Elementos Uniaxiales Sometidos a Flexión

1. Introducción

Las vigas son elementos que se cargan predominantemente en flexión. Aunque algunas vigas están sometidas a flexión pura, la mayoría se somete en combinación con cargas cortantes, axiales y de torsión. En la Fig. 1 se presentan ejemplos de los diferentes tipos de carga.

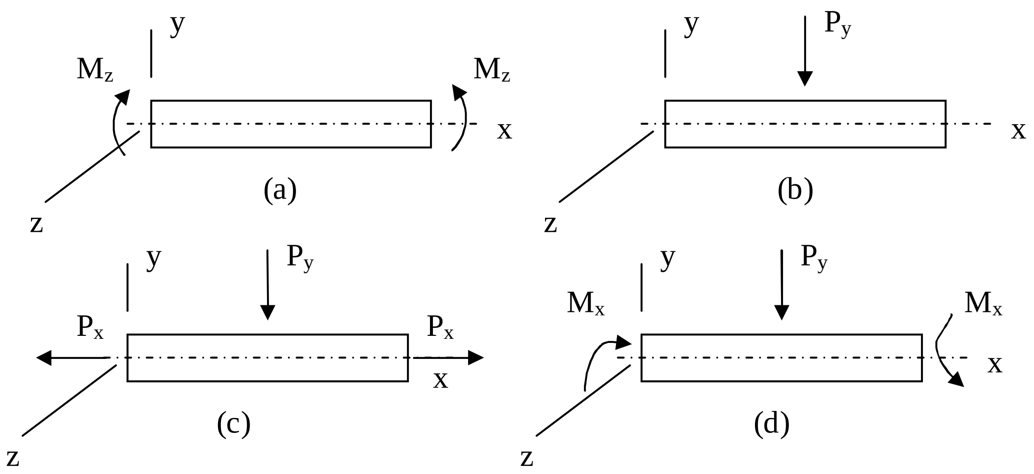


Fig. 1. Diferentes tipos de cargas de vigas. (a) Flexión pura; (b) Corte y flexión; (c) Corte carga axial y flexión; (d) Corte, flexión y torsión.

En el caso de flexión pura (Fig. 1a), la carga externa que actúa sobre el elemento consiste en un momento de flexión. Si la línea que pasa por el centroide de todas las secciones transversales del elemento (eje longitudinal) se escoge como eje x, la flexión puede consistir en un momento M_z con respecto al eje z o un momento M_y con respecto al aje y. Los esfuerzos internos desarrollados también son momentos de flexión. Si se aplica una carga vertical P_y, como se indica en la Fig. 1b, los esfuerzos internos resultantes son fuerzas cortantes internas, V_y y momentos de de flexión M_z. Enunciados similares pueden establecerse para las condiciones de carga mostradas en las Figs. 1c y 1d.

Cuando los elementos sometidos predominantemente a carga axial, es decir, las columnas, se someten también a momentos de flexión, éstos se denominan *vigas columnas*.

2. Hipótesis Básicas

En esta sección se trata la teoría clásica de vigas, tal como se aplica a vigas rectas de sección transversal constante (vigas prismáticas). En esta teoría se supone que los momentos de flexión aplicados, actúan en un plano de simetría, que para propósito de nuestro estudio, se considera vertical, tal como se indica en la Fig. 2a.

2.1 Hipótesis de Deformación y Movimiento

En esta sección se estudian las hipótesis adoptadas que se relacionan con la deformación del elemento-viga. Se asume que el cuerpo se desplaza-deforma de una manera muy particular, hipótesis que debe ser verificada, ya sea por la observación del comportamiento real del elemento o por la evaluación de las consecuencias asociadas al imponer ciertas restricciones con una teoría que no las considera (teoría tridimensional).

2.1.1 Relación entre Deflexiones, Rotaciones y Curvatura

Considerar un elemento prismático sometido a un estado de cargas de flexión pura, cuyo eje vertical de la sección transversal es eje de simetría. La línea o eje que pasa por los centroides (centro de gravedad) de las secciones transversales es considerado como eje del elemento (Fig. 2).

