Equilibrio.

Un sistema estructural está en equilibrio si las restricciones no permiten un movimiento de cuerpo rígido (rígido en el sentido que los desplazamientos por deformación son despreciables respecto del tamaño de la estructura).

Ecuaciones básicas

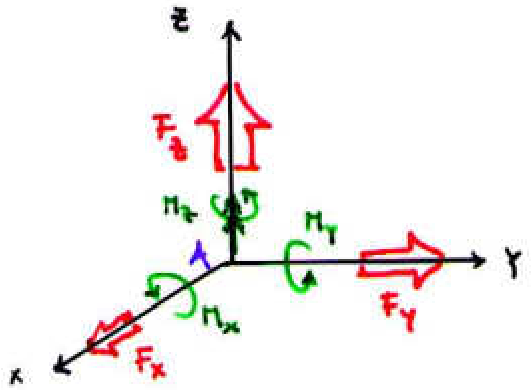
$$\sum \vec{F} = 0$$

$$\sum \vec{M}_A = 0 \equiv \sum \vec{r}_A \times \vec{F} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{array} \right.$$

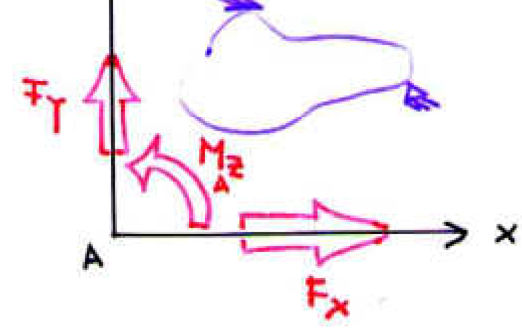
$$\left\{ \begin{array}{l} \sum M_{A_x} = 0 \\ \sum M_{A_y} = 0 \\ \sum M_{A_z} = 0 \end{array} \right.$$

caso general $\mathbb{R}^3$



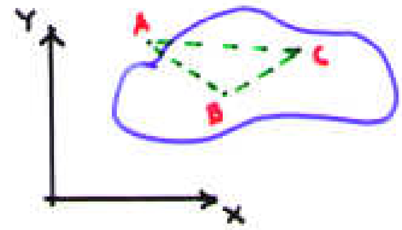
Para efectos del curso se analizarán habitualmente estructuras planas, es decir, aquellas que quedan esquematizadas en un plano, al igual que sus deformaciones.

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_{A_z} = 0 \end{array}$$



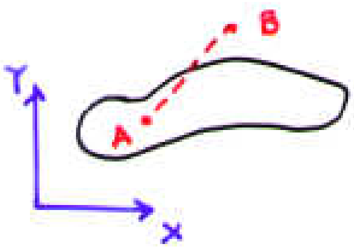
EL sistema de ecuaciones anterior se puede traducir en un sistema equivalente:

$$\sum M_{z_A} = 0$$
$$\sum M_{z_B} = 0$$
$$\sum M_{z_C} = 0$$



siempre que A, B y C sean puntos del plano X-Y y que formen un triángulo.

