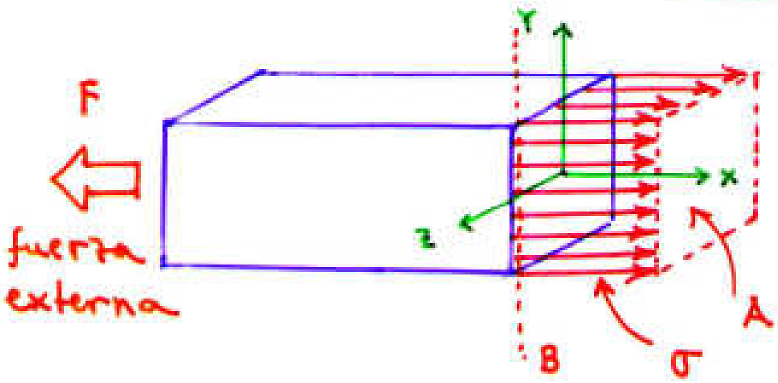
Relación Tensión - Deformación

- Caso uniaxial

$$F = \int_A \sigma \, dA$$

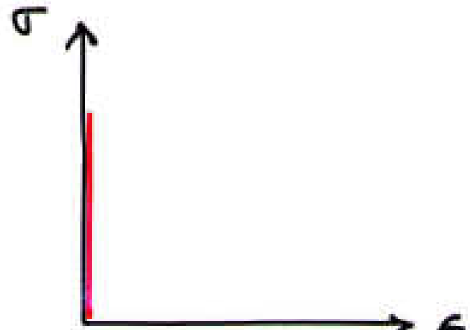
la fuerza interna puede ser expresada como la suma de las tensiones normales por la sección transversal A



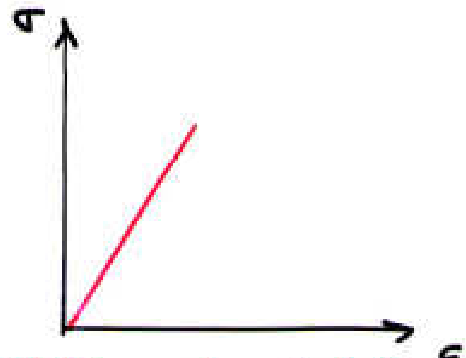
Para el caso axial, con esfuerzo axial "puro", la tensión σ es uniformemente distribuida.

$$\Rightarrow \quad F = \int_A \sigma \, dA = \sigma \int_A dA = \sigma A$$

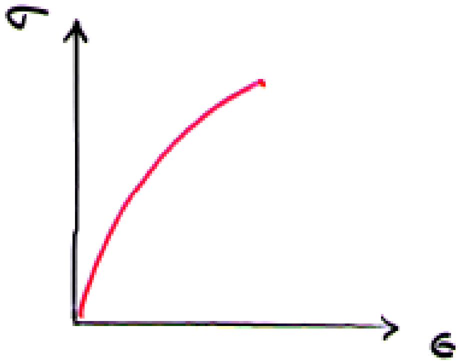
- Tipos comunes de relación tensión-deformació



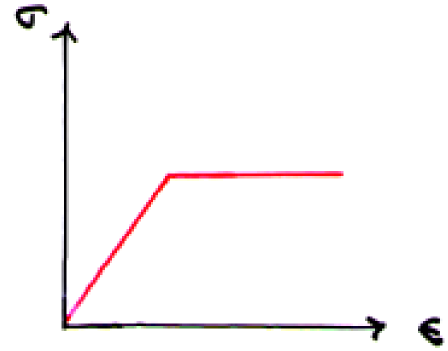
(a) Perfectamente rígido



(b) Lineal elástico

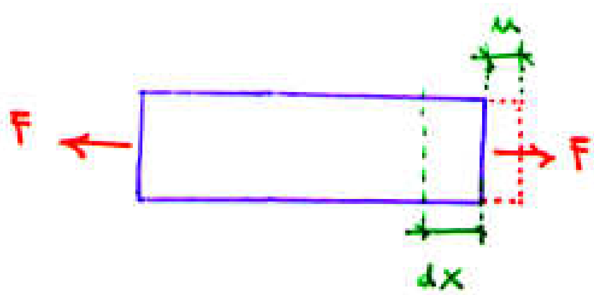


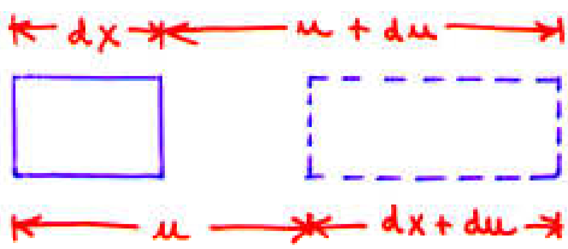
(c) no lineal elástico



(d) Elasto- plástico

- Desplazamiento (u) y deformación (ϵ)



