

Probabilidades y Procesos Estocásticos. Verano 2007

Profesor Cátedra : Fernando Lema

Profesor Auxiliar : León Sanz

TAREA 1.

ENTREGA: CONTROL 1

1. Considere el alfabeto español compuesto de 27 letras (sin Ch y Ll)
 - a) Si se desea escoger grupos de 10 letras al azar, ¿de cuantas maneras se puede hacer?
 - 1) Sin reposición
 - 2) Con reposición
 - b) Al sacar letras (con reposición) se obtuvo al menos una "S". Calcule la probabilidad que la primera "S" se haya obtenido en la tercera extracción.
 - c) Suponga ahora que se sacaron 10 letras (con reposición) y se obtuvo "MISSISSIPI". ¿Cuántas palabras se pueden formar con las letras obtenidas, de tal forma que no queden 2 o más "I" juntas?
 - d) Elegidas las 10 letras, usted y su mejor amigo(a) juegan sacando letras (de entre 10, con reposición) alternadamente, ganando el que obtiene primero una "P" o una "M". Describa un espacio muestral adecuado para este juego. ¿Cuál es la probabilidad que usted gane si comienza sacando?
2. Considere un mazo de naipes.
 - a) Se extraen 4 cartas al azar con reemplazo. Calcule la probabilidad:
 - 1) Que las 4 sean, rojas o pares.
 - 2) Que las 4 sean rojas, o las 4 sean pares.
 - b) Se extraen 6 cartas sin reemplazo. Calcule la probabilidad:
 - 1) Que al menos 4 sean, rojas o pares.
 - 2) Que al menos 4 sean rojas, o al menos 4 sean pares.
3. Usted y su mejor amigo juegan a la ruleta rusa de forma tal que después de cada intento (disparo) se hace girar la rueda del revolver.
 - a) Si la rueda tiene capacidad para 6 balas y se pone sólo una, calcule la probabilidad que el jugador que comienza el juego muera. Indique el espacio muestral usado.
 - b) Suponga que usted tiene un super revolver con la capacidad que desee (con respecto al número de balas) y que, además, puede elegir la cantidad de balas que se pondrá en el super revolver para jugar. Bajo estas condiciones, ¿es posible que el juego sea equilibrado?
4. Suponga que una persona está situada a N cuadras al sur, y a M cuadras al oeste de la esquina a la cual se quiere llegar.
 - a) ¿Cuántos caminos "inteligentes" existen entre ambos puntos? (Camino "inteligente" se entenderá por aquel que solo consta de desplazamientos que acercan al destino, es decir, unitarios de una cuadra tanto en dirección norte como este).

b) Considere $M=N$. Fijándose que para llegar a destino en este caso, el camino elegido debe pasar por alguna intersección de las que forman la diagonal secundaria del cuadrilátero; calcule la suma de los cuadrados de los coeficientes binomiales sobre N .

Nota: En todo el problema, considere que las calles no terminan dentro del cuadrilátero, o sea, todo camino “inteligente” es susceptible de ser realizado.

5. Mónica Bell, una bella chica que no sabe nada de juegos azar, se encuentra con un grupo de tahúres que se divierten en una cantina. Ellos están jugando póker. Gracias a su belleza, no faltarán los caballeros dispuestos a mostrarle cómo funciona el juego. Ya se acerca uno de ellos y después de los clásicos diálogos, el caballero (que dice conocerse por Tiburón The Beast), explica a la dama lo siguiente:

La baraja de póker contiene 52 cartas, cada carta tiene dos particularidades, que están marcadas con uno de los 13 símbolos siguientes: A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q y R (también se les suele llamar números). La segunda particularidad es pertenecer a uno los siguientes cuatro grupos o palos: Espadas (\spadesuit), Tréboles (\clubsuit), Corazones (\heartsuit) o Diamantes (\diamondsuit).

Cuando se juega al póker se reparten entre los jugadores un conjunto de cinco cartas que suele llamarse una mano de póker. De ésta se puede formar:

- Par, cuando se tienen dos cartas con el mismo número.
- Dos Pares, cuando se tienen dos pares de cartas con el mismo número.
- Trío, tres cartas del mismo número.
- Póker, cuatro cartas del mismo número.
- Full, un trío y un par.
- Color, las cinco cartas del mismo palo o pinta.
- Escala, es cuando los cinco números son sucesivos. El as (A), funciona como 1 o 14.
- Escala color, cuando tengo una escala de la misma pinta.

La chica le pregunta al tiburón. ¿Cuál es la mano de póker que más valor tiene? Este responde que la importancia de cada mano depende del número de posibilidades en las que se obtiene dicha mano. The Beast le quiere mostrar a la hermosa chica cómo puede calcular este número de posibilidades.

- a) Indique el espacio muestral.
- b) Calcule la probabilidad de obtener ninguna mano.
- c) Calcule la probabilidad de obtener un par.
- d) Calcule la probabilidad de obtener dos pares.
- e) Calcule la probabilidad de obtener un trío.
- f) Calcule la probabilidad de obtener Escala, sin Color.
- g) Calcule la probabilidad de obtener Color, sin Escala.

- h) Calcule la probabilidad de obtener Full.
- i) Calcule la probabilidad de obtener Póker.
- j) Calcule la probabilidad de obtener Escala y Color.
- k) Plantee una nueva formulación para el espacio muestral, donde sólo importe el juego obtenido.

