Probabilidades y Procesos Estocásticos. Verano 2007

Profesor Cátedra	:	Fernando Lema
Profesor Auxiliar	:	León Sanz

CLASE AUXILIAR. VERANO 2007
4 DE ENERO 2008

1. Sean X, Y v.a independientes con X, Y distribuidas como una binomial negativa de parámetros 1 y p (Una geométrica de parámetro p). Calcule

$$\mathcal{P}(X = m | X + Y = n)$$

2. Sean X, Y v.a $N(0,1)$ independientes. Usando T.C.V determine la densidad de $Z = \frac{X}{Y}$

3. Una fábrica produce tornillos cuya longitud se puede modelar por una variable aleatoria normal de parámetros μ y σ^2.
   a) Suponga el 16 % mide más de 4.2 cm. y el 31 % mide menos de 3.9 cm, determine μ y σ^2.
   b) Suponga μ =4.1; σ =0.1. Se sacan tornillos hasta obtener uno que mide más de 4.3 cm. Calcule la probabilidad de tener que realizar al menos 18 extracciones.
   c) Suponga μ desconocido. Determine la cantidad de tornillos necesarios para que el promedio de sus longitudes no difiera de μ en menos de 0.01 cm. con probabilidad 0.95.

4. a) Mostrar que si $X \to N(0,1)$, entonces $X^2\ \chi_1^2 = G(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
   b) Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a $N(0,1)$ independientes. Encontrar la f.d.p de la v.a $Z = \sqrt{X_1^2 + \cdots + X_n^2}$.
   c) Para la variable Z de la pregunta anterior, ¿Qué sentido físico tiene cuando $n = 3$?.

Solución pregunta 3, parte c.

Sea X_i="Longitud del tornillo observado en la i-ésima extracción".

Sea $\overline{X} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n}$.

Se busca n suficientemente grande tal que $\mathcal{P}(\left|\overline{X} - \mu\right| < 0{,}01) = 0{,}95$.

Por linealidad de la esperanza y propiedad de los coeficientes que acompañan a la varianza, se obtiene:

$$\overline{X} \to N(\mu, \frac{1}{n}\sigma^2)$$

Notemos que de lo anterior se puede apreciar que $Var\overline{X} \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$ y $\overline{X} \longrightarrow \mu$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

$$
\begin{aligned}
&(1) & \mathcal{P}(\left|\overline{X}-\mu\right| < 0{,}01) &= 0{,}95 \\
&(2) & \mathcal{P}(\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < \frac{\sqrt{n}0{,}01}{\sigma}) &= 0{,}95 \\
&(3) & \mathcal{P}(\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > \frac{\sqrt{n}0{,}01}{\sigma}) &= 0{,}05
\end{aligned}
$$

Usando la tabla:

$$\sqrt{n}0{,}01/\sigma = 1{,}64$$

Luego, tomando $n > \lceil \frac{1{,}64\sigma}{0{,}01} \rceil$ se obtiene lo pedido.