$$\sum F_x = 0$$
$$\sum M_{z_A} = 0$$
$$\sum M_{z_B} = 0$$

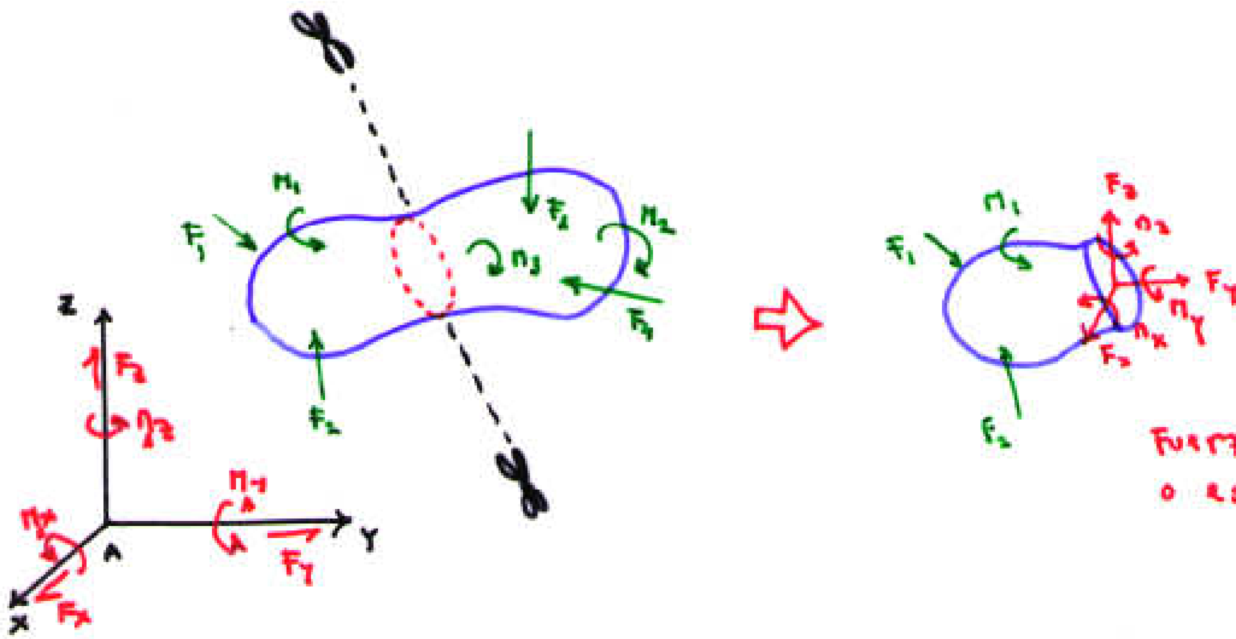


siempre que AB NO sea perpendicular a X.
(análogo para otro eje).

.... paréntesis informativo .....

Fuerzas y momentos $\longrightarrow$ Esfuerzos.

Las ecuaciones de equilibrio de fuerza y momento en $\mathbb{R}^3$ se traducen en ecuaciones para: F_x, F_Y, F_z, M_{x_A}, M_{Y_A} y M_{z_A}. Sin embargo, este equilibrio lo realizamos con las fuerzas y momentos externos. Por el principio de Acción y Reacción, si un cuerpo está en equilibrio con estas acciones externas también debe estarlo en cualquier segmento interno.

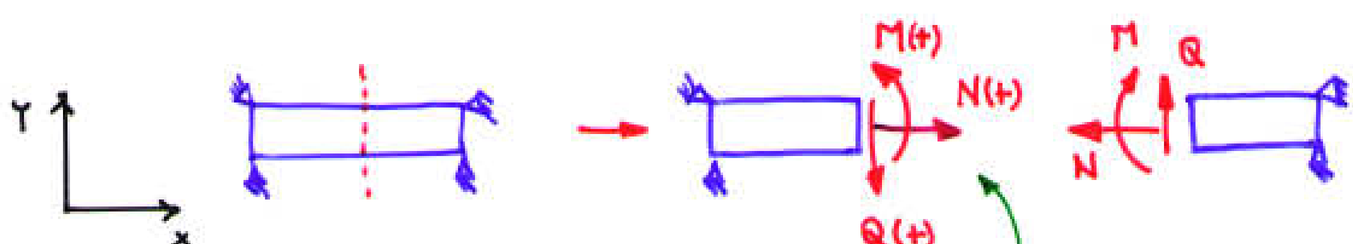


Fuerzas internas o esfuerzos.

<u>Si suponemos</u> que el cuerpo anterior "apunta" en la dirección del eje Y y el "corte" fue realizado en el plano x-z, podríamos decir que:

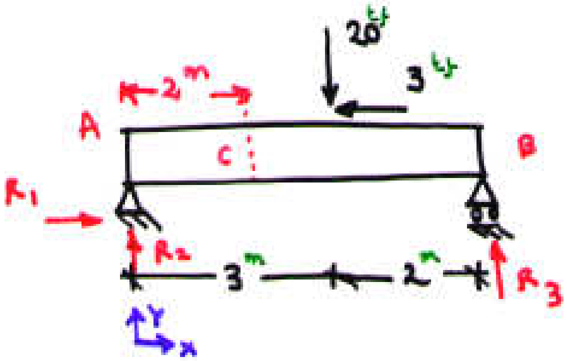
- la fuerza (esfuerzo) F_y puede representar <u>tracción o compresión axial</u>
- M_y sería <u>torsión</u>
- M_x y M_z serían <u>flexión</u> en x y z, respectivamente
- F_x y F_z serían <u>corte</u> en x y z, respectivamente

Caso plano (x-y)



convención positiva de signos de esfuerzos.

