



Guía Integrales

P1.- Calcular $\int_S dx dy$ donde S es el dominio limitado por:

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{h^2} - \frac{y^2}{k^2}.$$

Ind: Use el cambio de variable $x = ar \cos(\phi)$, $y = br \sin(\phi)$.

P2.- Considere la función:

$$f(x, y, z, t) = \int_{e^{x+y+z}}^{e^{1+|y+x|}} (xt + \log_z t + z) dt.$$

Calcular: $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$, $\frac{\partial f}{\partial t}$ en aquellos puntos donde existan.

P3.- Considere la función:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(\sigma, s) d\sigma ds.$$

Demuestre que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= F(x, t). \\ u(x, 0) &= f(x). \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= g(x). \end{aligned}$$

P4.- Considere las funciones:

$$F(x) = \int_0^{h(x)} f(x+t, xt) dt, \quad G(x, y) = \int_0^{y^2} g(x, y, z) dz.$$

Calcule $F'(x)$ y $\frac{\partial G}{\partial y}(x, y)$.

P5.- Sea $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un **Difeomorfismo** de clase $\mathcal{C}^1$ (es decir, un homeomorfismo con T y T^{-1} de clase $\mathcal{C}^1$) que satisface que $T(B) \subseteq B$, donde B es la bola unitaria cerrada y $|\det DT(x)| < 1$ para todo $x \in B$. Demuestre que para toda función continua $f : B \rightarrow \mathbb{R}^n$ se tiene que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{T^k(B)} f(x) dx = 0.$$

donde T^k es T compuesta consigo misma k veces.

P6.- Sea B_n la bola unitaria en $\mathbb{R}^n$. Muestre que:

$$Vol(B_4) = 2 \int_{B_3} \sqrt{1 - (x^2 + y^2 + z^2)} dx dy dz.$$

Tomando coordenadas esféricas muestre que el volumen de B_4 es igual a:

$$Vol(B_4) = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \sin(\phi) \sqrt{1 - r^2} dr d\theta d\phi.$$

y concluya que $Vol(B_4) = \pi^2/2$. En general muestre que el volumen de la bola de radio r es $r^4\pi^2/2$.

P7.- Calcule el volumen de la región definida por $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + y^2 \leq 1, z^2 + x^2 \leq 1\}$.

P8.- Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$, pruebe que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

utilizando el **Teorema de Fubini**.

Ind: Defina la función $g(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$, suponga por contradicción que existe (x_0, y_0) tal que $g(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) > 0$, argumente que esto es suficiente para decir que existe un rectángulo R conteniendo a (x_0, y_0) tal que $g > 0$ en R . Integrando en este rectángulo concluya la demostración.

P10.- Calcule el volumen de la región $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \sqrt{y^2 + x^2} \leq z\}$.

P11.- Calcular el volumen encerrado por el cilindroide de ecuación $4x^2 + y^2 = a^2$, y los planos $z = 0$, $z = my$ donde $m \geq 0$, considere además $z \geq 0$.

P12.- Para calcular la integral:

$$I = \int_0^{a \sec \beta} \int_{y \cot \beta}^{\sqrt{a^2 - y^2}} \ln(x^2 + y^2) dx dy, \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}.$$

(a) Describa analíticamente el dominio de integración D , y haga un dibujo de él.

(b) Utilice un cambio de coordenadas apropiado de acuerdo a la geometría de D , para calcular I .

P13.- Evaluar la siguiente integral:

$$\iiint_R \left(1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)\right)^{-1/2} xyz dx dy dz.$$

Donde R es la región del primer octante, acotada por el elipsoide de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ y los planos coordenados.

Ind: Primero transforme el elipsoide en una esfera para trabajar en coordenadas esféricas.

P14.- Sea $a > 0$, calcule el volumen de la zona encerrada por las curvas:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 &= a^2. \\x^2 + y^2 &= ax.\end{aligned}$$

Ind: Complete cuadrados en la segunda ecuación.

P15.- Calcular la integral:

$$\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} dx dy dz.$$

donde $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, 1/2 \leq z \leq 1\}$.

P16.- Calcular la integral doble:

$$\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{y/2}}^1 e^{x^2} dx dy.$$

Ind: Dibujar la región, para cambiar el orden de integración.

P17.- Calcular el volumen del elipsoide dado por:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

P18.- Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por la fórmula $f(x, y) = y(3\sin^2(x) + 1)^{1/2}$, se pide calcular la integral doble:

$$\iint_A f(x, y) dx dy.$$

Donde A es la región descrita por $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

P19.- Considere la siguiente integral iterada:

$$I_n = \int_0^a \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \cdots \int_0^{x_{n-1}} dx_n dx_{n-1} \cdots dx_2 dx_1.$$

Donde $n \geq 1$ es un número natural y a es una constante real.

