibrio original. Aparecen entonces fuerzas que tienden a llevarlo nuevamente a equilibrio. Estas fuerzas internas que aparecen cuando el cuerpo se deforma se llaman **Tensiones Internas**. Si no hay deformación, no existen tensiones internas.

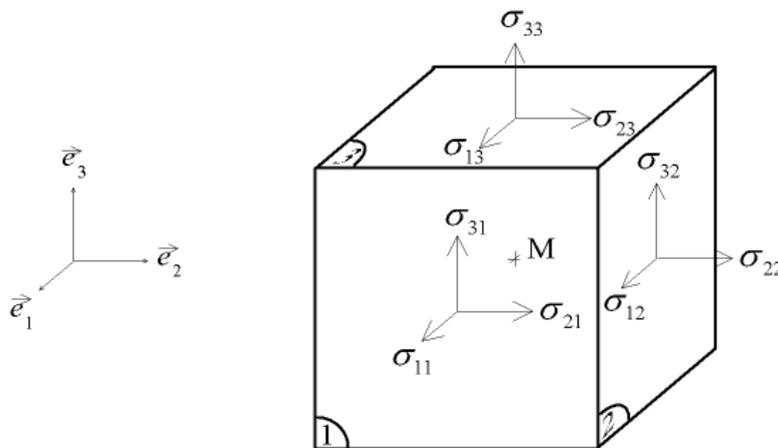
**Tensor de deformaciones.**

El tensor de deformaciones resultante, bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones es el siguiente:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial x_i} \right)$$

**Tensor de Tensiones.**

El tensor de tensiones determina el estado de Stress de un punto en el sólido.



**Fig N°1:** Representación Tensorial de un punto en un sólido.

Su representación matricial es la siguiente:

$$\tilde{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

El tensor de tensiones es simétrico, esto se deriva de aplicar las ecuaciones de equilibrio en la Fig N°1.

### Ley de Hooke

Las ecuaciones que relacionan las tensiones con las deformaciones de un cuerpo se llaman **Ecuaciones Constitutivas**, y dependen de las propiedades del material del medio en estudio.

Leyes Constitutivas Deformación-Esfuerzo (Strain-Stress)

- $\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}))$
- $\epsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}))$
- $\epsilon_{zz} = \frac{1}{E} (\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}))$
- $\gamma_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G}$
- $\gamma_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{G}$
- $\gamma_{zx} = \frac{\sigma_{zx}}{G}$

Leyes Constitutivas Deformación-Esfuerzo (Strain-Stress)

- $\sigma_{xx} = 2G\epsilon_{xx} + \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) - \alpha(3\lambda + 2G)(T - T_0)$
- $\sigma_{yy} = 2G\epsilon_{yy} + \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) - \alpha(3\lambda + 2G)(T - T_0)$
- $\sigma_{zz} = 2G\epsilon_{zz} + \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) - \alpha(3\lambda + 2G)(T - T_0)$
- $\sigma_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}$
- $\sigma_{yz} = G \cdot \gamma_{yz}$
- $\sigma_{xz} = G \cdot \gamma_{xz}$

Donde :  $\lambda = \nu \cdot \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$  ,  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

Variación Volumétrica:  $Tr(\epsilon_{ij}) = \epsilon_{ii}$

### Círculo de Mohr

Es una representación gráficamente de un tensor simétrico (de 2x2 o de 3x3), con el cual se pueden calcular momentos de inercia, deformaciones y tensiones, adaptando los mismos a las características de un círculo (radio, centro, etc). También es posible el cálculo del esfuerzo cortante máximo absoluto y la deformación máxima absoluta.

Elementos del Círculo de Mohr.

$\tau_{max} \leftrightarrow \sigma_{xx} = \sigma_{yy}$  (Estado plano de tensiones)

$\sigma_{max} \leftrightarrow \tau = 0$  (Tensiones principales)

Centro del Circulo:  $\left(\frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2}, 0\right)$ , Radio del Circulo:  $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$ ,  $R = \tau_{max}$