Ejemplo :



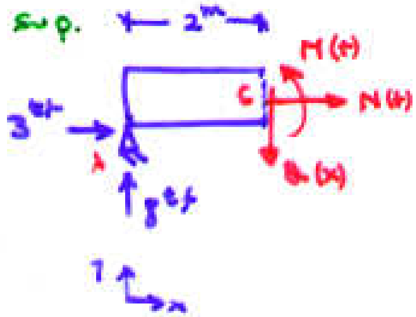
$$\Sigma F_x : \quad R_1 - 3^{tf} = 0 \Rightarrow R_1 = 3^{tf}$$

$$\Sigma F_y : \quad R_2 + R_3 - 20^{tf} = 0$$

$$\Sigma M_A : \quad R_3 \cdot 5^{m} - 20^{tf} \cdot 3^{m} = 0$$

$$\Rightarrow R_3 = 12^{tf}$$

$$\Rightarrow R_2 = 8^{tf}$$



$$\Sigma F_x : \quad N + 3^{tf} = 0 \Rightarrow N = -3^{tf}$$

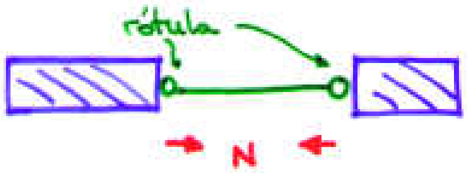
el signo (-) significa que es compresión

$$\Sigma F_y : \quad 8^{tf} - Q = 0 \Rightarrow Q = 8^{tf}$$

$$\Sigma M_c : \quad -8^{tf} \cdot 2^{m} + M = 0 \Rightarrow M = 16^{tf \cdot m}$$

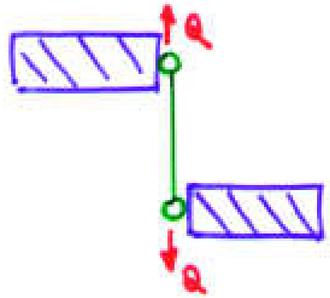
Tipos de Uniones internas

(a) Biela



$M = 0$
$Q = 0$
$N \neq 0$

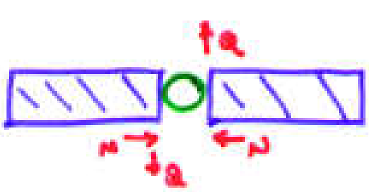
sólo se transmite esfuerzo axial entre elementos



$M = 0$
$N = 0$
$Q \neq 0$

sólo se transmite esfuerzo de corte entre elementos

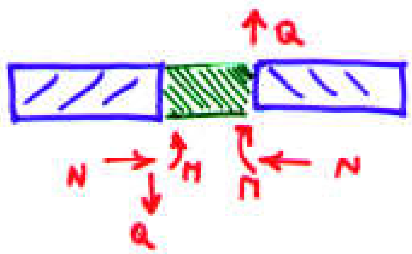
(b) Rótula



$M = 0$
$N \neq 0$
$Q \neq 0$

se transmite esfuerzo axial y de corte.

(c) soldadura o unión rígida.



$M \neq 0$
$Q \neq 0$
$N \neq 0$

se transmiten todos los esfuerzos flexión, axial y corte

...... volvemos a Equilibrio. ....

grados de libertad (g.l.)

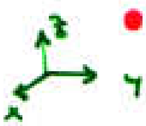
corresponde a los movimientos posibles de un sistema.

Ej. : barco rígido en el océano.

suponemos que el barco puede hundirse.

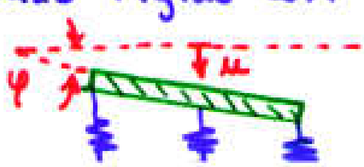
$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ 3 \text{ desplazamientos posibles}: u_x,\ u_y \text{ y } u_z \\ \bullet\ 3 \text{ giros posibles}: \varphi_x,\ \varphi_y \text{ y } \varphi_z \end{array}\right\} g.l. = 6$$

Ej. : partícula puntual en el espacio

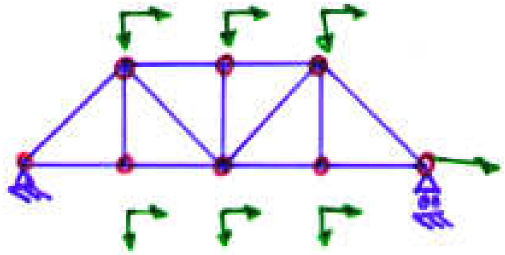


• 3 desplazamientos posibles } g.l. = 3

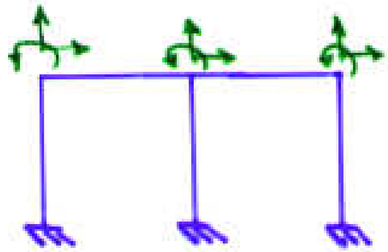
Ej : sólido rígido con apoyo flexible (plano x-y)



