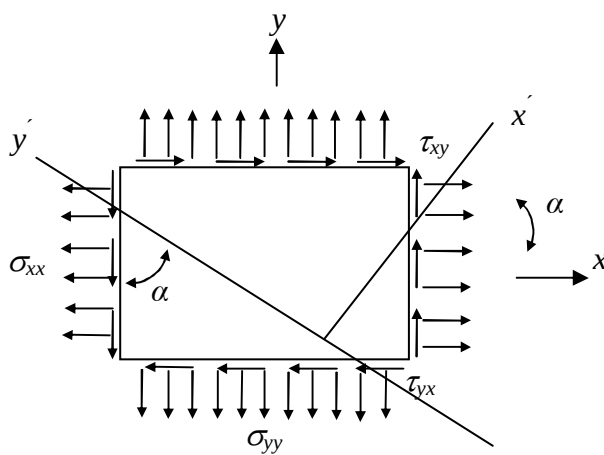


Transformación de Tensiones y Deformaciones

A-Transformación de Tensiones

Si el estado de tensiones en un cuerpo es el mismo en todos sus puntos, se dice que el cuerpo tiene un estado de tensión uniforme.

El objetivo de esta sección es el de derivar expresiones para los componentes del tensor de tensiones que actúan en un plano arbitrario que pasa por el cuerpo o sólido en estudio, si los componentes de del tensor de tensiones referidos al sistema $oxyz$ son conocidos. Para tal efecto, considerar un estado plano o bidimensional de tensiones (Fig. 1)



- Estado plano de tensiones
 $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$
 $\sigma_{zz} = 0$
- Longitud unitaria en la dirección z
- Equilibrio de momento
 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$
- En general, para dos mutuamente perpendiculares
 $\tau_{x'y'} = \tau_{y'x'}$

Fig.1. Estado plano de tensiones

Considerar sumatoria de fuerzas en la dirección x (Fig. 2)

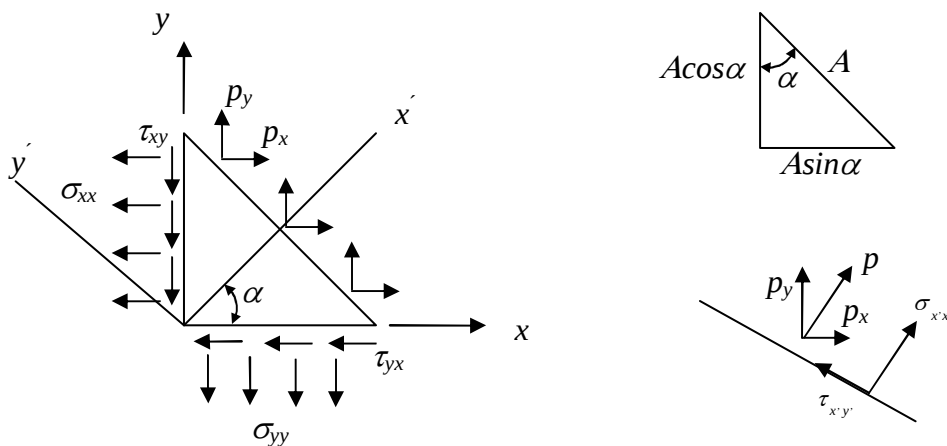


Fig. 2. Equilibrio considerando un plano arbitrario

$$\Sigma F_x = -\sigma_x A \cos \alpha - \tau_{yx} A \sin \alpha + \sigma_{x'} A \cos \alpha - \tau_{x'y'} A \sin \alpha = 0 \quad (1a)$$

$$-\sigma_x A \cos \alpha - \tau_{yx} A \sin \alpha + [\sigma_{x'} \cos \alpha - \tau_{x'y'} \sin \alpha] A = 0 \quad (1b)$$

$$-\sigma_x A \cos \alpha - \tau_{yx} A \sin \alpha + p_x A = 0 \quad (1c)$$

$$p_x = \sigma_x \cos \alpha + \tau_{yx} \sin \alpha \quad (1d)$$

En forma análoga al caso anterior, equilibrio en la dirección y entrega el siguiente resultado