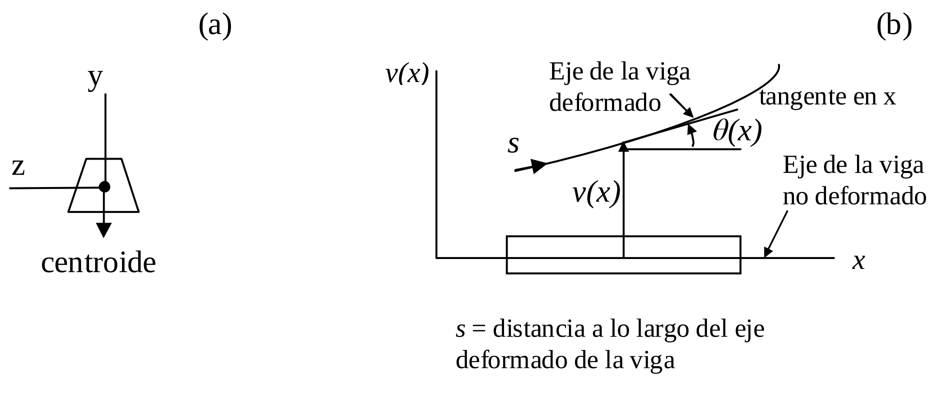


Fig. 2. Relación deflexión-rotación de una viga sometida a flexión

En la Fig. 2b, se tiene que $v(x)$ es la deflexión de la viga en la posición x y $\theta(x)$ es la rotación de la curva tangente al eje de la viga en la posición x (en radianes). De la geometría del eje de la viga deformado, se obtiene

$$\tan(\theta) = \frac{dv(x)}{dx} \approx \theta \qquad (\theta \text{ pequeño}) \tag{1}$$

Considerar una longitud infinitesimal del eje de la viga deformado, tal como se muestra en la Fig. 3.

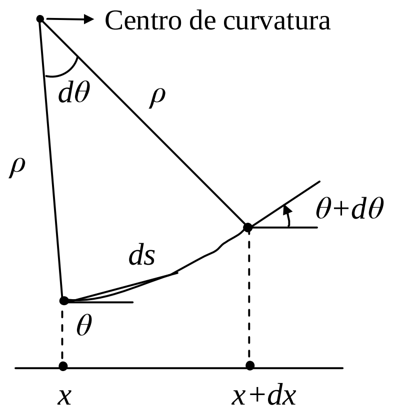


Fig. 3. Longitud infinitesimal de elemento deformado por flexión

De la Fig. 3 se tiene que el radio de curvatura ρ, en cualquier punto del eje de la viga, puede ser interpretado como el radio del círculo que es tangente al eje de la viga deformado en el punto x. De la geometría de la Fig. 3, se tienen las siguientes relaciones

$$ds = \rho d\theta \tag{2a}$$

$$\phi = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} \tag{2b}$$

Para pequeños valores de θ, se cumple $ds = dx$, entonces

$$\phi = \frac{d\theta}{dx} \tag{2c}$$

La variable ϕ, que se denomina curvatura, representa la razón de cambio de la rotación a lo largo de la viga (rad/longitud). Combinando las Ecs. (1) y (2c), se obtiene

$$\phi = \frac{d^2v(x)}{dx^2} \tag{2d}$$

2.1.2 Secciones Planas Permanecen Planas

El elemento sometido a momentos de igual magnitud M_z actuando con respecto al eje z, se flexiona y los planos inicialmente perpendiculares al eje de la viga rotan ligeramente. Sin embargo, las líneas ac y bd al convertirse en a'c' y b'd' respectivamente, permanecen rectas, tal como lo muestran las Figs. 4a y 4b.