$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ 1 \text{ desplazamiento} \\ \bullet\ 1 \text{ giro} \end{array}\right\} g.l. = 2$$

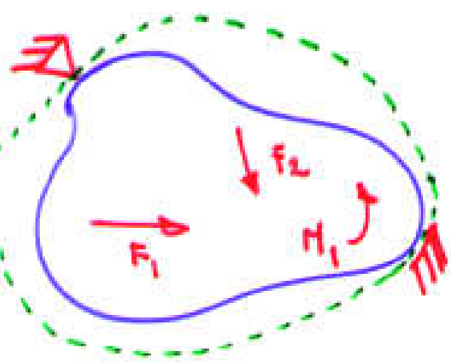


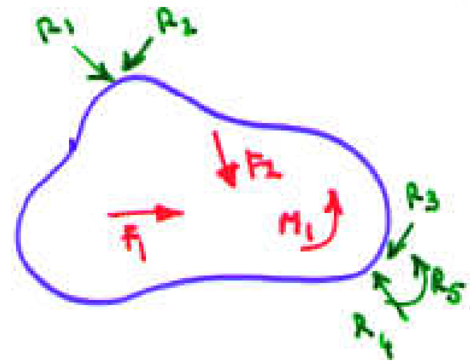
Enrejado articulado con 2 desplazamientos posibles en los nodos libres } g.l. = 13



Marco flexible empotrado con 3 g.l. por nudo libre } g.l. = 9

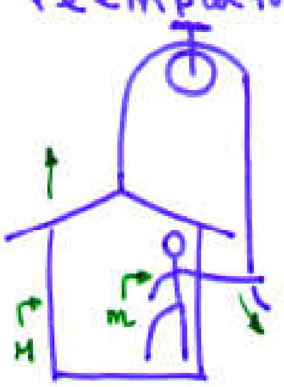
Diagrama de cuerpo libre.

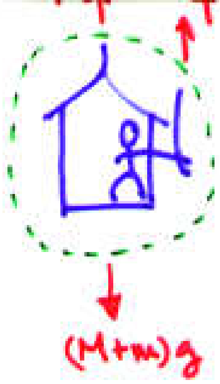




Al aislar un elemento de un sistema se debe equilibrar el sistema "incorporando" todas las acciones reemplazadas.

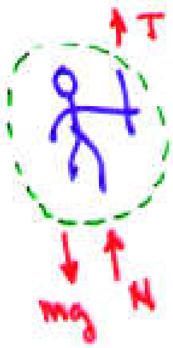
Ej:

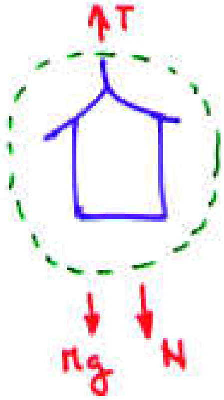




$$2T - (M+m)g = 0$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{(m+M)}{2}g$$





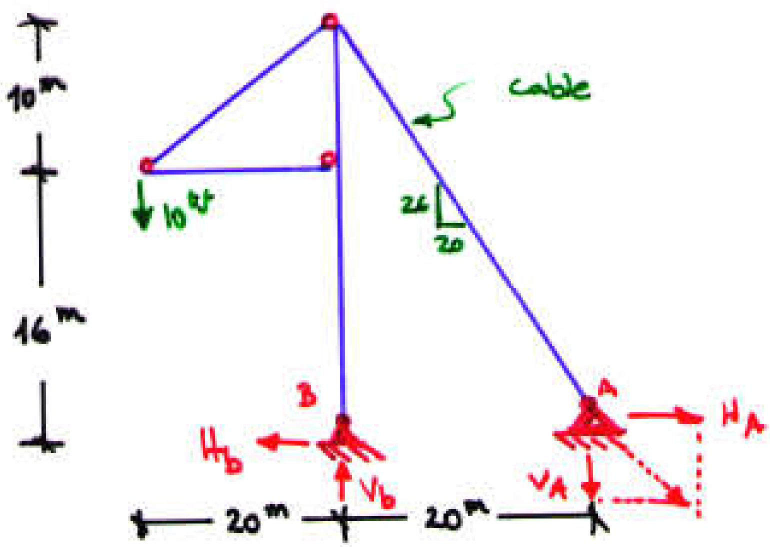
$$T + N - mg = 0$$

$$\frac{+ \quad T - N - Mg = 0}{}$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{(m+M)}{2}g$$

//

Ej.: Determinar las reacciones de la estuctura.



