Probabilidades y Procesos Estocásticos. Verano 2007

Profesor Cátedra	:	Fernando Lema
Profesor Auxiliar	:	León Sanz

Tarea 2.

Entrega: Control 2

1. En un ataque aéreo la misión es destruir una pista de aterrizaje. El sector donde cae la bomba queda inutilizado en su ancho si esta cae a lo sumo a 10 metros del eje central de la pista. La distancia del impacto al eje central de la pista es una v.a. con función densidad definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{30+x}{900} & \text{si } -30 \le x \le 0 \\ \frac{30-x}{900} & \text{si } 0 \le x \le 30 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

   a) Si para inutilizar la pista se necesitan por lo menos k impactos. ¿Cuál es la probabilidad de lograr el objetivo si en el ataque se lanzan n bombas?
   b) Si $k = 1$, determine cuantas bombas se deben lanzar para inutilizar la pista con probabilidad $0,99$.

2. Se dice que una variable aleatoria X tiene distribución de Pareto de parámetros X_0,α $(X_0 > 0, \alpha > 0)$ si su función densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha X_0^\alpha}{x^{\alpha+1}} & si\, x \ge X_0 \\ 0 & si\, x < X_0 \end{cases}$$

   a) Calcule E(x) y Var(x)
   b) Si $Y = \ln\left(\frac{X}{X_0}\right)$, determine la densidad de Y
   c) Considere que X representa el ingreso (en miles de \$) mensual de un grupo de individuos con $X_0 = 200$ y $\alpha = 2$. Suponga que de un gran numero de individuos se escogen 5 al azar en forma independiente. Calcule la probabilidad que al menos 4 de ellos tengan ingresos superiores a \$300.000.
   d) Si a todas las personas que ganan menos de \$400.000 se les da un reajuste de un 10 % mientras que a aquellos que ganan más de \$400.000 se les da \$40.000 de reajuste, determine la distribución de probabilidad de la variable aleatoria monto de reajuste y calcule su esperanza.

3. De un mazo de naipes se sacan dos cartas sin reposición, definiendo el vector (X, Y) como X: N° de monos obtenidos. Y : N° de ases obtenidos.
   a) Determine la distribución de probabilidades (X, Y).
   b) Determine las distribuciones marginales de X e Y . Calcule la E(X) y E(Y).
   c) Determine la distribución condicional de X dado Y = y $\forall y \in R_y$ y la distribución condicional de Y dado X = x $\forall x \in R_x$.

d) Determine la distribución de probabilidades de las variables M = H(X, Y) = Max(X, Y); M = H(X, Y) = Min(X, Y)

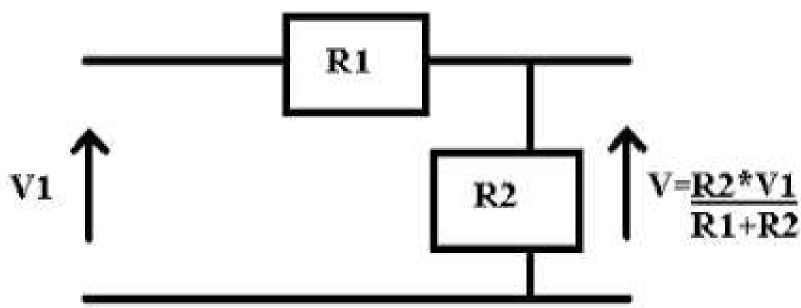
4. La fuerza magnética H en un punto P ubicado a X unidades de un cable con corriente I, queda dada por:

$$H = \frac{2I}{X}$$

a) Si P es un punto variable con X e I, suponiendo que X se distribuye uniforme en el intervalo (2, 4) e I uniforme en el intervalo (10, 20) (ambas variables independientes) calcule la función densidad de H.

b) Calcule la $P(H > 10/X < 3)$.

5. El circuito de la figura es un divisor de voltaje. El voltaje V_1 es constante y vale 1(V). Las resistencias R_1 y R_2 son v.a. independientes uniformes en los intervalos $(1, 2)$ y $(0, 1)$ respectivamente.



a) Calcule la probabilidad que el voltaje resultante sea menor a 0,2(V) para valores de R_2 mayores a 0,1 Ω

b) Determine, usando T.C.V., la función densidad de V.

c) Un instrumento registra correctamente voltajes entre 0,2 y 0,4 (V) en tanto a los mayores a 0,4 les asigna 0,4 y a los menores a 0,2 los ignora (no es capaz de medirlos). Estudie probabilísticamente la v.a. T: tensión (voltaje) registrado por el instrumento.

