Clase Auxiliar 2

Probabilidades

Variable aleatoria

Una variable aleatoria (v.a.) es una función que asocia un número real, perfectamente definido, a cada punto muestral. Los espacios muestrales pueden ser:

- discretos: número finito o infinito numerable de elementos
- continuos: número infinito no numerable de elementos

Las v.a. definidas sobre conjuntos discretos se llaman v.a. discretas y aquellas definidas sobre conjuntos continuos, v.a. continuas. Una v.a. puede ser continua aunque tengamos acceso sólo a un conjunto finito de valores. Ejemplo: la presión arterial es una v.a. continua, pero sólo podemos medir un conjunto finito de valores.

Inducción de la probabilidad a variables aleatorias

Las v.a. permiten definir la probabilidad como una función numérica (de variable real).
Ejemplo: Tiramos una moneda 3 veces. Representamos cara por c y cruz por z.

Ω = {ccc, ccz, czc, zcc, czz, zcz, zzc, zzz}

La probabilidad de cada suceso elemental es de 1/8. Por ejemplo para {ccc}, su probabilidad p(ccc)=1/8.

Ahora definiremos una v.a. X, como el número de caras que puden salir al lanzar las tres monedas, que puede tomar los valores {0,1,2,3}. Se buscan todos los puntos muestrales que dan lugar a cada valor de la variable y a ese valor se le asigna la probabilidad del suceso correspondiente.

x	*Sucesos*	$f(x)=p_x$
0	{zzz}	1/8
1	{czz, zcz, zzc}	3/8
2	{ccz, czc, zcc}	3/8
3	{ccc}	1/8

A f(x) le llamamos *función densidad de probabilidad* (fdp), que desgraciadamente funciona de distinta manera en las v.a. discretas que en las continuas. En el caso de las variables discretas, como en el ejemplo, es una función que para cada valor de la variable le asigna su probabilidad.

Para variables continuas la probabilidad de que una variable tome cualquier valor concreto es 0, por lo tanto la fdp sólo permite calcular la probabilidad para un intervalo del tipo $\{X \mid a<X<b\}$, mediante el área bajo la curva de la fdp.

Función de distribución o probabilidad acumulada

Sea $F(x) = p(X \leq x)$, donde p es la probabilidad, entonces denominaremos F a la función de distribución. Entonces para nuestro ejemplo de las monedas:

x	***f(x) = p(x)***	***F(x)***
0	1/8	1/8
1	3/8	4/8
2	3/8	7/8
3	1/8	1

Parámetros característicos de una fdp

Sea f(x) una fdp para la v.a. x, entonces su **Esperanza** queda definida por:

$$\mu_x = E[x] = \begin{cases} \sum_x xf(x) \; caso\, discontinuo \\ \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) \; caso\, continuo \end{cases}$$

ya que x es una v.a., entonces h(x) (una función cualquiera de ella) también es una v.a., por lo tanto podemos definir la media de h(x) como:

$$\mu_h = E[h(x)] = \begin{cases} \sum_x h(x) f(x) \, caso \, discontinuo \\ \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x) \, caso \, continuo \end{cases}$$

También podemos definir la desviación típica o **Varianza** de la fdp, como:

$$\sigma_x^2 = E[(X - \mu_x)^2]$$

aunque para el cálculo se suele usar esta otra fórmula equivalente:

$$\sigma_x^2 = E[X^2] - \mu_x^2$$

¿Qué mide la varianza? Mide la dispersión de la variable alrededor de la media.

Problemas

Problema #1 (basado en P1, control #1, 2001/02)

Suponga que dos vías de ferrocarril se juntan a una sola, según ilustra la Figura 1. En la unión hay un interruptor manual, que sirve para conectar una de las vías incidentes a la final. El interruptor tiene tres posiciones: vía superior conectada, vía inferior conectada y todas las vías desconectadas. Cada vía incluyendo la final, tiene un semáforo que indica la conectividad que sigue. Estos semáforos se describen así:

a) Semáforos de las vías incidentes: tienen 2 luces (verde y roja), con el significado habitual: por ejemplo, si está encendida la luz verde, que la vía está conectada, y por lo tanto, un tren puede seguir porque continuará en la vía final.
b) Semáforo de la vía final: tiene 2 luces (verde y roja), con el mismo significado anterior, pero además hay dos flechas luminosas: una apuntando hacia la vía superior y otra hacia la vía inferior. Sólo cuando está encendida la luz verde, también está encendida una de las flechas luminosas, dando una idea al conductor del tren hacia cuál de las vías continuará cuando pase la intersección.