$$\sum F_x: \; H_A - H_b = 0$$

$$\sum F_y: \; V_b - V_A - 10^{t/} = 0$$

$$\sum M_B: \; -20^m \cdot V_A + 10^{t/} \cdot 20^m = 0$$

¿3 ec. y 4 incógnitas?

$$\Rightarrow \quad \frac{V_A}{H_A} = \frac{26}{20} \qquad \therefore \quad \text{4 ec. y 4 incog. } \underline{\underline{\text{ok}}}.$$

$$\Rightarrow \quad V_A = 10^{t/}$$

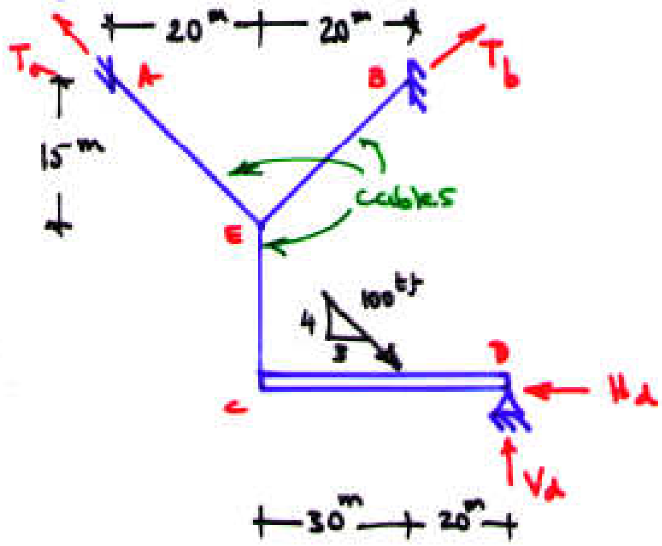
$$V_b = 20^{t/}$$

$$H_A = H_b = 10 \cdot \frac{20}{26} = 7{,}7^{t/}.$$

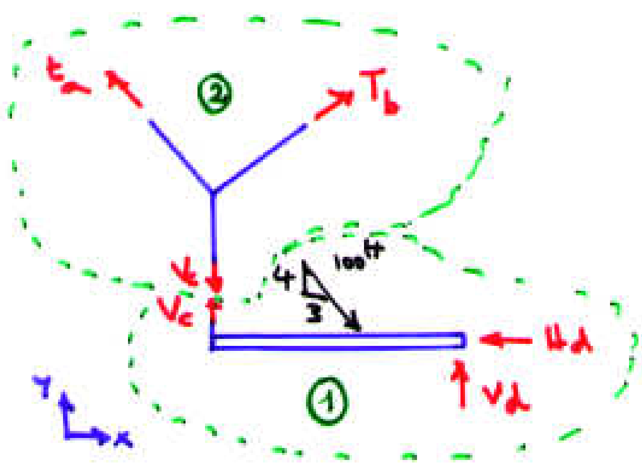
Sistemas compuestos

corresponde a la composición de 2 o más estructuras.

Ej: Determinar las reacciones de la estructura compuesta



¿3 ecuaciones y 4 incógnitas?



① $\Sigma F_x : -H_d + 100^{tf} \times \frac{3}{5} = 0$

$\Sigma F_y : V_c + V_d - 100^{tf} \times \frac{4}{5} = 0$

$\Sigma M_c : V_d \cdot 50^m - 100^{tf} \cdot \frac{4}{5} \cdot 30^m = 0$

$\Rightarrow H_d = 60^{tf}$
$V_d = 48^{tf}$
$V_c = 32^{tf}$

② $\Sigma F_x : -T_a \cdot \frac{4}{5} + T_b \cdot \frac{4}{5} = 0 \quad \Rightarrow T_a = T_b$

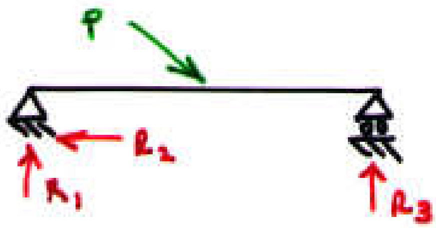
$\Sigma F_y : (T_a + T_b) \cdot \frac{3}{5} - V_c = 0 \quad \Rightarrow T_a = T_b = \frac{V_c}{2} \cdot \frac{5}{3} = 26{,}7^{tf}$

Tipos de equilibrio

(a) Equilibrio Estable : El sistema está restringido de moverse.

