Probabilidades y Procesos Estocásticos. Verano 2007

Profesor Cátedra	:	Fernando Lema
Profesor Auxiliar	:	León Sanz

Tarea 3.
Entrega: Control 3

1. *a)* Considere una v.a X con distribución Beta de parámetros α, β, α, $\beta > 0$, con función densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} \cdot (1-x)^{\beta-1} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   Calcule $\mathbb{E}(X)$ y $Var(X)$.

   b) Sean $Y_1 \rightarrow G(\alpha_1, \beta)$, $Y_2 \rightarrow (\alpha_2, \beta)$ v.a independientes. Muestre que $U = \frac{Y_1}{Y_1+Y_2} \rightarrow Be(\alpha_1, \alpha_2)$ y que U es independiente de $V = Y_1 + Y_2$.

   c) Suponga que la proporción X de artículos defectuosos, en un gran lote, es desconocida y que $X \rightarrow Be(\alpha, \beta)$. Si se selecciona al azar un artículo del lote, ¿Cuál es la probabilidad que sea defectuoso?

2. Sea X una v.a discreta con $R_X \subset \mathbb{N}$. Se define la función generadora de probabilidades como:

$$G_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P(X = k)$$

   a) Determine $G_X^{(n)}(Z)|_{Z=0}$

   b) Calcule $G_X(z)$si X$\rightarrow$ $P(\lambda)$.

3. Sean $X_i \rightarrow U(0,1)$, i = 1, ..., n, independientes. Determine usando la función generadora de momentos la distribución de la v.a.: Y = $-2 * \ln(\prod_{i=1}^{n} X_i)$. ¿Cuál es la distribución para n grande? Calcule P(y ¿55) si n = 40.

4. *a)* Sea X una v.a. tal que E(x^k) = (k + 1)!2^k, k = 1, 2.... Determine, usando la F.G.M. la distribución de X.

   b) Las funciones generadoras de momentos de las variables X e Y son respectívamente $M_x(t) = \exp(2e^t - 2)$ y $M_y(t) = \left(\frac{1}{4}\right)^{10} (3e^t + 1)^{10}$. Se sabe además que X e Y son independientes. Calcule $\mathcal{P}(X + Y = 2)$.

5. *a)* Dos grandes poblaciones de hombres y mujeres tienen estaturas (H, M) que son v.a tales que $H \rightarrow N(1,7; 0,1^2)$ y $M \rightarrow N(1,6; 0,05)^2$. Si se escoje un individuo al azar y resulta tener estatura inferior a 1,65, calcule la probabilidad que sea mujer. ¿Cómo cambia su respuesta si se sabe que la estatura del individuo es igual a 1,65?

b) El ingreso mensual de las personas (X) puede modelarse por como una variable aleatoria producto de muchas variables independientes entre sí, (como sexo, edad, educación, etc), es decir $X = X_1 \cdot X_2 \ldots X_n$ con $\mathbb{E}(X_i) = \mu_i$ y $Var(X_i) = \sigma_i^2$. Si n es un número grande, determine la densidad de X.

c) La edad en una gran población de adultos es una v.a normal de media 45 años y desviación estándar 9 años.

1) Si de la población se extraen n individuos obteniéndose por lo menos a uno menor a 50 años. Calcule la probabilidad de obtener al menos uno mayor a 50 años.

2) Si se toman dos adultos, ¿Cual es la probabilidad que sus edades difieran en menos de 3 años?

6. La nota de los alumnos del curso MA34A puede ser considerada una v.a normal de media μ y varianza σ^2. Si se sabe que se aprueba con nota mayor o igual a 4, se reprueba con nota menor a 3.7 y se queda pendiente con nota entre 3.7 y 4:

   a) Suponga $\mu = 4,2$, $\sigma^2 = 0,8^2$ y 110 alumnos. Si se elige un grupo de 10 alumnos, sin reposición, calcule la probabilidad que " a lo más dos de ellos estén reprobados y al menos 9 estén aprobados ".

   b) Si del curso se eliminan los reprobados, ¿Cual es la función densidad de la nota de los restantes? Calcule su esperanza.

   c) Suponga μ es desconocido y se escoge una muestra de alumnos de tamaño n (independiente). Determine n de tal forma que la media muestral ($\overline{X}$) difiera de la media poblacional (μ) en menos de 0.5 con probabilidad 0.95.

   d) ¿Cómo cambia **metodológicamente** su respuesta si:?

   1) En a) y en b) $X \to N(4{,}2; 0{,}8^2)$ se cambia por $X \to U(2,6)$?

   2) En c) $X \to N(\mu, 0{,}8^2)$ se cambia por $X \to U(a,b)$ con $2 \leq a < b \leq 6$?

7. Una maquina trabaja un tiempo (antes de fallar) que puede ser modelado como una v.a. e(λ). Cuando falla, la reparación toma un tiempo aleatorio, que se distribuye e(μ). Si la maquina esta buena en t=0, calcule la probabilidad que lo este en el instante t. Indicación: Considere el proceso:

$$X(t) = \begin{cases} 0 & \text{maquina buena en t} \\ 1 & \text{maquina mala en t} \end{cases}$$

   Plantee y resuelva las ecuaciones diferenciales.