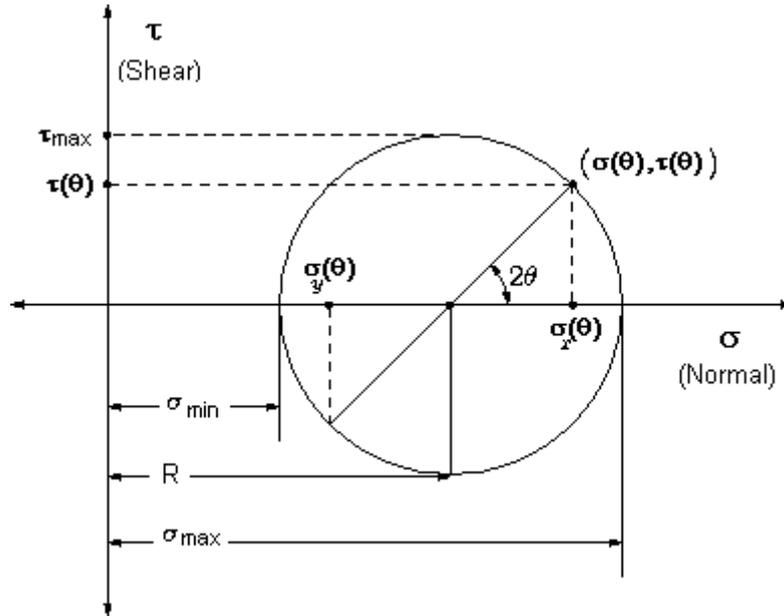


Fig N°2: Círculo de Mohr para estado plano de Tensiones.

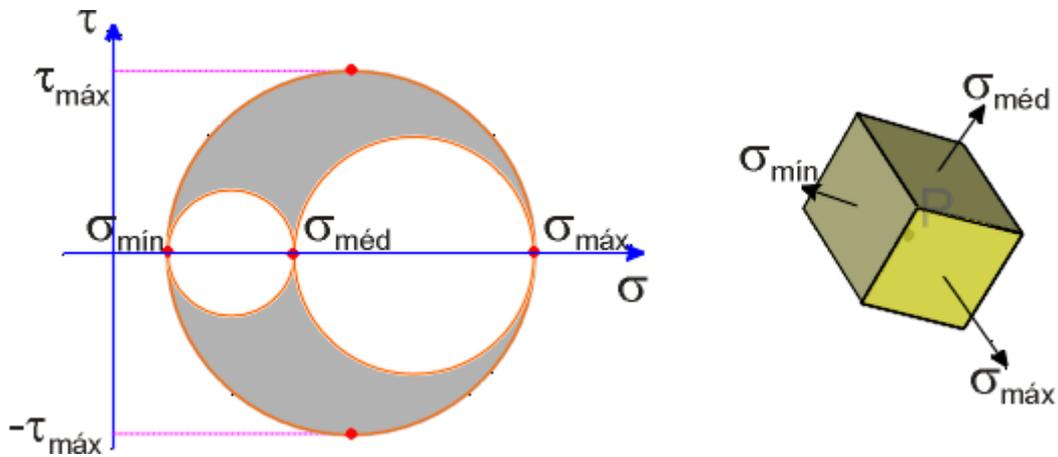


Fig N°3: Círculo de Mohr para estado Tridimensional.

**Transformación de Tensiones y Deformaciones.**

- $\sigma'_{xx} = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2} \cos(2\theta) + \tau_{xy} \sin(2\theta)$
- $\sigma'_{yy} = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} - \frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2} \cos(2\theta) - \tau_{xy} \sin(2\theta)$
- $\tau'_{xy} = \frac{\sigma_{yy}-\sigma_{xx}}{2} \sin(2\theta) + \tau_{xy} \cos(2\theta)$
- $\epsilon'_{xx} = \frac{\epsilon_{xx}+\epsilon_{yy}}{2} + \frac{\epsilon_{xx}-\epsilon_{yy}}{2} \cos(2\theta) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin(2\theta)$
- $\epsilon'_{yy} = \frac{\epsilon_{xx}+\epsilon_{yy}}{2} - \frac{\epsilon_{xx}-\epsilon_{yy}}{2} \cos(2\theta) - \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin(2\theta)$
- $\frac{\gamma'_{xy}}{2} = \frac{\epsilon_{yy}-\epsilon_{xx}}{2} \sin(2\theta) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos(2\theta)$

Orientación de los planos de tensiones normales: máximo y mínimo

$$\frac{d\sigma'_{xx}}{d\theta} = 0 \rightarrow \tan(2\theta) = \frac{2\tau_{xy}}{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})}$$