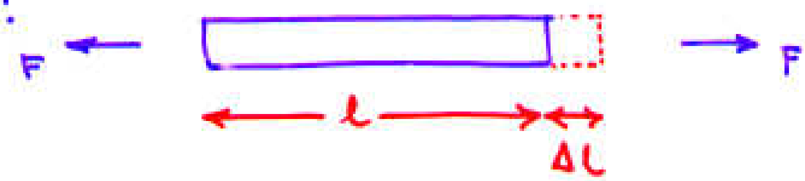


∴ la deformación axial (ϵ), correspondiente a la deformación total del elemento por unidad de largo será:

$$\epsilon = \frac{(dx + du) - dx}{dx} = \frac{du}{dx}$$

Puesto que la deformación ϵ es por unidad de largo, se le suele llamar deformación unitaria.

Ej.:



$$\Rightarrow \quad \epsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell}$$

- Material lineal elástico

$\Rightarrow$ Ley de Hooke : $\quad \sigma = E\,\epsilon$

$E \rightarrow$ módulo de elasticidad

Por lo tanto, para :

- esfuerzo axial puro $\quad F = \sigma A$
- material lineal elástico $\quad \sigma = E\,\epsilon$

y la deformación $\quad \epsilon = \dfrac{du}{dx}$

El desplazamiento u lo podemos escribir para una barra de largo L

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{\frac{F}{A}}{E} = \frac{F}{AE}$$

$$\int_{u_0=0}^{u} du = \int_0^L \epsilon\, dx = \int_0^L \frac{F}{AE}\, dx = \frac{FL}{AE}$$

$$\Rightarrow \quad u = \frac{FL}{AE}$$

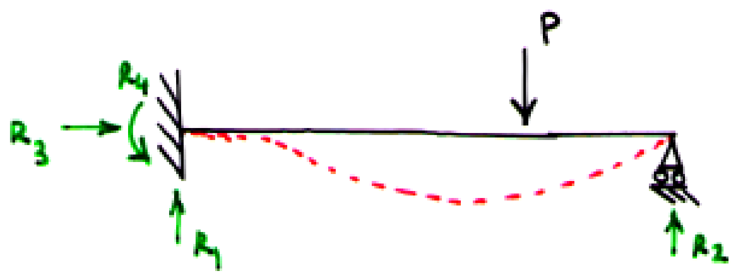
$u_0 = 0$ supone que en el origen de coordenadas el desplazamiento es nulo

Compatibilidad de desplazamiento.

En el análisis de sistemas redundantes, se ha observado que las ecuaciones de equilibrio no son suficientes para determinar las variables desconocidas del sistema.

De esta forma se deben establecer tantas ecuaciones como incógnitas se requieran.

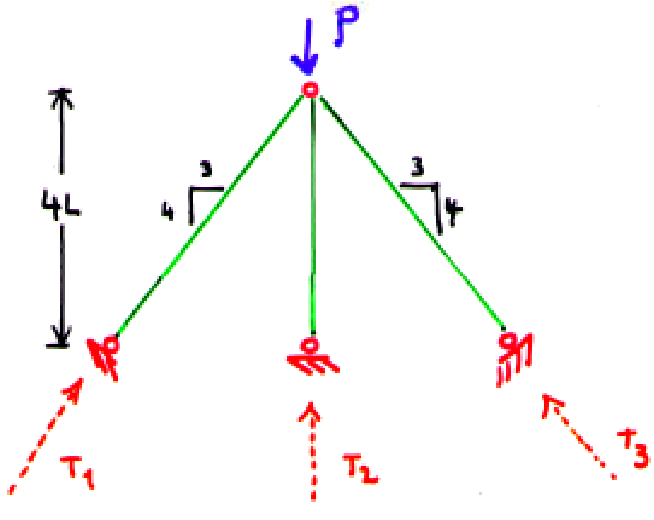
Adicionalmente a las ecuaciones de equilibrio se pueden imponer condiciones de compatibilidad geométrica de los desplazamientos del sistema.



3 ecuaciones
4 incógnitas

$\Rightarrow$ requiere 1 ecuación de compatibilidad.

Ej.: Determinar las reacciones del sistema siguiente.