(a.1) Estáticamente determinado :

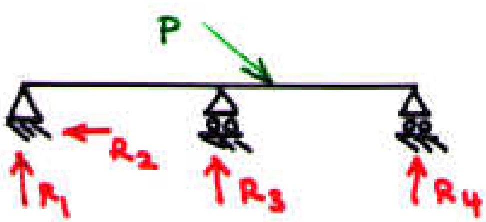
cuando en un sistema las fuerzas desconocidas pueden ser resueltas sólo con las ecuaciones de equilibrio.



- 3 ecuaciones
- 3 incógnitas: R_1, R_2 y R_3 (externas)

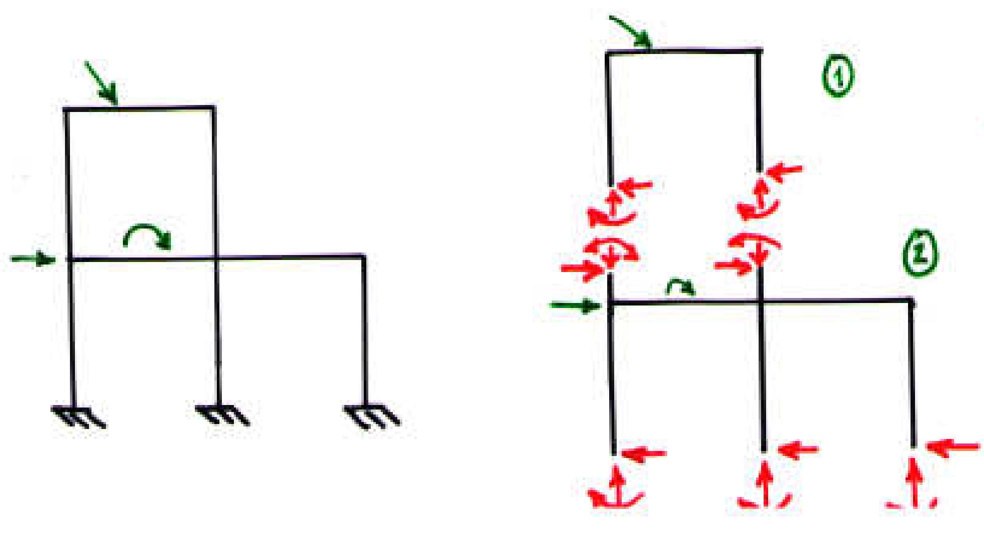
(a.2) Estáticamente indeterminado o redundante :

cuando existen más fuerzas desconocidas en un sistema estable que las que entregan las ecuaciones de equilibrio.



- 3 ecuaciones
- 4 incógnitas : R_1, R_2, R_3 y R_4 (externas)

→ 1 grado de indeterminación

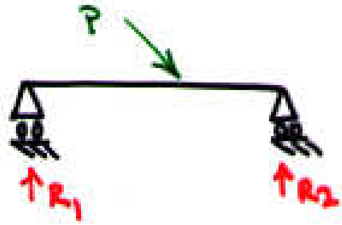


- 6 ecuaciones
- 15 incógnitas

→ 9 grados de indeterminación

(b) Inestable (mecanismo):

El sistema no está restringido y tiene movimiento de cuerpo rígido.

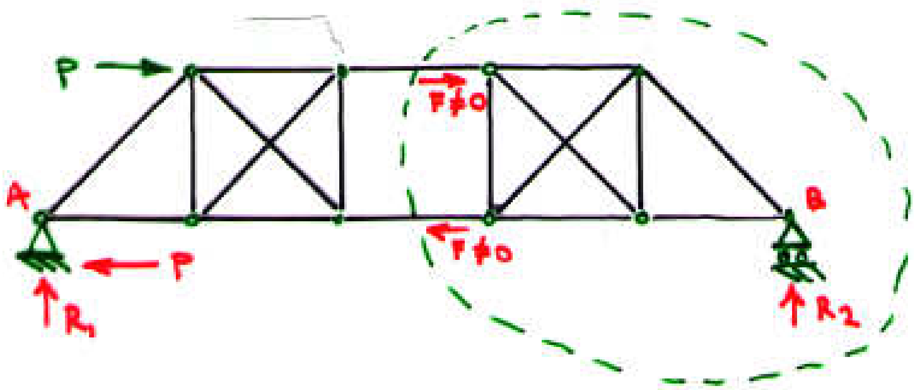


dirección de movimiento

- 3 ecuaciones
- 2 incógnitas

(b.1) Estáticamente inestable:

caso general de inestabilidad, producto de resticciones insuficientes.