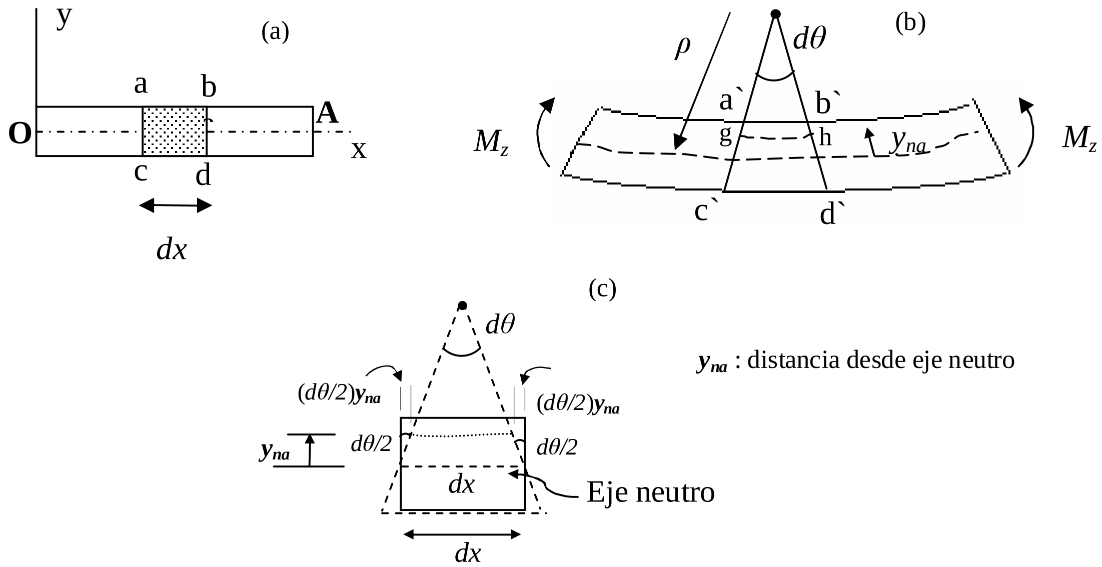


Fig. 4. Elemento sometido a flexión pura

Una sección que es plana y normal al eje de la viga antes de deformarse, permanecerá plana y normal al eje de la viga después que la viga es deformada (Hipótesis de Bernoulli-Euler), tal como se muestra en la Fig. 4c.

La longitud de la fibra gh mostrada en la Fig. 4b, que se localiza sobre un radio ($\rho - y$), puede calculare como:

$$ds' = (\rho - y_{na})d\theta \tag{3a}$$

$$ds' - ds = (\rho - y_{na})d\theta - \rho d\theta \tag{3b}$$

$$du = ds' - ds = -y_{na}\, d\theta \tag{3c}$$

$$\frac{du}{ds} = \frac{-y_{na}\, d\theta}{ds} \tag{3d}$$

Asumiendo que las deformaciones son pequeñas, se tiene que $ds \approx dx$, por lo que Ec. (3d) puede rescribirse como

$$\frac{du}{dx} = \frac{-y_{na}\, d\theta}{dx} = -y_{na}\,\phi \tag{3e}$$

donde el valor de la variable y_{na} se mide desde *el eje neutro*, que es el lugar geométrico de las fibras que componen la sección transversal que no cambian su longitud debido al efecto de la curvatura ϕ. El término du/dx en la Ec. (3e), representa la deformación longitudinal unitaria ε_x, por lo que la relación deformación unitaria-curvatura es de la forma siguiente

$$\varepsilon_x = -y_{na}\,\phi \tag{3f}$$

De la Ec. (3f) se establece que la deformación unitaria longitudinal de un elemento deformado por flexión, **varía linealmente a lo largo de la altura de la sección transversal del elemento**.

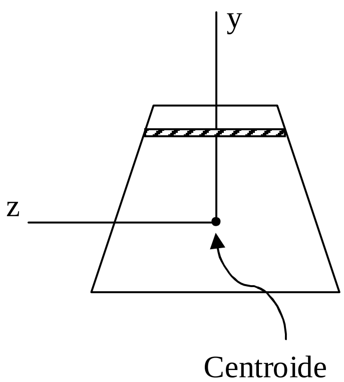
2.2 Ley Constitutiva

Se considera que el material de la viga se comporta linealmente, es decir, las tensiones son directamente proporcionales a las deformaciones unitarias de acuerdo a la Ley de Hooke. De acuerdo a lo deducido en la Sección 2.1, en que se estableció que la deformación normal (longitudinal) unitaria varía linealmente a lo largo de la altura de la sección transversal del elemento, las tensiones normales también varían linealmente con la altura de la sección transversal del elemento.

2.3 Equilibrio

Una viga debe cumplir los mismos requerimientos de equilibrio que cualquier otro cuerpo. El concepto que distingue a una viga de un medio continuo es el *esfuerzo resultante* (elemento uniaxial). El esfuerzo resultante representa el efecto total de todas las tensiones que actúan sobre la sección transversal de la viga.