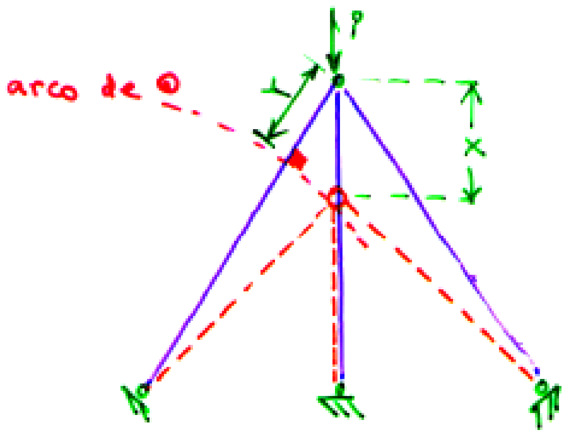


- 3 ecuaciones ($\Sigma M = 0$ no sirve)
  $\Rightarrow$ 2 ecuaciones
- 3 incógnitas

$\therefore$ se requiere 1 ecuación de compatibilidad.

Suponiendo que las tres barras tienen las mismas propiedades. (E y A).

- Considerando el estado deformado.

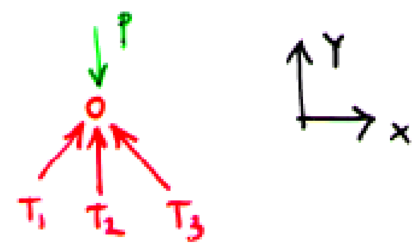


$r = \frac{4}{5}x$

Notas : • se suponen pequeños deformaciones

• el equilibrio corresponde a la situación no deformada.

- Ecuaciones de equilibrio



(1) ΣF_x : $T_1 \cdot \frac{3}{5} - T_3 \cdot \frac{3}{5} = 0$

$\Rightarrow T_1 = T_3$

(2) ΣF_y : $T_1 \cdot \frac{4}{5} \cdot 2 + T_2 - P = 0$

- Ecuación de compatibilidad geométrica

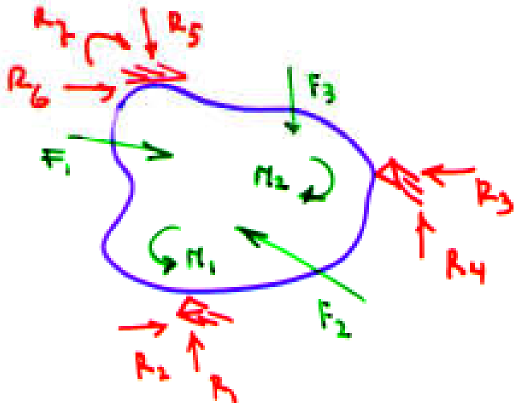
(3) En general, $\sigma = E\epsilon$

En este caso, T_1, T_2 y T_3 son axiales.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{T_2}{A} = \frac{x}{4L}E \\ \frac{T_1}{A} = \frac{\frac{4}{5}x}{5L}E \end{array}\right\} \quad \frac{\frac{T_2}{\cancel{A}}}{\frac{T_1}{\cancel{A}}} = \frac{\frac{\cancel{x}\cancel{E}}{4\cancel{L}}}{\frac{4\cancel{x}\cancel{E}}{25\cancel{L}}} \Rightarrow T_2 = \frac{25}{16}T_1 \quad (3)$$

(1), (2) y (3) $\Rightarrow$ 3 ecuaciones
3 incógnitas $\Rightarrow$ $T_1 = T_3 = 0.316\,P$
$T_2 = 0.494\,P$

Sistema Estructural Lineal



Las estructuras estáticamente determinadas quedan resueltas por medio del equilibrio. De esta forma el sistema de ecuaciones corresponde a un sistema lineal, que se puede escribir:

$$[A]\{R\} - \{F\} = \{\emptyset\} \quad , \{R\} \text{ vector de las reacciones}$$

$$\Rightarrow \quad \{R\} = [A]^{-1} \cdot \{F\}$$

Supongamos que existen dos estados diferentes de carga. $\{F_1\}$ y $\{F_2\}$

Reacciones del estado 1 : $\{R_1\} = [A]^{-1} \cdot \{F_1\}$

Reacciones del estado 2 : $\{R_2\} = [A]^{-1} \cdot \{F_2\}$

Reacciones del estado combinado (1 + 2) : $\{R_{TOT}\} = [A]^{-1}(\{F_1\} + \{F_2\})$