Se pide hacer una descripción informal de un modelo de este sistema. Indique los supuestos que considere necesarios.
Clasificar este modelo según si es autónomo o no (indicar justificación breve)

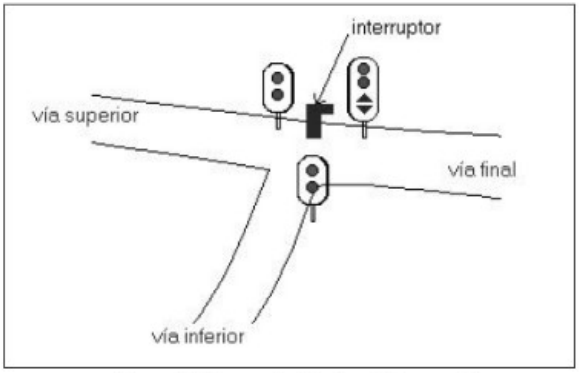


Figura 1. Intersección de vías de ferrocarril.

Problema #2(Basado en P1 Control 1, Otoño 2006)

Haga el diagrama de influencias del siguiente caso:

La industria automotriz de EE.UU. Está concentrada en la producción de automóviles grandes. Así , si los consumidores aumentan su preferencia por coches pequeños, disminuyen las ventas de automóviles norteamericanos grandes, y, por supuesto, crecen las ventas de autos importados. Por otro lado, si el costo de los materiales llega a aumentar, también lo hace el valor de venta de los coches grandes fabricados en USA, y en consecuencia, aumenta la preferencia de los consumidores por los automóviles pequeños. Esto último también ocurre, por supuesto, si aumenta el costo de la gasolina.

En los últimos años, los fabricantes norteamericanos han optado por fabricar más bien automóviles medianos (compactos), lo que ha incrementado sus utilidades. Esta tendencia ha ocurrido como consecuencia del costo cada vez mayor de los materiales (materias primas). La construcción de automóviles compactos, a su vez, ha afectado negativamente las ventas de coches importados. Los fabricantes norteamericanos han reconocido que en su decisión de aumentar la fabricación de medianos influyó el aumento previo de las ventas de autos importados.

No obstante lo anterior, las grandes utilidades de los fabricantes de USA provienen de sus ventas de autos grandes. Y si tuvieran muchas utilidades, no dudarían en disminuir su producción de autos medianos.

Problema #3

Los dirigentes de la Asociación de Fútbol de Pelotillehue (AFP), debido a los malos resultados que han obtenido en sus partidos pertenecientes al proceso de clasificatorias para el mundial (especialmente de local), están pensando en despedir a su entrenador. Una de las principales sospechas que tienen es que parte del trabajo es efectuado por el Preparador Físico.
Para justificar sus sospechas, en el último partido ante su clásico rival Buenas Peras, los dirigentes lo han estado vigilando, observando que el entrenador funciona de la siguiente forma:

- Al empezar el partido (o el segundo tiempo) se sienta en la banca. En un instante dado, si un jugador comete algún error, el Preparador físico le avisa al entrenador.
- Si un jugador comete un cuarto error, el entrenador se enoja y lo sustituye por el primer jugador que se encuentra en la banca (sin preocuparse si juega en la misma posición)
- El entrenador tiene 1 jugador predilecto, el cual no lo cambia aunque cometa más de tres errores.

- Cuando finaliza el primer tiempo, el entrenador se coloca a hablar por teléfono durante todo el entretiempo, olvidándose de sus jugadores que se encuentran descansando.
- El entrenador no conoce el nombre de los jugadores, sólo los diferencia por el número que tienen en la camiseta.