$$p_y = \sigma_y \sin \alpha + \tau_{xy} \cos \alpha \quad (2)$$

El vector de tensión $\sigma_{x'}$ puede encontrarse proyectando las tensiones p_x y p_y en la dirección x' . Para tal efecto, considerar

$$\left. \begin{aligned} p_x \vec{x} + p_y \vec{y} &= \vec{p} \cdot \vec{x'} \\ \sigma_{x'} \vec{x'} + \tau_{x'y'} \vec{y'} &= \vec{p} \cdot \vec{x'} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} p_x \vec{x} \cdot \vec{x'} + p_y \vec{y} \cdot \vec{x'} &= \vec{p} \cdot \vec{x'} \\ \sigma_{x'} &= \vec{p} \cdot \vec{x'} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sigma_{x'} = p_x \cos \alpha + p_y \sin \alpha \quad (3a)$$

Por lo tanto, reemplazando la Ec. 1d en la Ec. 3a se obtiene

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \quad (3b)$$

En forma similar al caso anterior, se puede encontrar una expresión para $\tau_{x'y'}$ en función de σ_x , σ_y , τ_{xy} y el ángulo α .

$$\tau_{x'y'} = -p_x \sin \alpha + p_y \cos \alpha \quad (4a)$$

$$\tau_{x'y'} = \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (\sigma_y - \sigma_x) \sin \alpha \cos \alpha \quad (4b)$$

Para encontrar el valor de la tensión $\sigma_{y'}$, sólo se debe sustituir el valor del ángulo α por $(\alpha + \pi/2)$ en la expresión de $\sigma_{x'}$. Por lo tanto,

$$\sigma_{y'} = \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha - 2\tau_{yx} \sin \alpha \cos \alpha \quad (5)$$

donde las siguientes identidades trigonométricas fueron utilizadas: $\sin(\alpha + \pi/2) = \cos \alpha$ y $\cos(\alpha + \pi/2) = -\sin \alpha$.

Las ecuaciones que entregan los valores de los componentes del tensor de tensiones referidos a un sistema de coordenadas prima son las ecuaciones de transformación de tensiones, conociendo los valores de σ_x , σ_y , τ_{xy} y el ángulo α .

Observación: Notar que $\sigma_x + \sigma_y = \sigma_{x'} + \sigma_{y'} = c$ (constante).

Utilizando las siguientes identidades trigonométricas en las ecuaciones precedentes: $\sin^2 \alpha = 1/2(1 - \cos 2\alpha)$; $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$ y $\cos^2 \alpha = 1/2(1 + \cos 2\alpha)$, las ecuaciones de transformación de tensiones pueden ser escritas como sigue

$$\sigma_{x'} = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad (6a)$$

$$\sigma_{y'} = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) - \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad (6b)$$

$$\tau_{x'y'} = \left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \right) \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \quad (6c)$$

Para obtener los planos en que se producen la máxima y mínima tensión normal, se impone la condición $\frac{d\sigma_{x'}}{d\alpha} = 0 \rightarrow -(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha + 2\tau_{xy} \cos 2\alpha = 0$, lo que implica

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (7)$$

La ecuación anterior tiene dos raíces (2α) que difieren en 180° . Por lo tanto, los valores de α difieren en 90° , lo que implica que los planos donde actúan la máxima y mínima tensión normal son mutuamente perpendiculares.

Observación: Si se impone la condición $\tau_{x'y'} = 0 \Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$, es decir, los planos donde la tensión de corte o tangencial es nula se denominan planos principales.

Para obtener los planos en que se produce la máxima tensión de corte, se impone la condición $\frac{d\tau_{x'y'}}{d\alpha} = 0$, que implica

$$\tan 2\alpha = \frac{-(\sigma_x - \sigma_y)}{2\tau_{xy}} \quad (8)$$

La expresión anterior tiene dos raíces que definen dos planos mutuamente perpendiculares donde las tensiones de corte son iguales.