Considerar la sección transversal de un elemento viga mostrada en la Fig. 5. El eje z es eje principal de inercia, por lo que la tensión normal σ_x es sólo función de la variable y, es decir, para un valor de *y* fijo, el valor de σ_x, en el ancho de la sección, es constante.



Eje z es eje principal de inercia
$\sigma_x = f(y)$; $\sigma_x \neq f(z)$

σ_x es constante en el ancho de la sección

Fig. 5. Sección transversal de un elemento-viga

Por hipótesis se tiene que el elemento-viga sólo está sometido a un par de momentos de flexión, por lo que la carga axial (normal) *P* sobre la sección transversal es cero. El esfuerzo resultante axial *N* y el momento resultante *M*, se calculan como la integral de las tensiones normales y el primer momento de las tensiones normales sobre la sección transversal, respectivamente. De esta manera se tienen las siguientes expresiones

$$N = \int_A \sigma_x dA = P = 0 \tag{4}$$

$$M = -\int_A (\sigma_x dA) y = -\int_A y \sigma_x dA \tag{5}$$

donde *y* se mide desde el centroide de la sección. Para el caso de $P = 0$, la variable *y* puede ser medida desde cualquier eje y el valor correcto del momento de flexión *M* será obtenido. Sin embargo, para el caso en que $P \neq 0$ (carga axial neta diferente de cero en la sección), la variable *y* debe ser medida desde el centroide la sección, cuando se calcula la integral que define el momento de flexión *M* (Ec. (5)).

3. Comportamiento Elástico de la Sección Transversal

Para un elemento-viga con comportamiento lineal del material que lo forma que es sometido a flexión pura, se determinó que tanto las deformaciones normales unitarias como las tensiones normales varían linealmente con la altura o profundidad de la sección transversal del elemento (Secciones 2.1.2 y 2.2, respectivamente). Además, se definió como eje neutro al lugar geométrico de las fibras que no cambian su longitud debido a la curvatura de la sección transversal. Por lo tanto, la distribución de deformaciones unitarias y tensiones normales en la sección transversal de un elemento viga de material homogéneo está representado en la Fig. 6.

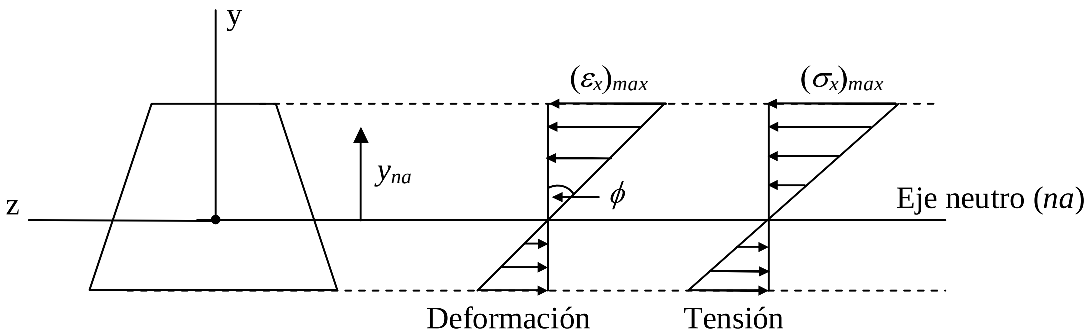


Fig. 6. Distribución de deformaciones y tensiones normales en la sección transversal de una viga debido a un momento flector.

La notación usada en la Fig. 6, se describe a continuación:

y = distancia medida desde el centroide de la sección

y_{na} = distancia medida desde el eje neutro (*na*)

$\varepsilon_x = y_{na}\,\phi$ (secciones permanecen planas)

$\sigma = E\varepsilon$ (material homogéneo y elástico-lineal)

$\sigma = E\,y_{na}\,\phi$

La Ec. (4) plantea que la resultante del esfuerzo axial debe ser cero para el caso de flexión pura. Rescribiendo dicha ecuación se tiene que

$$P = \int_A \sigma_x dA = \int_A \left(E y_{na}\phi\right) dA = E\phi \int_A y_{na} dA = 0 \qquad \text{(6a)}$$

$$\int_A y_{na} dA = 0 \qquad \text{(6b)}$$

La Ec. (6b) se cumple si y sólo si, el eje neutro coincide con el eje del centroide de un elemento de material lineal y homogéneo. **Por lo tanto, el eje neutro se localiza en el centroide de la sección transversal homogénea para el caso del comportamiento elástico. <u>La condición de P = 0 siempre establece la condición para ubicar el eje neutro.</u>** Para el caso de comportamiento elástico, las variables y e y_{na} pueden ser intercambiables.