Realice un modelo informal que permita simular las actividades que realiza el entrenador en un partido (de tal forma que se pueda despedir al entrenador y reemplazarlo por algún sistema).

Para ello considere además:

– Cada tiempo dura 45 minutos (no hay tiempo adicional). El entretiempo dura 15 minutos.
– Los cambios de jugadores se efectúan en la misma unidad de tiempo (no es necesario detener el partido).
– Suponga que los titulares son los jugadores del 1 al 11, y los suplentes del 12 al 15.

Solución

Problema #1

- **Componentes:**
  INTERRUPTOR, SEMAFORO_S, SEMAFORO_I, SEMAFORO_F
- **Variables descriptivas:**
  - Para INTERRUPTOR:
    POSICION: con rango {SUPERIOR, INFERIOR, DESCONECTADO}
  - Para SEMAFORO_S:
    LUZ_S: con rango {ROJO, VERDE}; LUZ_S = x significa que el semáforo de la vía superior está en color x.
  - Para SEMAFORO_I:
    LUZ_I: con rango {ROJO, VERDE}; LUZ_S = x significa que el semáforo de la vía inferior está en color x.
  - Para SEMAFORO_F:
    LUZ_F: con rango {ROJO, VERDE}; LUZ_S = x significa que el semáforo de la vía final está en color x.
    FLECHA: con rango {ARRIBA, ABAJO, NINGUNA}; FLECHA=ARRIBA significa que la flecha superior está encendida, FLECHA=ABAJO significa que la flecha inferior está encendida y FLECHA=NINGUNA significa que ninguna flecha está encendida.
- **Interacciones entre componentes:**

(1) Cuando la POSICION del INTERRUPTOR es puesta en SUPERIOR: LUZ_S es puesta en VERDE, LUZ_I es puesta en ROJO, LUZ_F es puesta en VERDE, FLECHA de ARRIBA es encendida.

(2) Cuando la POSICION del INTERRUPTOR es puesta en INFERIOR: LUZ_S es puesta en ROJO, LUZ_I es puesta en VERDE, LUZ_F es puesta en VERDE, FLECHA de ABAJO es encendida.

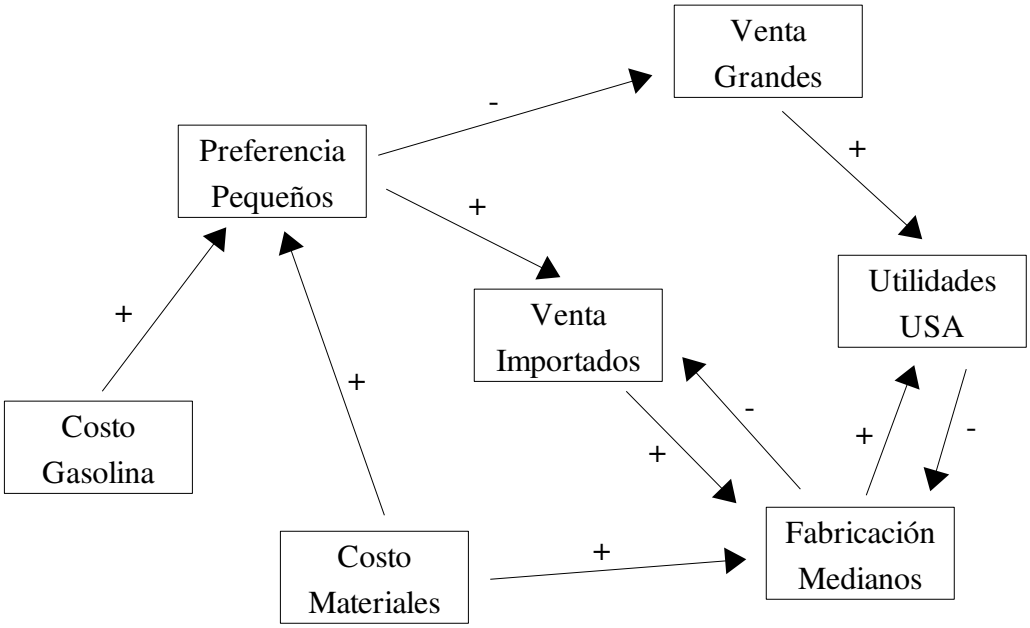
(3) Cuando la POSICION del INTERRUPTOR es puesta en DESCONECTADO: LUZ_S es puesta en ROJO, LUZ_I es puesta en ROJO, LUZ_F es puesta en ROJO, FLECHA es NINGUNA.