Se observa que los valores de $\tan 2\alpha$ que determinan los planos de máxima/mínima tensión normal y máxima tensión de corte son recíprocos negativos. Por lo tanto, las raíces de la variable 2α de las dos ecuaciones anteriormente mencionadas (Ecs. 7 y 8) difieren en 90° y los planos correspondientes en 45° (Fig. 3).

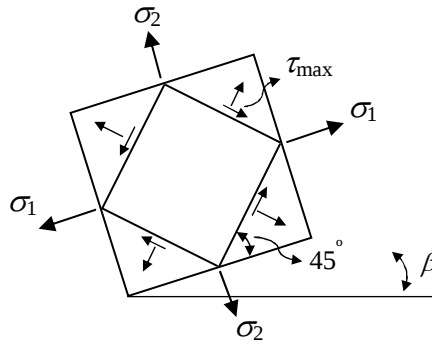


Fig. 3. Planos principales y de máxima tensión de corte

B- Funciones angulares para tensiones principales

La tensión normal máxima (σ_1) y mínima (σ_2) está dada por la geometría presentada en la Fig. 4 (condición de planos principales) y las Ec. 6

$$(\sigma_{x'})_{\max, \min} = \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} \quad (9)$$

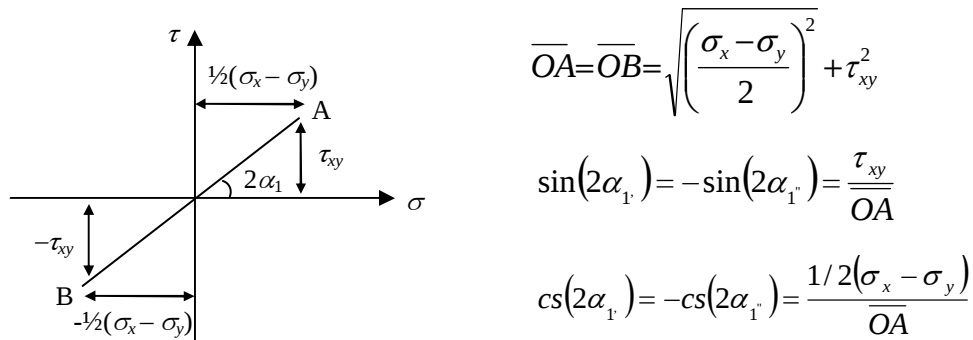


Fig. 4. Tensiones principales

De forma similar se pueden encontrar las funciones angulares para la máxima tensión de corte. La tensión de corte máxima y mínima está dada por

$$(\tau)_{\max, \min} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} \quad (10)$$

La tensión de corte máxima difiere de la tensión de corte mínima sólo en el signo. Como ya fue establecido, estas tensiones “extremas” actúan en planos mutuamente perpendiculares.

C- Interpretación Gráfica de las Ecuaciones de Transformación de Tensiones: Círculo de Mohr

Reescribiendo las ecuaciones de transformación de tensiones, Ec. 6, se obtienen las siguientes expresiones

$$\sigma_{x'} - \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad (11a)$$

$$\tau_{x'y'} = \left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right) \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \quad (11b)$$

Ambas ecuaciones se elevan al cuadrado y luego se suman, resultando la expresión siguiente

$$\left(\sigma_{x'} - \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) \right)^2 + (\tau_{x'y'})^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + (\tau_{xy})^2 \quad (12)$$

En un problema de tensiones dado, las variables σ_x , σ_y y τ_{xy} son conocidas, siendo $\sigma_{x'}$ y $\tau_{x'y'}$ incógnitas. Entonces, la Ec. 12 puede ser reescrita como sigue

$$(\sigma_{x'} - a)^2 + (\tau_{x'y'})^2 = b^2 \quad (13)$$

La Ec. 13 representa la ecuación analítica de un círculo de radio b con centro en $(0, a)$ (Fig. 5).