(a) Describa analíticamente la región de integración, denótela como $\Delta_n(a)$.

(b) Probar usando inducción matemática que $I_n = \frac{a^n}{n!}$.

(c) Sea f una función de clase $\mathcal{C}^2$ en $\mathbb{R}$, calcule la integral:

$$\int_{\Delta_2(1)} f''(ax_1 + bx_2) dx_2 dx_1 \quad a, b \neq 0.$$

(d) Sea g una función integrable en $\mathbb{R}$, demostrar que:

$$\int_{\Delta_n(x)} f(x_n) dx_n \cdots dx_2 dx_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} g(t) dt.$$

Ind: Use inducción sobre n , en el paso inductivo deberá usar Fubini.

P20.- El objetivo de este problema es calcular la integral impropia doble:

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{B(\vec{0}, R)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{R \rightarrow \infty} I_R.$$

Donde el conjunto $B(\vec{0}, R)$ es la bola de centrada en el origen de radio R en $\mathbb{R}^2$.

(a) Use la transformación a coordenadas polares para calcular I_R .

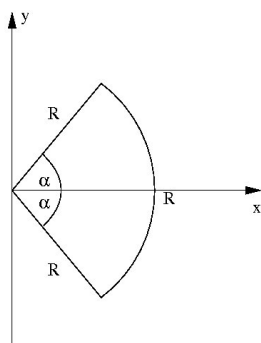
(b) Calcular el límite, para deducir el valor de I .

P21.- Sea $\rho : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua que representa la densidad de masa de la región A , se define el **Centro de Masa** de A como el vector:

$$G(A) = (x_G, y_G) = \left(\frac{\iint_A x \rho(x, y)}{\iint_A \rho(x, y)}, \frac{\iint_A y \rho(x, y)}{\iint_A \rho(x, y)} \right).$$

La integral $\iint_A \rho$ representa la masa de la región A .

(a) Determine el centro de masa de la siguiente región en $\mathbb{R}^2$, suponiendo que la densidad de masa es directamente proporcional a la distancia del punto (x, y) al origen.



(b) La extensión del concepto de centro de masa a $\mathbb{R}^3$ es la natural. Hallar el centro de masa de la región R descrita por el conjunto

$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$, suponiendo densidad de masa constante ρ_0 .

Ind: Aproveche la simetría.

P22.- Calule el volumen de la región R definida por el conjunto

$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 9, y + 2z \leq 6, y \geq 0\}$.

P23.- Considere la siguiente integral en $\mathbb{R}^2$:

$$I = \int_0^1 \int_0^y (x^2 + y^2) dx dy + \int_1^2 \int_0^{2-y} (x^2 + y^2) dx dy.$$

(a) Calcular I directamente.

(b) Dibujar la región de integración y recalcule I cambiando el orden de integración.

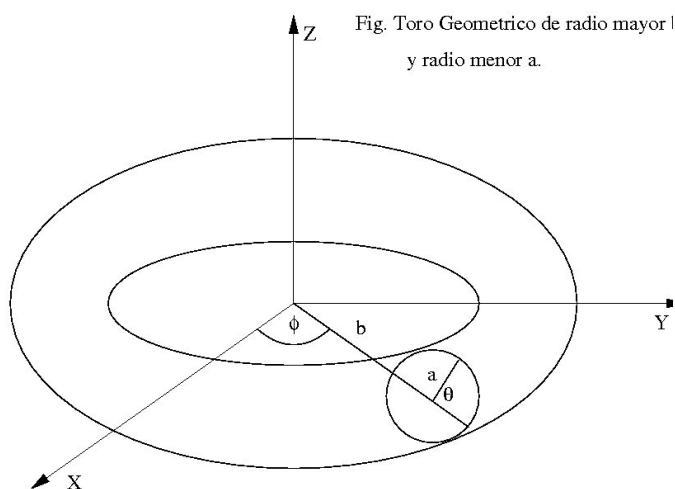
P24.- Calcular la integral doble:

$$\iint_R (x^2 + y^2) dx dy.$$

Donde la región R está definida por el conjunto

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, y \geq 1, x^2 + y^2 \leq 4\}$$

P25.- Un toro geométrico se obtiene rotando en torno al eje Z un círculo de radio $a > 0$, perpendicular al plano X - Y , cuyo centro dista una distancia $b > a$ del eje de rotación Z .



- Determine un punto cualquiera de coordenadas (x, y, z) perteneciente al toro, en términos del cambio de variables que sugiere la figura.
- Utilizando la transformación de coordenadas anterior, calcular el volumen del toro en función de los parámetros a y b .

P26.- Círculo de Mohr

Consideremos el área A y los ejes x e y como muestra la figura.