Para calcular el momento de flexión en una sección del elemento viga material homogéneo y lineal-elástico se utilizan la Ec. (5b) y la notación utilizada en la Fig. 6. Por lo tanto, se obtiene lo siguiente

$$M = -\int_A y\sigma_x dA = \int_A y(Ey\phi)dA = E\phi\int_A y^2 dA \tag{7a}$$

$$I_{zz} = \int_A y^2 dA \tag{7b}$$

donde I_{zz} es el momento de inercia del eje z-z en torno al centroide de la sección transversal. Por lo tanto, la relación entre el momento flector y la curvatura de la sección transversal está dada por

$$M = E\phi I_{zz} \tag{7c}$$

donde M es el momento flector en torno al eje z-z. Combinando las Ecs. (3f) y (7c), se obtiene

$$M = E\phi I_{zz} = E\left(\frac{\varepsilon}{-y}\right)I_{zz} = E\left(\frac{\sigma_x}{-Ey}\right)I_{zz} = -\frac{\sigma_x I_{zz}}{y} \tag{8a}$$

$$\sigma_x = -\frac{M_{zz}y}{I_{zz}} \tag{8b}$$

donde la Ec. (8b) se conoce como **la fórmula de Navier**. Al revisar esta fórmula, se obtiene que las tensiones normales máximas se desarrollan en los puntos más alejados del eje en torno al cual gira la sección transversal.

Si se define $c = |y_{max}|$, la máxima tensión normal está dada por

$$\left|(\sigma_x)_{\max}\right| = \frac{M_{zz}c}{I_{zz}} \tag{9}$$

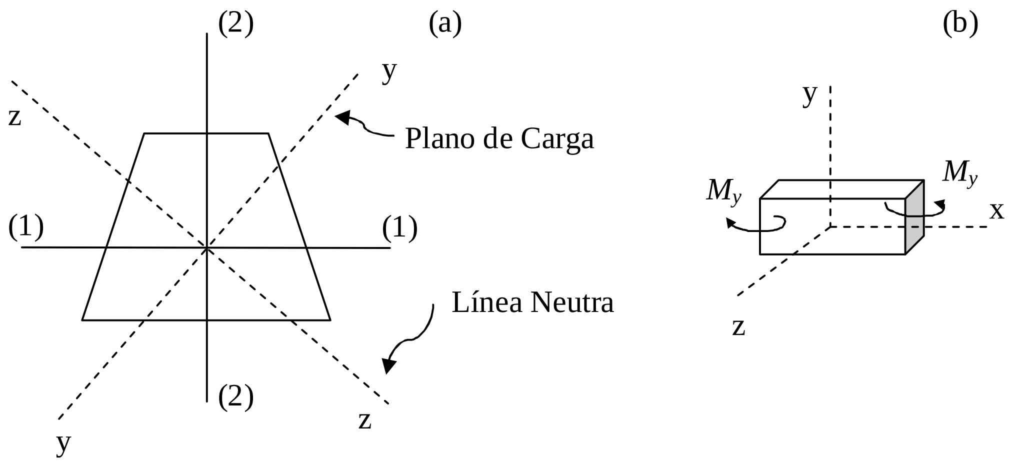
El caso de flexión anteriormente estudiado corresponde al caso de **flexión recta**. Esta flexión se produce cuando el plano de curvatura coincide con el plano de cargas. Se define a la razón $W_z = I_{zz}/y$ como módulo elástico de la sección, entonces

$$\left|(\sigma_x)_{\max}\right| = \frac{M_{zz}}{(W_z)_{\min}} \tag{10}$$

Considerar el caso de una sección transversal arbitraria, tal como lo muestra la Fig. 7a. Aplicando las ecuaciones de la estática en la sección transversal, se pueden obtener expresiones para los momentos de flexión M_y y M_z. De esta manera se obtiene (Fig. 7b)

$$M_y = \int_A z\sigma_x dA \tag{11a}$$

$$M_z = -\int_A y\sigma_x dA \tag{11b}$$



(1)-(1) & (2)-(2): ejes principales de inercia

Fig. 7. (a) Sección transversal arbitraria; (b) Elemento diferencial sometido a flexión pura en torno a eje y-y.