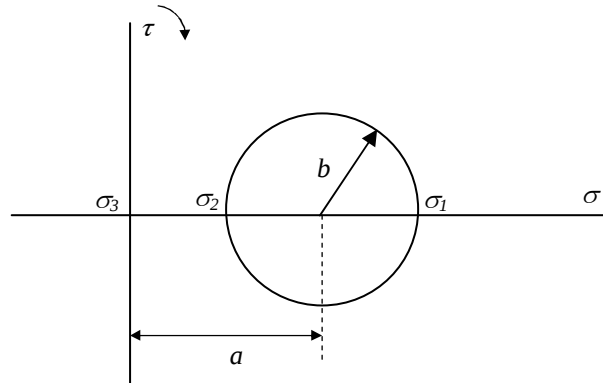


Fig. 5. Círculo de Mohr para un estado de tensiones planas

D- Estado Tridimensional de Tensiones: Círculo de Mohr

Considerar un sólido tridimensional sometido a un estado de tensiones principales, tal como se muestra en la Fig. 6.

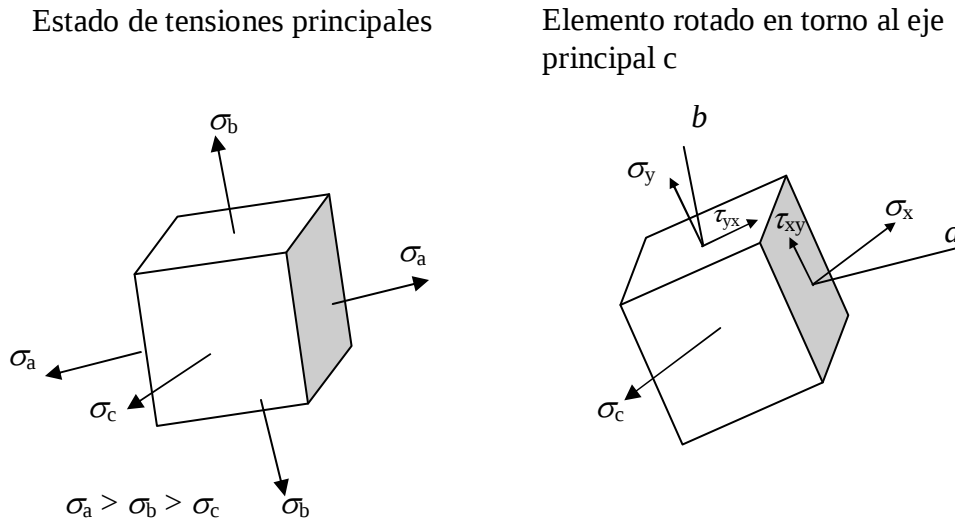


Fig. 6. Estado tridimensional de tensiones

El sólido de la Fig. 6 se rota en torno al eje principal c . Las tensiones de corte asociadas al plano definido por c , siguen siendo cero. La correspondiente transformación de tensiones ocurre en los planos definidos por los vectores a y b . Esta transformación de tensiones puede ser analizada como si fuese una transformación plana de tensiones.

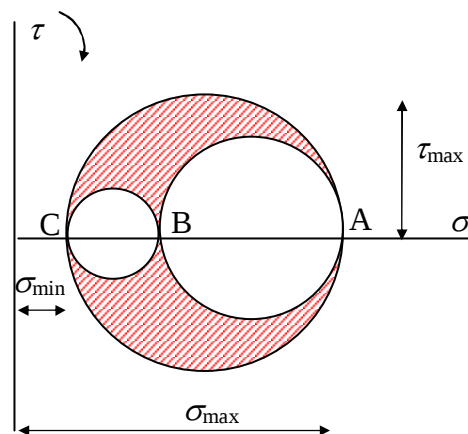


Fig. 7. Representación de un estado tridimensional de tensiones

Comentarios sobre Fig. 7.

- Círculo de diámetro AB determina las tensiones normales y de tangenciales (corte) debido a una rotación en torno al eje c .
- Similarmente, círculos de diámetro CB y CA se usan para obtener las tensiones resultantes (normales y tangenciales) en el sólido debido a rotaciones en torno a los ejes a y b respectivamente.
- El análisis efectuado en base a la Fig. 7, se basa considerando los ejes principales (a , b y c). Cualquier otra transformación inducirá tensiones que se representan en un punto del área achurada.