- **Parámetros:**
  No se identifican en el problema
- **Supuestos:**

1) Las flechas permanecen encendidas o apagadas y los semáforos con los valores tomados en forma indefinida, a menos que se cambie la posición del interruptor de acuerdo a las reglas precedentes.
2) Los semáforos están sincronizados con el interruptor de modo que todos cambian sus colores cuando cambia la posición del interruptor.

El sistema estudiado es no autónomo, ya que recibe una entrada que no es controlada por el sistema pero que afecta su estado a través del interruptor, que debe ser controlado por una persona.

Problema #2



Problema #3

Componentes:

ENTRENADOR, PREPARADOR_FISICO, JUGADOR_i con i=1,...,15, PARTIDO

Variables Descriptivas:

-ENTRENADOR:

ESTADO_ENTRENADOR – con rango {SENTADO, HABLANDO}

-PREPARADOR_FISICO

JUGADOR_ERROR – con rango {0, 1, ..., 15}. Significa el número del jugador que cometió un error en el partido en el instante de tiempo. Si es 0, ningún jugador cometió un error en ese instante.

JUGADOR_i

ESTADO_JUGADOR_i – con rango {JUGANDO, BANCA, DESCANSANDO}

ERRORES_COMETIDOS_i – con rango

PARTIDO

ESTADO_PARTIDO – con rango {JUGANDOSE, FINALIZADO}

SUSTITUCIONES_EFECTUADAS – con rango {0,1,2,3}

Parámetros:

– J_PREFERIDO – con rango {1, ..., 15}, significa el número del jugador preferido por el entrenador
– DURACION_TIEMPO – con valor fijo igual a 45 minutos
– DURACION_ENTRETIEMPO – con valor fijo igual a 15 minutos

Interacciones entre componentes:

(1) ESTADO_ENTRENADOR con valor SENTADO durante DURACION_TIEMPO.
(2) Después de ese tiempo, ESTADO_ENTRENADOR con valor HABLANDO durante DURACION_ENTRETETIEMPO. Además, ESTADO_JUGADOR_i con valor DESCANSANDO durante ese mismo período, para todo i, tales que ESTADO_JUGADOR_i tenga valor JUGANDO.
(3) Después de ese tiempo, ESTADO_ENTRENADOR con valor SENTADO durante DURACION_TIEMPO. Además ESTADO_JUGADOR_i con valro JUGANDO durante ese mismo periodo, para todo i tales que ESTADO_JUGADOR_i tenga valor DESCANSANDO.
(4) Después de ese tiempo, ESTADO_JUGADOR_i con valor DESCANSANDO, para todo i tales que ESTADO_JUGADOR_i tenga valor JUGANDO. Además ESTADO_PARTIDO con valor FINALIZADO.

(5) Cuando JUGADOR_ERROR distinto de 0 en cualquier instante de tiempo dado, entonces
-ERRORES_COMETIDOS_{JUGADOR_ERROR} se incrementa en 1.
-Si ERRORES_COMETIDOS_{JUGADOR_ERROR} mayor que 3 y JUGADOR_ERROR distinto de J_PREFERIDO, y SUSTITUCIONES_EFECTUADAS menor que 3, entonces:
– ESTADO_JUGADOR_{JUGADOR_ERROR} con valor BANCA y
– SUSTITUCIONES_EFECTUADAS se incrementa en 1 y
– ESTADO_JUGADOR_{11 + SUSTITUCIONES_EFECTUADAS} con valor JUGANDO

Supuestos:

-Los jugadores que se sustituyen no vuelven a jugar durante el partido.