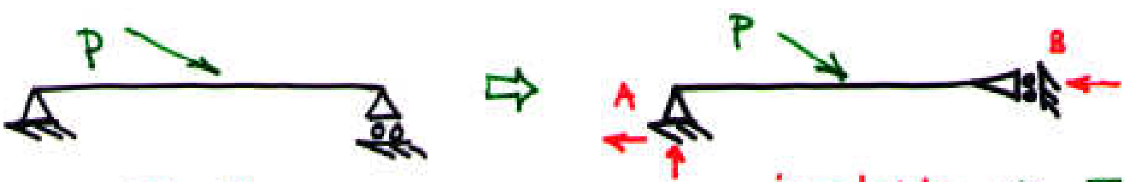


$\sum M_B \neq 0$

$\therefore$ No existe equilibrio.

(b.2) Geométricamente inestable:

La inestabilidad se produce por una disposición "especial" de las restricciones.



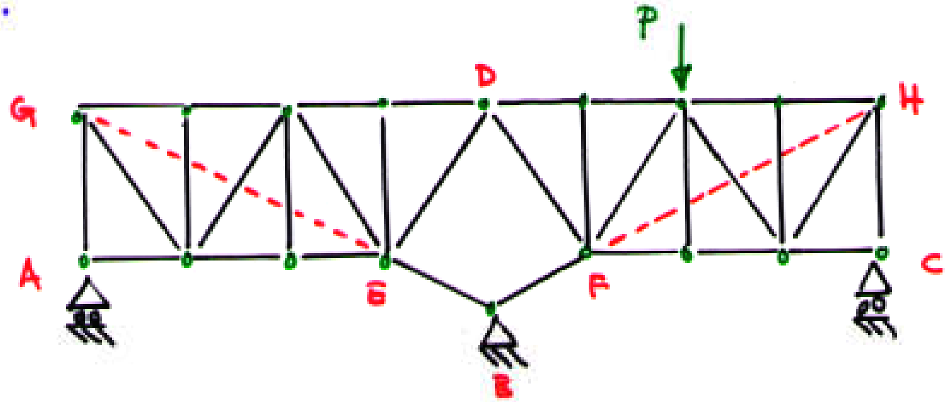
estable

inestable $\Leftarrow \sum M_A \neq 0$

a pesar que existen 3 ec. y 3 incógnitas.

Los dos sistemas son idénticos, salvo por la orientación de uno de los apoyos. Este cambio de orientación produce la inestabilidad <u>geométrica</u>.

Enrejado donde la biela EB apunta en la dirección EG y la biela BF en la dirección FA.



Considerando el cuerpo ② :

$\sum M_H = 0 \Rightarrow V_d \neq 0$. (sólo contribuyen V_d y P)

Ahora, para el sistema ①:

$\sum M_G \neq 0$, ya que $V_d \neq 0$ y es el único término que contribuye.

∴ La inestabilidad geométrica se produce exclusivamente por la orientación del apoyo B

Grado de determinación o indeterminación

(a) Marcos

En general, el grado de determinación o indeterminación se puede establecer de la diferencia entre "ecuaciones" e "incógnitas"

(a.1) Marco plano

"incógnitas"

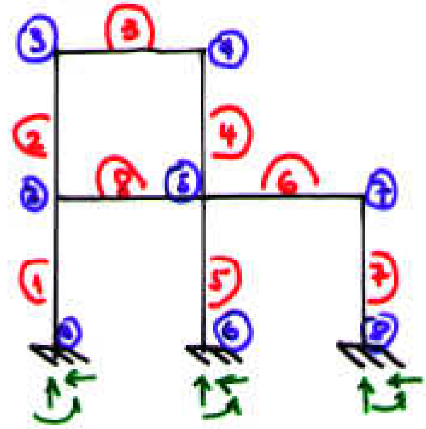
- cada barra del marco entrega 3 incógnitas internas (esfuerzos: M, N y Q).
- cada restricción externa (apoyo) entrega 1 incógnita externa

"ecuaciones"

- cada "nodo" (intersección de barras y puntos de reacción) entrega 3 ecuaciones (ΣF_x, ΣF_y y $\Sigma M = 0$)

Def.: $m \doteq$ número de barras
$r \doteq$ número de restricciones externas
$j \doteq$ número de nodos

$$G.I. = 3 \cdot m + r - 3 \cdot j \begin{cases} < 0 & \text{inestable} \\ = 0 & \text{estable det.} \\ > 0 & \text{indet. est.} \end{cases}$$