8. A una gasolinera que cuenta con solo una bomba de bencina, llegan vehículos según un proceso de Poisson de tasa 15 autos por hora.

   a) Si entre las 12:00 y 13:00 pm. llegaron 15 vehículos, calcule la probabilidad de que entre las 12:50 y 13:00 hayan llegado al menos dos vehículos.

   b) Suponga ahora que el tiempo que se necesita para atender un vehículo es exponencial de media 5 minutos. Si la bomba se esta usando, los clientes pueden desistir (no ingresan y se van); en particular si hay n autos en la gasolinera, la probabilidad de que un cliente potencial que llega desista es q_n.

1) Plantee el diagrama de estados y ecuaciones de balance para el proceso "Numero de vehículos en la gasolinera"
2) Suponiendo

$$q_n = \begin{cases} \frac{n}{3} & n = 0, 1, 2, 3 \\ 1 & n > 3 \end{cases}$$

Resuelva las ecuaciones de balance. Calcule el tiempo promedio que un vehículo permanece en la gasolinera y la proporción de vehículos que llegan pero no ingresan.

9. La sala de emergencia de un consultorio atiende con dos equipos médicos y no admite cola (los pacientes que no logran ingresar a esta sala deber ir a otro consultorio). A la sala llegan dos tipos de pacientes: los pacientes tipo A, a una tasa de 4 por hora y los tipo B, a una tasa de 2 por hora. Cada paciente tipo A que llega recibe atención de algún equipo médico desocupado, demorándose un tiempo exponencial de media 20 minutos. Cada paciente tipo B que entra requiere la atención simultánea de los dos equipos, demorándose un tiempo exponencial de media 45 minutos.
   a) Plantee el proceso a estudiar, indicando los estados, el diagrama y las ecuaciones de balance.
   b) Suponiendo que tiene resueltas las ecuaciones de balance, indique como calculará la proporción de pacientes que no ingresa a la sala, y el tiempo promedio que cada equipo médico está ocioso (considere un turno de 24 horas). ¿Como cambia su modelo (diagrama de estados) si uno de los dos equipos médicos es más lento demorándose en promedio 30 minutos (cuando atiende solo) manteniendose el resto de las condiciones?

10. A una oficina del Registro Civil e Identificación llega gente a sacar su cédula de identidad según un proceso de Poisson de tasa 12 por hora.
   a) Existen dos funcionarios que atienden cada uno según una exponencial de media 8 minutos. Por simplicidad de calculo suponga que una persona ingresa al sistema solo si en él hay menos de 4 personas. Calcule en régimen permanente:
      1) La proporción de personas que no ingresa.
      2) El tiempo promedio que demora una persona en el sistema.
   b) Las autoridades desean cambiar el procedimiento de atención separándolo en dos etapas. La etapa A (pago y llenado de antecedentes) con un funcionario atendiendo según una exponencial de media 4 minutos y la etapa B (foto, firma, huellas) atendida por un funcionario según una exponencial de media 4 minutos. Cada cliente debe pasar secuencialmente por ambas etapas (A-B) y en las dos puede existir cola sin restricción de capacidad. Modele este sistema planteando el proceso de estudio y el diagrama de estados.

11. Los alumnos llegan a un negocio de fotocopias según un proceso de Poisson de tasa 2 por minuto.

a) 1) Si en un intervalo de 5 minutos llegaron 8 alumnos, calcule la probabilidad de que solo uno de ellos haya llegado en el ultimo minuto.
   2) Calcule la probabilidad de que el tiempo entre dos alumnos supere los tres minutos.

b) El negocio funciona con tres fotocopiadoras y la atención de un alumno es exponencial de media 2 minutos. Cuando un alumno llega y observa a cuatro compañeros se va a otro negocio.
   1) Si X_t : N° de alumnos en el negocio; plantee el diagrama de estados y ecuaciones de balance.
   2) Si $P_1 = \frac{\lambda}{\mu}P_0, P_2 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2}P_0, P_3 = \frac{\lambda^3}{6\mu^3}P_0, P_4 = \frac{\lambda^4}{24\mu^4}P_0$, es solución de las ecuaciones, calcule numéricamente el tiempo promedio que demora un alumno en el negocio y la proporción de tiempo ocioso que tienen las maquinas.

c) De las tres fotocopiadoras, dos son corrientes y una especial. Cada fotocopiadora corriente funciona un tiempo exponencial de media 1 hora y su reparación demora una media de 15 minutos atendida por una persona. La fotocopiadora especial funciona un tiempo exponencial de media 1,5 horas y su reparación demora 20 minutos atendida por dos personas. Existen dos personas para reparar las maquinas. Modele el sistema de reparación de fotocopiadoras planteando el proceso en estudio y diagrama de estados