Suponiendo que la flexión se produce en torno al eje z-z (Fig. 7a), la Ec (11) puede rescribirse de la siguiente manera

$$M_y = -\int_A (E\phi y) z dA \tag{12a}$$

$$M_z = \int_A (E\phi y) y dA \tag{12b}$$

En el caso de tener una flexión recta, la distribución de esfuerzos no causa momento en torno al eje *y*, entonces de la Ec. (12a), considerando un material homogéneo, se obtiene

$$M_y = -\int_A (E\phi y) z dA = -E\phi \int_A yz dA = 0 \tag{13a}$$

$$\int_A yz dA = 0 \tag{13b}$$

La Ec. (13b) indica que el producto de inercia con respecto a los ejes *z* e *y* debe ser igual a cero. Esta condición se satisface sólo cuando los ejes *z* e *y* son **ejes principales de inercia.** Por lo tanto, para que se produzca una flexión recta, basta que el plano de cargas contenga a uno de los ejes principales de inercia de la sección transversal.

4. Concentración de Tensiones

La teoría de la flexión desarrollada en las secciones precedentes se aplica sólo a vigas de sección transversal constante, es decir, vigas prismáticas. Si la sección transversal de la viga varía gradualmente, no tiene ninguna desviación significativa del patrón de tensiones visto con anterioridad. Sin embargo, si existen muescas, ranuras, agujeros para pernos o cambios bruscos en la sección transversal, se presentarán **altas tensiones locales**. Esta situación es análoga a la estudiada con anterioridad para miembros cargados axialmente.

Como en los otros casos analizados, sólo las proporciones geométricas del miembro afectan el patrón de las tensiones locales. Además como el interés es por lo general en la tensión máxima, los factores de concentración de tensiones pueden usarse convenientemente. La razón K de la tensión máxima real a la tensión máxima nominal, dada por la Ec. (10), se define como el factor de concentración de tensiones en flexión. Este concepto se ilustra en la Fig. 8.

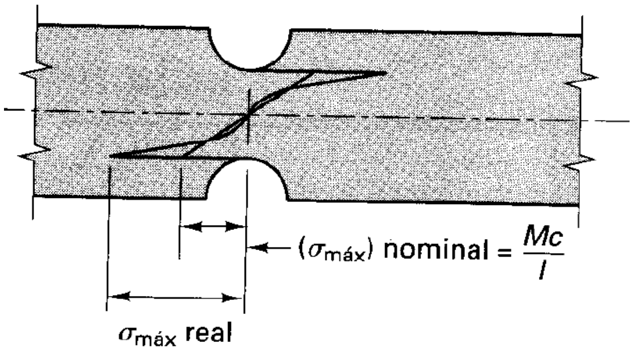


Fig. 8. Significado del factor de concentración de tensiones en flexión.

Por consiguiente, en general

$$\left(\sigma_{\max}\right)_{real} = K\frac{M_{zz}c}{I_{zz}} \tag{14}$$

donde la tensión máxima nominal (Ec. (10)) se calcula para el menor ancho de la barra.

La Fig. 9 muestra gráficas de factores de concentraciones para dos casos representativas. Estos gráficos fueron presentados por Frocht (1935), quien utilizó el método de fotoelasticidad para la obtención de éstos. Un estudio de estas gráficas, indica la conveniencia de usar filetes de buen tamaño para reducir las concentraciones locales de tensiones.

La aplicación de los factores de concentración de tensiones se limita al caso en que el material se comporte elásticamente. El comportamiento inelástico del material tiende a reducir estos factores.