$m = 8$

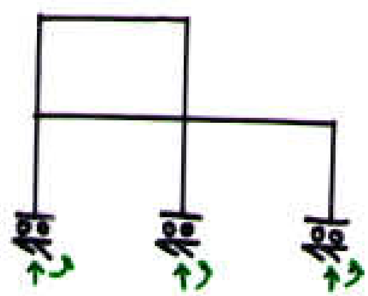
$r = 9$

$j = 8$

$\therefore$ G.I. $= 3\times 8 + 9 - 3\times 8 = 9 > 0$

Es decir, tiene 9 grados de indeterminación

Sin embargo, esta forma de formular el grado de determinación o indeterminación NO resuelve todos los problemas. En el ejemplo anterior basta con permitir el deslizamiento horizontal en los apoyos para que el sistema sea inestable aunque G.I. = 6



$m = 8$
$j = 8$
$r = 6$

$\therefore$ G.I. $= 6$ aunque es inestable

(a.2) Marco en R^3

- incógnitas $\begin{cases} \bullet\ 6 \text{ por barra } F_x, F_y, F_z, M_x, M_y \text{ y } M_z \\ \bullet\ 1 \text{ por restricción (apoyo)} \end{cases}$

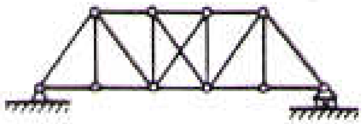
- ecuaciones $\{ \bullet$ 6 por "nodo" $\Sigma F_x, \Sigma F_y \ldots\ \Sigma M_z = 0$

$\therefore$ G.I. $= 6\cdot m + r - 6j$

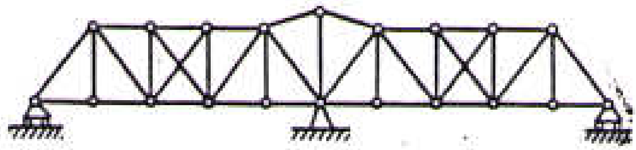
(b) Enrejados

· incógnitas $\begin{cases} 1 \text{ por barra } N \\ 1 \text{ por restricción (apoyo)} \end{cases}$

· ecuaciones $\{ \; 2$ por nodo. ΣF_x, ΣF_y

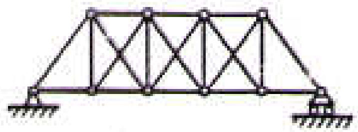


(a)



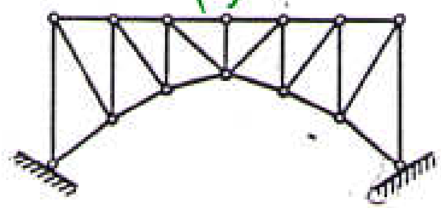
(a)

(1)



(b)

(2)



(b)

$\therefore$ G.I $= m + r - 2j$

Ej.: (1)(a) $m = 18$, $r = 3$, $j = 10$ $\Rightarrow$ G.I. $= 18 + 3 - 2 \times 10 = 1$

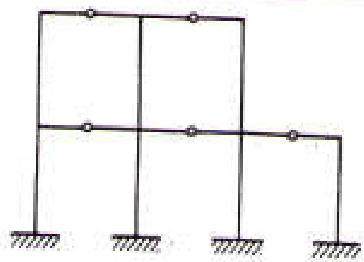
(2)(a) $m = 39$, $r = 4$, $j = 20$ $\Rightarrow$ G.I. $= 39 + 4 - 2 \times 20 = 3$

(1)(b) $m = 20$, $r = 3$, $j = 10$ $\Rightarrow$ G.I $= 20 + 3 - 2 \times 10 = 3$

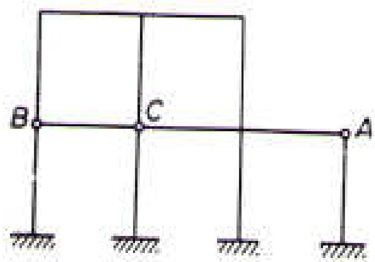
(2)(b) $m = 25$, $r = 4$, $j = 14$ $\Rightarrow$ G.I. $= 25 + 4 - 2 \times 14 = 1$

(C) Estructuras con rótulas u otro medio de grado de libertad.

En general, las rótulas entregan una ecuación adicional $\Sigma M_{rotula} = 0$.



(a)



(b)

Ej: (a) $m = 12$
$r = 12 \quad \Rightarrow G.I = 3 \times 12 + 12 - 3 \times 11 - 5 = 10$
$j = 11$
$n = 5 \equiv$ número de rótulas

Sin embargo, las rótulas en los nodos entregan ecuaciones adicionales ya que intervienen en más de una barra.

Ej. (b) $n = \underset{A}{1} + \underset{B}{2} + \underset{C}{3} = 6 \quad \Rightarrow G.I. = 9$