6. Para predecir el tiempo un día es clasificado como seco o lluvioso. Por experiencia se sabe que la probabilidad que un día sea igual al anterior se asume constante e igual a p .

- a) Si el 1 de abril es seco con probabilidad β , muestre que la probabilidad que el n -ésimo día del año (contado a partir del 1 de abril) sea seco (P_n) queda dado por:

$$P_n = \left[\left(\beta - \frac{1}{2} \right) (2p - 1)^{n-1} \right] + \frac{1}{2}$$

- b) Si el 16 de abril esta seco calcule la probabilidad que el 14 de abril también lo haya estado. Para esto considere $\beta = 1$, $p = \frac{9}{10}$.

7. Cuando en una encuesta se desea preguntar por algún tema delicado como el aborto (o infidelidad, violencia, divorcio, etc), y que las personas no estén dispuestas a contestar abiertamente, se puede usar el siguiente procedimiento encubierto para estimar la probabilidad p que una persona este a favor:

Al encuestado se le presentan dos preguntas:

A: ¿Esta de acuerdo con el aborto?

B: ¿Esta en desacuerdo con el aborto?

y se le pide que lance (en secreto) un dado perfecto, de modo tal que si sale mayor a cuatro contesta A y en caso contrario contesta B. Por ultimo lo único que el encuestado responde es Sí o No.

- a) Describa un espacio muestral para este procedimiento.
- b) Si una persona respondió Sí, ¿cual es la probabilidad que este a favor del aborto?
- c) Si a usted, como encargado de la encuesta, le entregan como resultado la proporción (probabilidad) de personas que respondió Sí (P_S), calcule la proporción (probabilidad) de personas que esta a favor del aborto.

Obs: Suponga que la encuesta es aplicado a un gran número de personas y que estas son honestas al responder.

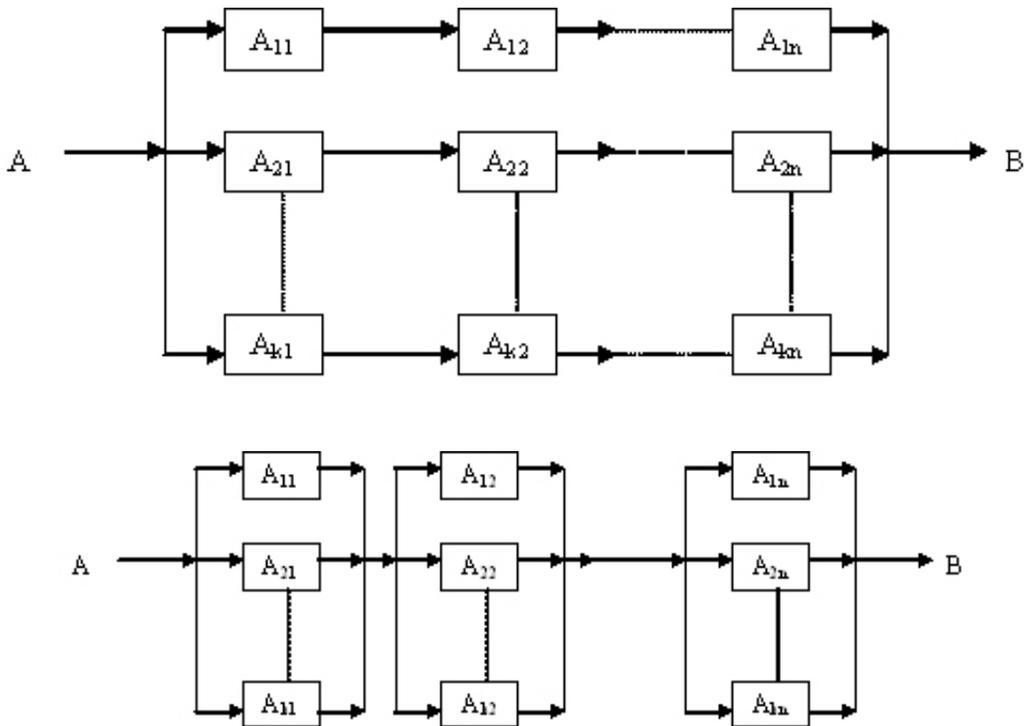
8. Cuando una máquina productiva está correctamente ajustada produce el 80 % de los artículos de alta calidad y el resto de calidad media, en cambio cuando la máquina está mal ajustada sólo produce el 40 % de alta calidad. Suponga que el 30 % de los días la máquina está mal ajustada.

- a) Se escogen 3 artículos producidos un día cualquiera encontrándose 2 de alta calidad y 1 de calidad media. Calcule la probabilidad que ese día la máquina estuviera correctamente ajustada.

- b) Bajo el mismo enunciado original, suponga ahora que un operario revisa todos los artículos sacando los de calidad media según su parecer. Si un artículo es de alta calidad existe una probabilidad 0.05 que el operario la considere de calidad media; en cambio, si es de calidad media lo detecta con probabilidad 0.9.

Los artículos puestos a la venta son aquellos catalogados de alta calidad por el operario. Si un artículo es comprado por un cliente que reclama diciendo que le vendieron un artículo de calidad media, ¿cuál es la probabilidad de que tenga la razón?

9. Considere los circuitos:



Las componentes A_{ij} $i \in \{1, \dots, k\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ tienen una probabilidad p de funcionar ($(1 - p)$ de fallar) y lo hacen en forma independiente.

Calcule para ambos circuitos la probabilidad que exista flujo desde el punto A hasta el punto B .