Orientación de los planos de máxima tensión de Corte

$$\tan(2\theta) = -\frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})}{2\tau_{xy}}$$

**Esfuerzo axial**

$$S = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA}$$

Fuerza normal:  $N = \iint_A \sigma_{xx} dA$ ,  $\sigma = \sigma_{xx} = \frac{N}{A}$  (Principio de Saint Venant)

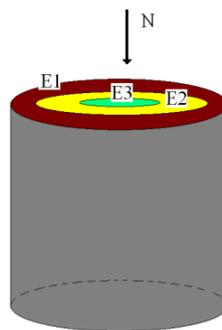
$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \rightarrow \Delta = u(x) - u(x_0) = \int_{x_0}^x \varepsilon_x dx$$

Para materiales lineales y elástico, se cumple la Ley de Hooke:  $\sigma = E\varepsilon$ , luego

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{N(x)}{E(x)A(x)} \rightarrow \Delta = u(x) - u(x_0) = \int_{x_0}^x \frac{N(x)}{E(x)A(x)} dx$$

Para elementos compuestos de  $n$  materiales se debe cumplir compatibilidad de deformaciones si se aplican esfuerzos perpendiculares a una superficie compuesta.

E.g. N°1



**Fig N°4:** Probeta constituida por 3 diferentes materiales.

En este ejemplo se cumple que  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$ , donde  $\varepsilon_i$  es la deformación unitaria axial del elemento  $i$ .

Con esta ecuación se realiza la hipótesis de compatibilidad de deformación de los materiales, luego se obtiene la siguiente relación:

$$\frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma_2}{E_2} = \frac{\sigma_3}{E_3}$$

**Energía de Deformación**

Es el aumento de energía interna acumulado en el interior de un sólido deformable como resultado del trabajo realizado por las fuerzas que provocan la deformación.

$$dU = Pdx \rightarrow U(x) = \int_{x_0}^x Pdx$$

$$\frac{dU}{dV} = \int_{x_0}^x \frac{P}{dAdL} dx = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \sigma_x d\varepsilon_x$$

Pero  $\sigma = E\varepsilon$ , Luego

$$U_V = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} (E\varepsilon_x) d\varepsilon_x = \frac{E\varepsilon^2}{2}$$

$$U = \int_V U_V dV = \int_V \frac{E\varepsilon^2}{2} dV = \int_V \frac{E\varepsilon^2}{2} dAdx = \int_{l_0}^l \frac{N(x)^2}{2A^2E} \left( \int_A dA \right) dx$$

Finalmente

$$U = \int_{l_0}^l \frac{N(x)^2}{2A(x)E(x)} dx$$

Analogía:  $F = k \cdot \Delta \rightarrow k = \frac{AE}{L}$  donde  $\Delta = \varepsilon \cdot L$ , luego Energía de un resorte:  $E_k = \frac{1}{2}k\Delta^2$

**Ejercicios**

**Problema N°1:** Se tiene un elemento rígido con carga  $P$ , sostenido por tres cables de un mismo material lineal-elástico con módulo de elasticidad  $E$ . El cable central tiene un área igual a  $A/2$  y los de los extremos un área igual a  $A$ . Se pide determinar:

- LA distribución de tensiones en cada cable. Dibuje la deformada final del sistema y calcule su energía de deformación.
- La máxima razón  $P/A$ , considerando un  $\tau_{adm} = 1.45 \text{ Tonf/cm}^2$

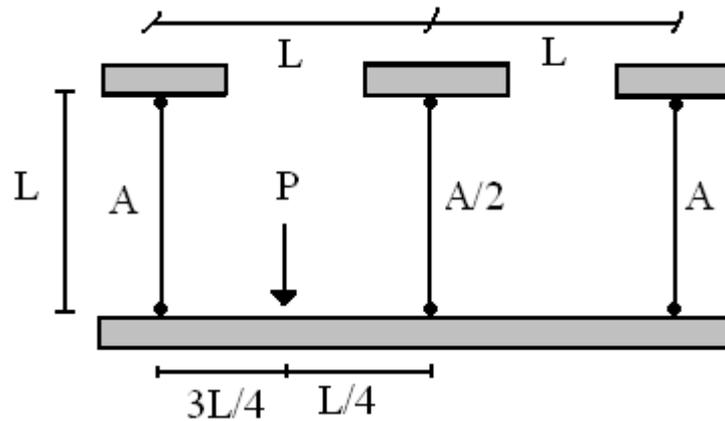


Figura N°1

**Problema N°2:** El pilote de cimentación que se muestra en la Figura N°2 se carga con una fuerza vertical  $P$  que es soportada por una fuerza de rozamiento cuya intensidad varía cuadráticamente en la forma

$$p_x = b \cdot x^2$$

Determinar el acortamiento total del pilote.