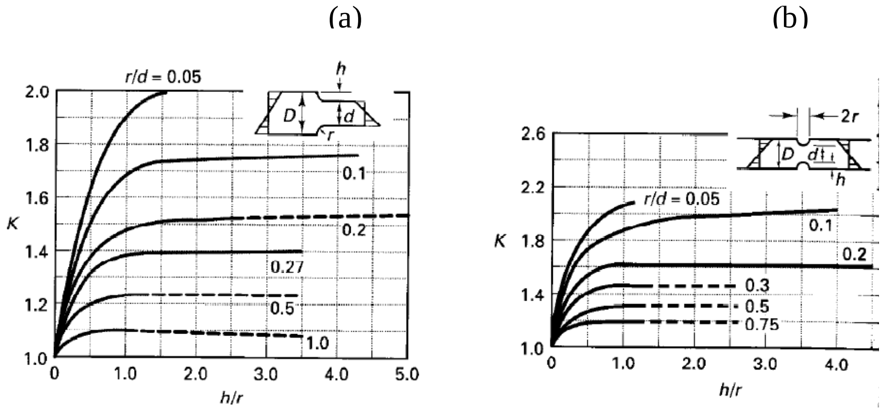


Fig. 9. Factores de concentración de tensiones para: (a) barras planas con diversos filetes; (b) barras planas con ranuras.

5. Energía de Deformación: Efecto Momento Flector

Considerar un sólido tridimensional de material lineal-elástico en estado de equilibrio ante la acción de cargas externas F_i. El sólido puede considerarse como un conjunto de elementos (cubos) infinitesimales sometidos a un estado particular de tensión, tal como se muestra en la Fig. 10.

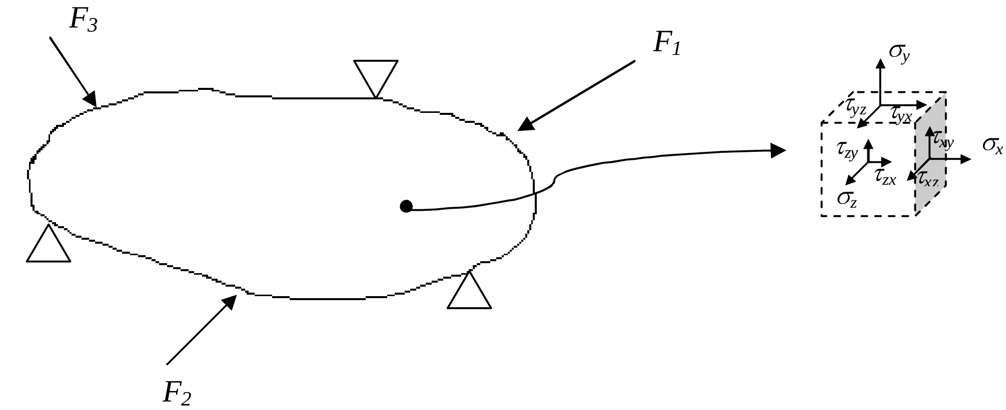


Fig. 10. Sólido deformable en equilibrio

El incremento de la energía de deformación dU para un elemento infinitesimal de volumen dV, puede escribirse de la siguiente forma

$$dU = \frac{1}{2}\left[\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{xz}\gamma_{xz}\right]dV \tag{15}$$

Integrando el incremento de la energía de deformación dU, sobre el volumen del sólido V, se obtiene la energía total de de formación U del sistema. La expresión final de la energía de deformación U del sistema es de la forma

$$U = \int_V \frac{1}{2}\left[\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{xz}\gamma_{xz}\right]dV \tag{16}$$

Para el caso particular de un elemento sometido a flexión en torno al eje z, la tensión normal en un elemento de área dA ubicado a una distancia y del eje neutro está dada por (formula de Navier)

$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} \tag{17}$$

La deformación unitaria asociada a la tensión σ_x está dada por (Ley de Hooke)

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = -\frac{M_z y}{EI_z} \tag{18}$$

Basándose en la Ec. (16) y sólo considerando un elemento sometido a flexión pura, la energía total de deformación U está dada por

$$U = \frac{1}{2}\int_V \frac{M_z^2 y^2}{EI_z^2} dV = \frac{1}{2}\int_l \frac{M_z^2}{EI_z^2} dl \int_A y^2 dA \tag{19a}$$

$$U = \frac{1}{2}\int_{l} \frac{M_z^2}{EI_z} dl \tag{19b}$$