Supongamos que se conocen (son números reales conocidos) los momentos y el producto de inercia del área A para los ejes x e y , definidos por:

$$I_x = \int_A y^2 dx dy, \quad I_y = \int_A x^2 dx dy, \quad P_{xy} = \int_A xy dx dy.$$

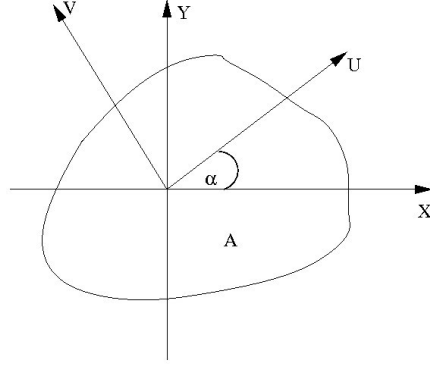
Con respecto a los nuevos ejes u y v , que se obtienen de rotar los ejes originales un ángulo α ($0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$) respecto al origen, se pide:

- Mostrar que:

$$I_u = I_x \cos^2 \alpha - 2P_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + I_y \sin^2 \alpha.$$

$$I_v = I_x \sin^2 \alpha + 2P_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + I_y \cos^2 \alpha.$$

$$P_{uv} = I_x \sin \alpha \cos \alpha + P_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - I_y \sin \alpha \cos \alpha.$$



con ello muestre que $I_u + I_v = I_x + I_y$.

(b) Utilizando propiedades trigonométricas conocidas, de los resultados anteriores deduzca que:

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos(2\alpha) - P_{xy} \sin(2\alpha).$$

$$I_v = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos(2\alpha) + P_{xy} \sin(2\alpha).$$

$$P_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin(2\alpha) + P_{xy} \cos(2\alpha).$$

con ello muestre que:

$$(I_u - I_{pro})^2 + P_{uv}^2 = R^2.$$

donde $I_{pro} = \frac{I_x + I_y}{2}$, $R = \left(\left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + P_{xy}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Por lo tanto, se define una circunferencia para las variables (I_u, P_{uv})

(c) Finalmente demuestre con ayuda de lo último, que los ángulos $\alpha_{\max}$ y $\alpha_{\min}$ (maximizando y minimizando I_u respectivamente) verifican que:

$$\tan(2\alpha) = -2 \frac{P_{xy}}{I_x - I_y}.$$

si se asume $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$ e $I_x \neq I_y$.

Mostrar también que:

$$I_{\max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \left(\left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + P_{xy}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$I_{\min} = \frac{I_x + I_y}{2} - \left(\left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + P_{xy}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

P27.- Hallar el volumen del sólido que está al interior de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y fuera del cilindro $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

P28.- Sea $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Si bien esta función no está definida en el origen, se podría intentar definir la integral de f sobre la bola unitaria B a través de un proceso límite. Haciendo una analogía con el caso de una variable, la idea consiste en definir:

$$\int_B f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B \setminus B(0, \varepsilon)} f.$$

donde $B(0, \varepsilon)$ es la bola de centro 0 y radio ε . Supongamos que existen constantes $a \in \mathbb{R}$ y $C > 0$ tales que:

$$|f(x, y, z)| \leq \frac{C}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{a}{2}}}.$$

¿Para qué valores de a tiene sentido la definición de arriba?.

P29.- Considere la región $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1, (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$ y la transformación de coordenadas T definida por:

$$(u, v) \longrightarrow T(u, v) = \left(\frac{u}{u^2 + v^2}, \frac{-v}{u^2 + v^2} \right) = (x, y).$$

(a) Dibuje D , luego encuentre y dibuje Ω tal que $T(\Omega) = D$. Es decir determine $\Omega = T^{-1}(D)$, la pre-imagen del conjunto D .

(b) Usando el **Teorema del Cambio de Variable** calcule la siguiente integral, verificando que T cumple las hipótesis necesarias:

$$\int_D \frac{x}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Ind: Para ver que T es invertible, determine directamente una fórmula para la inversa. Luego en sus cálculos, le será útil la siguiente primitiva:

$$\int \ln(x^2 + a) dx = x \ln(x^2 + a) - 2x - 2\sqrt{a} \arctg\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) \quad a > 0.$$

P30.- Considere la región $R \subseteq \mathbb{R}^2$ descrita por el conjunto $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, 0 \leq x \leq 2, x \geq y\}$ y la integral:

$$I = \int_R \frac{dxdy}{\sqrt{(x-y)^2 + 2(x+y) + 1}}$$

(a) Dibuje la región R .

(b) Encontrar $T^{-1}(R)$ donde la transformación T está definida como:

$$T(u, v) = (u(1+v), v(1+u)) = (x, y).$$

(c) Analice el uso de T como transformación de coordenadas para resolver I .