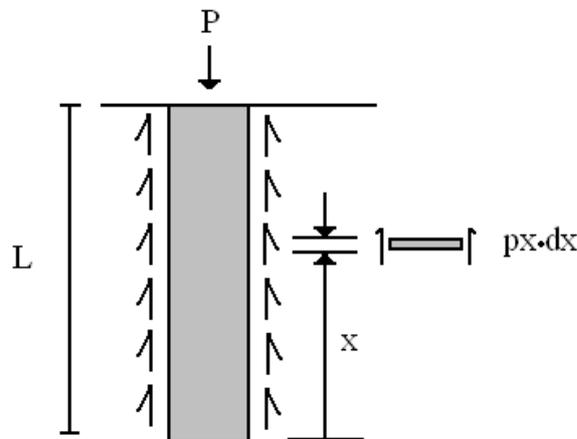


Figura N°2

**Problema N°3:** Para un cuerpo bajo carga axial, se pide expresar la deformación normal  $\varepsilon'$  en una dirección formando un ángulo de  $45^\circ$  con respecto al eje axial de las cargas en términos de la deformación axial  $\varepsilon_x$  (observar Figura N°3), comparando las hipotenusas de el triángulo mostrada en la Figura N°4, la cual representa respectivamente un elemento antes y después de deformarse, usando los valores de las tensiones correspondientes a  $\sigma'$  y  $\sigma_x$  mostrado en la Figura N°3 y la ley generalizada de Hooke obtengan  $\varepsilon' = \varepsilon'(\varepsilon_x)$

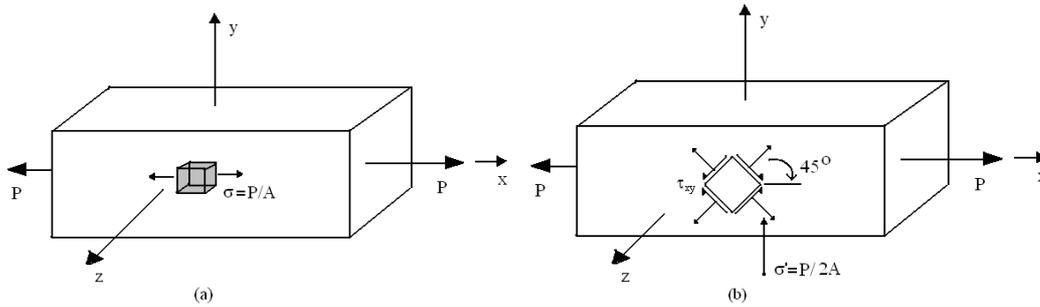


Figura N°3

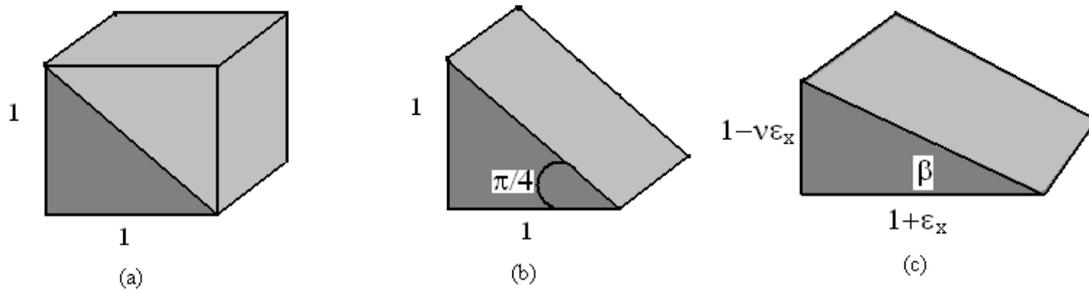


Figura N°4

**Problema N°4 (Propuesto):** Determinar la deformación de una barra (longitud L) vertical y en reposo que esta sometida a un campo gravitacional  $\vec{g}$ .