6. En cierto sector de Santiago los vehículos circulan con velocidades V (km/h) que pueden ser adecuadamente modeladas por una distribucion $U(20, 40)$ (km/h). Por otro lado y debido a los distintos tipos de vehículos, formas de conducir, imprevistos, etc. el rendimiento R (km/lt) para una velocidad V fija queda dado por la función densidad:

$$f_{R/V}(r|v) = \frac{50}{v^2} r \qquad 0 < r < \frac{v}{5}$$

a) Calcule el rendimiento promedio para todos los vehículos que circulan por el sector.

b) Calcule la probabilidad que el rendimiento supere los 4 km/lt para vehículos que circulan a menos de 30 km/h. Son R y V independientes?

7. Suponga que la duración de un equipo sigue una distribución e(λ), es decir:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & si\, x \geq 0 \\ 0 & si\, x < 0 \end{cases}$$

Para efectuar el control de calidad se cuenta con un operario cuya misión es medir la duración de los equipos. Los equipos se ponen a funcionar en t = 0, pero el operario (por flojera) solo se pone a inspeccionar en $t = t_1$, de tal forma que a todo equipo fallado anteriormente le asigna t_1 horas. También por flojera el operario se va temprano (antes que termine el proceso) y a todo equipo que en t_2 (hora en que se va) este bueno le asigna t_2 horas.

   a) Determine la distribución de Y: duración informada por el operario. Calcule E(Y).
   b) Considere ahora que el operario se pone honesto y decide eliminar de su proceso a todo equipo que no haya inspeccionado realmente. Determine la distribución de Z: duración informada por el operario.
   c) Si Y se distribuye con una exponencial de parámetro α independiente de X, calcule P$(Y > kX) \forall k$
   d) Determine la densidad de Z = X + Y

8. Las primeras 5 repeticiones de un experimento cuestan 10[UM] c/u. Las siguientes cuestan 5[UM] c/u. El experimento debe repetirse hasta que se obtenga el primer éxito. Si la probabilidad de éxito es 0,9 y si las repeticiones son independientes, determine el costo promedio total de la operación.

9. La duración T (en horas) de cierta máquina, es una v.a. exponencial de parámetro λ. La máquina tiene costos de funcionamiento de $C1$ (UM) por hora y produce, mientras funciona, un ingreso de C_2 (UM) por hora. Para operar la máquina se requiere un especialista que cobra C_3 UM por hora y que exige ser contratado por un número prefijado de horas (H). El pago del especialista es independiente de si la máquina está o no en funcionamiento.

   a) Sea U la v.a. que denota la utilidad obtenida por el uso de la máquina. Plantee U en función de los datos entregados.
   b) Determine H de tal forma de maximizar la utilidad esperada.
   c) Suponga que $\alpha = 0{,}01$, $C_1 = 6$, $C_2 = 20$, $C_3 = 4$ y que $H = 60$ (no es el óptimo de la pregunta anterior). Determine la distribución de probabilidades de la v.a. U.

10. Un plano esta dividido en rectas paralelas separadas una distancia L_1 una de la otra. Se dispone de una aguja (barra) de largo $L_2 < L_1$ que es lanzada al azar sobre el plano. Calcule la probabilidad que la aguja corte alguna de las rectas. Evalué en $L_1 = L$ y $L_2 = \frac{L}{2}$.

11. En un banco se ha determinado que los clientes piden préstamos por una cantidad x (U.M.) aleatoria, con la distribución :

$$\mathcal{P}(x = k) = \frac{1}{2}^k \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Por otro lado se ha realizado un estudio que indica que una persona pagará una proporción y de lo que solicitó $(x = k)$ donde y tiene función de densidad:

$$f_y(y) = (k+1)y^k \qquad 0 < y < 1$$

Si un cliente es calificado como "seguro" si paga más de 4/5 de lo solicitado:

a) Calcule la probabilidad que un cliente que pidió k U.M. sea "seguro".

b) Si un cliente es "seguro", calcule la probabilidad que haya pedido 2 U.M