(d) Calcule I usando el **Teorema del Cambio de Variable**.

P31.- Sea R la región definida por el trapecio de vértices $(a, 0), (b, 0), (0, b), (0, a)$, $0 < a < b$. Dada la transformación de coordenadas:

$$T(u, v) = (u(1 - v), uv) = (x, y).$$

- (a) Dibuje la región R y obtener $T^{-1}(R)$ justificando claramente sus cálculos.
- (b) Calcule $DT(u, v)$ y analice el uso de T como transformación de coordenadas.
- (c) Expresé la siguiente integral usando el **Teorema del cambio de Variable** y calcúlela:

$$\int_R \frac{\sqrt{x+y}}{2\sqrt{(x+y)^3+y}} dx dy.$$

P32.- Considere la función $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$, y la transformación de coordenadas $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$(u, v) \longrightarrow T(u, v) = \left(\frac{u}{u^2 + v^2}, \frac{-v}{u^2 + v^2} \right) = (x, y).$$

Demostrar que el cambio de variables deja invariante la integral:

$$\iint_{T(R)} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy.$$

P33.- Sea $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, y \geq x, y^2 - x^2 \leq 1, xy \geq a, xy \leq b\}$ para $0 < a < b$. El objetivo de este problema es calcular la integral:

$$\int_R (y^2 - x^2)^{xy} (x^2 + y^2) dx dy.$$

Usando el cambio de variables $xy = u$, $y^2 - x^2 = v$. Para ello:

- (a) Dibuje R . Luego encuentre y dibuje Ω en el plano $u-v$, tal que $T^{-1}(R) = \Omega$, el conjunto pre-imagen.
- (b) Calcule la integral propuesta usando el **Teorema del Cambio de Variable**, para ello observe que a Ud se le entrega la transformación de coordenadas inversa, es decir:

$$(x, y) \longrightarrow T^{-1}(x, y) = (xy, y^2 - x^2) = (u, v)$$

Ind: Cuando aplique el Teorema use los siguientes resultados:

- (1) $D(T^{-1}) = (DT)^{-1}$.
- (2) Si $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ entonces $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

P34.- Considere la región definida por el conjunto

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 - 2y \geq 0, x \geq 0, y \geq 0\}$$

y la transformación de coordenadas inversa T^{-1} definida por:

$$(x, y) \longrightarrow T^{-1}(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 + y^2 - 2y) = (u, v).$$

(a) Dibuje R , luego encuentre y dibuje Ω en el plano u - v tal que $T(\Omega) = R$.

Es decir determine $\Omega = T^{-1}(R)$, la pre-imagen del conjunto R .

(b) Usando el **Teorema del Cambio de Variable** calcule la siguiente integral:

$$\int_R x e^y dx dy.$$

P35.- Se define la región $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, -x \leq y \leq x^2\}$.

(a) Calcular, sin usar algún cambio de variables:

$$I = \int_S \frac{1}{\sqrt{1+4x+4y}} dx dy.$$

(b) Se define la transformación de coordenadas $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ como:

$$T(u, v) = (u + v, u^2 - v) = (x, y).$$

Se pide:

(b.1) Encontrar $R \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $T(R) = S$.

(b.2) Expresar I como una integral sobre R .

(b.3) Calcular el valor de esta última integral.

P36.- Sea S la región del primer cuadrante encerrada por las curvas:

$$y = e^x, \quad y = e^{2x}, \quad y = 2 - x, \quad y = 2 - 4x.$$

Considere el cambio de variables inverso definido por:

$$u = ye^{-x}, \quad v = \frac{2-y}{x}.$$

Utilizando el **Teorema del Cambio de Variable** calcular la integral:

$$\iint_S \frac{yx + 2 - y}{xy(2 - y)} dx dy$$

P37.- Considere la región descrita por el siguiente conjunto:

$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x, yx \geq \sqrt{3}, x \geq 0, y \geq 0\}$
y la transformación de coordenadas inversa T^{-1} definida por:

$$(x, y) \longrightarrow T^{-1}(x, y) = (xy, x^2 + y^2) = (u, v)$$

(a) Dibuje R , luego encuentre y dibuje Ω en el plano u - v tal que $T(\Omega) = R$.
Es decir determine $\Omega = T^{-1}(R)$, la pre-imagen del conjunto R .

(b) Obtenga $T(u, v)$, para ello primero determine las expresiones $x + y$, $x - y$ en función de u y v .

(c) Usando el **Teorema del Cambio de Variable** calcule la siguiente integral:

$$\int_R xy(y^2 - x^2) dx dy.$$

Ind: Recuerde que $D(T^{-1}) = (DT)^{-1}$ y que si $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ entonces se tiene que: $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.