

Probabilidades y Procesos Estocásticos. Verano 2007

Profesor Cátedra : Fernando Lema

Profesor Auxiliar : León Sanz

CLASE AUXILIAR. VERANO 2007

16 DE ENERO 2008

1. Considere una peluquería en la cual trabajan dos personas, un peluquero y su ayudante. El peluquero posee una única silla en la cual corta el pelo según una exponencial de media 10 minutos, mientras que su ayudante lava el pelo, en otra silla, según una exponencial de media 4 minutos. Los clientes llegan según un proceso de Poisson de tasa $\lambda_c = 6$ [$\frac{\text{clientes}}{\text{hora}}$]. Los clientes se lavan el pelo antes de cortárselo con probabilidad p , y pasan directamente a cortárselo con probabilidad $(1 - p)$. Si un cliente llega y encuentra ocupada la silla correspondiente (lavado o corte) se marcha del local. Los clientes que se lavan el pelo deberán esperar a que la silla del peluquero se encuentre desocupada para dejar la silla en la cual se encuentran.

Modele el sistema y plantee las ecuaciones de balance. En base a las probabilidades estacionarias, determine el número esperado de clientes en el local en cualquier instante.

2. La oficina de entrega de certificados de una prestigiosa Escuela de Ingeniería, ha contratado una muy agraciada secretaria, la cual causa sensación dentro del alumnado masculino. Es por esto que se le ha encargado a ud. el estudio del sistema de atención con el que actualmente se opera.

En la oficina sólo existe un puesto de espera, además del lugar que ocupa el estudiante que se está atendiendo. Los alumnos que llegan y encuentran, tanto a la secretaria como el lugar de espera ocupados, se retiran indignados.

Los estudiantes llegan a pedir certificados según un proceso de Poisson de tasa λ [alumnos/hora]. Con probabilidad p un alumno es hombre y con $1 - p$ es mujer. La secretaria demora en la atención un tiempo aleatorio que sigue una distribución exponencial de media $\frac{1}{\mu}$ para los hombres y $\frac{1}{\gamma}$ para las mujeres, con $\mu \leq \gamma$.

Además se sabe que las alumnas, víctimas de una irrefutable envidia, están como máximo en el lugar de espera un tiempo que sigue una distribución exponencial de parámetro β , luego del cual se retiran furiosas, sin haber recibido la atención. Por otro lado si un estudiante hombre está en el puesto de espera, ni tonto ni perezoso, se queda en ese lugar hasta que la afamada secretaria se desocupe y le preste el servicio requerido.

- a) Modele el estado de ocupación de la Oficina de Certificados.
- b) Justifique la existencia de probabilidades estacionarias y encuentre el sistema de ecuaciones que permita calcularlas.

- c) ¿Cuál es la cantidad de alumnos que en una hora, se retiran indignados al encontrar la oficina llena?
- d) ¿Cuál es la probabilidad de que una mujer se retire indignada del lugar de espera, antes de que termine la atención de la persona que está con la secretaria?
3. Un famoso grupo de música va a realizar un concierto en Santiago. Se sabe que los fanáticos del grupo llegan al concierto en un tiempo distribuido exponencialmente de media 2 minutos. Al llegar, los fanáticos se ponen en una fila única donde deben esperar que un guardia les corte las entradas, el cual demora un tiempo exponencial de media 1 minuto. Además, cuando hay i personas en la cola (incluyendo al que está siendo atendido por el guardia) y llega un nuevo fanático, existe una probabilidad r_i que los fanáticos rompan la reja, en cuyo caso todos los fanáticos de la cola entrarán corriendo al concierto (con $r_0 = 0$). Suponga que luego de caerse la reja, ésta es arreglada automáticamente y puede seguir el ingreso de fanáticos en forma regular. Modele el sistema.
4. En un criadero de chanchos nacen chanchitos según una exponencial de media $\frac{1}{\lambda}$ [meses]. En cada nacimiento, pueden dar a luz desde 1 hasta 5 chanchitos con probabilidad p_i de que nazcan exactamente i chanchitos. El criadero tiene una sección de lactancia con capacidad para amamantar a un máximo de tres chanchitos simultáneamente, los cuales amamantarán un tiempo exponencial de media $\frac{1}{\mu}$ [meses], luego de lo cual alcanzan la independencia dejando de amamantar. Los chanchitos que no sean amamantados desde el momento de nacer mueren instantáneamente.
- a) Dibuje el diagrama de estados del sistema: chanchitos (vivos) en la etapa de lactancia.
- b) Plantee las ecuaciones de balance.
- c) En base a las probabilidades estacionarias, determine el número promedio de potenciales salchichas, que pueden obtenerse con los chanchitos en lactancia, en régimen estacionario. Para esto considere la siguiente función:
 $f(n) = 50n^2$ salchichas (con n = número de chanchitos).
- d) Encuentre una expresión para la tasa efectiva de nacimiento de chanchitos (i.e. descartando los que mueren tras nacer).