$$= [A]^{-1} \cdot \{F_1\} + [A]^{-1} \cdot \{F_2\}$$

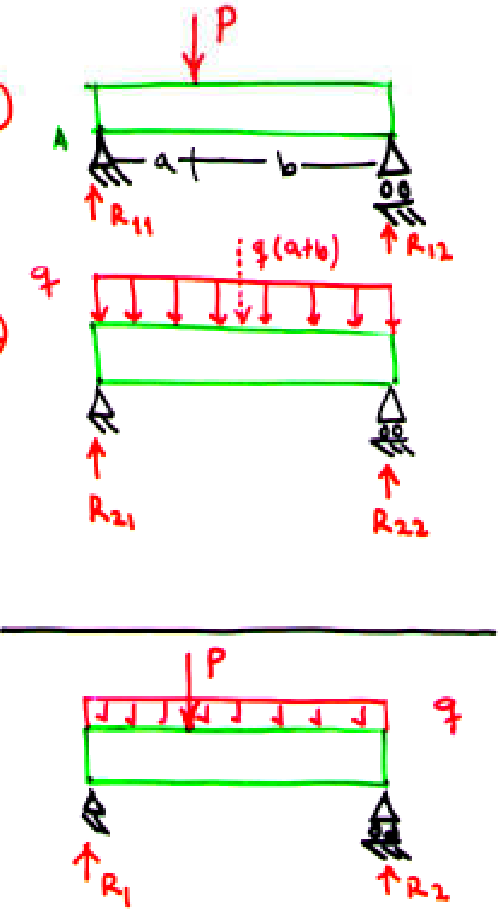
$$= \{R_1\} + \{R_2\}$$

$\therefore$ Es equivalente determinar las reacciones de cada estado de carga independiente o su suma

• Principio de Superposición

Un sistema estáticamente determinado corresponde a uno lineal. Por esta razón, la resultante de un estado de cargas equivale a la superposición o suma de los estados por separado.

Ej.:



① $\Sigma F_y: \quad R_{11} + R_{12} - P = 0$

① $\Sigma M_A: \quad R_{12}(a+b) - P \cdot a = 0$

$$\Rightarrow R_{12} = \frac{P \cdot a}{a+b} \qquad R_{11} = \frac{P \cdot b}{a+b}$$

② $\Sigma F_y: \quad R_{21} + R_{22} - q(a+b) = 0$

② $\Sigma M_A: \quad R_{22}(a+b) - q(a+b) \cdot \frac{(a+b)}{2} = 0$

$$\Rightarrow R_{21} = R_{22} = q\frac{(a+b)}{2}$$

① + ②

$\Sigma F_y: \quad R_1 + R_2 - P - q(a+b) = 0$

$\Sigma M_A: \quad R_2 \cdot (a+b) - q\frac{(a+b)^2}{2} - Pa = 0$

$$\Rightarrow R_2 = q\frac{(a+b)}{2} + \frac{Pa}{a+b}$$

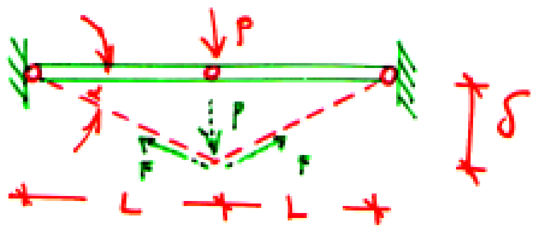
$$R_1 = q\frac{(a+b)}{2} + \frac{Pb}{a+b}$$

$\therefore \quad R_1 = R_{11} + R_{21} \qquad$ y $\qquad R_2 = R_{22} + R_{12}$

- Sistema no lineal.

La no linealidad de un sistema estructural puede deberse a que la relación tensión - deformación es no lineal, o el sistema presenta un estado de equilibrio inestable.

Ej.:



· sistema original (sin deformar) inestable

ΣF_y: $\quad 2F \,\mathrm{sen}\,\alpha - P = 0$

α ángulo pequeño $\Rightarrow$ $\mathrm{sen}\,\alpha \simeq \mathrm{tg}\,\alpha \simeq \dfrac{\delta}{L}$

$$\Rightarrow \quad F = \frac{PL}{2\delta} \qquad (1)$$

deformación de las barras : $\epsilon = \dfrac{1}{L}\left(\sqrt{L^2+\delta^2} - L\right)$

$$\epsilon = \sqrt{1+\frac{\delta^2}{L^2}} - L \simeq \frac{\delta^2}{2L^2}$$

aproximación 2° orden serie Taylor.

$$\sigma = \frac{F}{A} = \epsilon \cdot E = \frac{\delta^2}{2L^2} E$$

Ley Hooke (material lineal elástico)

$$\Rightarrow \quad F = \delta^2 \cdot \frac{AE}{2L^2} \qquad (2)$$

$$\delta = \frac{PL}{2F} \qquad (1)$$

$$(1) \text{ y } (2) \Rightarrow \quad F = \frac{1}{2}\sqrt[3]{AE \cdot P^2}$$

$\therefore$ la reacción F no es lineal respecto de la carga P.