Guía de Problemas Control #3

1.- Nos proponemos determinar el potencial eléctrico de todos los puntos del espacio ubicados a una distancia "r" de un punto fijo. Para ello debemos resolver la ecuación en derivadas parciales siguiente:

$$\nabla^2 \Psi = 0 \qquad (*)$$

donde $\nabla^2 \Psi = \dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$

Considere el cambio de variables a coordenadas esféricas:

$$x = r sen\theta \cos\phi$$
$$y = r sen\theta sen\phi$$
$$z = r \cos\theta$$

a) Demuestre que (*) bajo el cambio de variables se transforma en:

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{r^2 sen\theta}\left[sen\theta \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen\theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{sen\theta}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2}\right] = 0$$

b) Suponga que el potencial sólo depende de la distancia al origen del sistema de coordenadas, es decir, $\Psi(r,\theta,\phi) = V(r)$

   i) Determine la ecuación que permite calcular el potencial *V(r)*.

   ii) Calcule la solución general para el potencial eléctrico, resolviendo la ecuación obtenida en i).

2.- Suponga que se desea minimizar la siguiente función objetivo:

$$f(x) = x^2 + (y-2)^2 + z^2$$
$$s.a.$$
$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$
$$x^2 + z^2 - 1 = 0$$

i) Interprete geométricamente este problema. (2 ptos.)

ii) Resuélvalo (encuentre el mínimo)

3.- Sea $f : R^2 \to R$ de clase $C^2(R^2)$. Se considera la ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \qquad (1)$$

a) Sea $j : R^2 \to R^2$ $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u = x + y \\ v = 2x + y \end{pmatrix}$ un cambio de variables.

Muestre que la función $g : R^2 \to R$ definida por $g(u,v) = (f \circ j^{-1})(u,v)$ está bien definida.

b) Usando que $f(x,y) = (g \circ j)(x,y)$ calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

c) Calcule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$

d) Muestre que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$$

e) Sabiendo que el conjunto de funciones de $R^2 \to R$ que cumple

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) = 0 \qquad \forall (u,v) \in R$$

es $\left\{ g : R^2 \to R \,/\, g(u,v) = \Psi_1(u) + \Psi_2(v) \right\}$ con $\left\{ \Psi_1(u), \Psi_2(v) : R \to R \quad C^2 \right\}$

Encuentre una expresión para la solución general de (1) , $f(x,y)$ en términos de Ψ_1 y Ψ_2 .

f) Encuentre una solución particular cualquiera, que no sea la función nula ni un polinomio.

4.- Resuelva el problema:

$Max.sen(x/2)sen(y/2)sen(z/2)$ sujeto a : $x + y + z = p$.

5.- Considere el siguiente problema de optimización:

P) Max $x + 2y$
s.a. $(x,y) \in Q$

donde $Q \subset R^2$ está definido por:

$\left\{ (x,y) \in R^2 / -2x + y \le 2; x + y \le 7; -x + y \le 3; 2x + y \le 11; x \ge 0; y \ge 0 \right\}$

Resuelva gráficamente el problema P) en términos de las curvas de nivel y el gradiente. Justifique detalladamente!!

6.- Sea Q una matriz simétrica de nxn. Considere la función $f : R^n \to R$ definida por:
$f(x) = < Qx, x >$ (producto punto).

i) Demuestre que f admite un mínimo x^* sobre la esfera de radio unitario y que se tiene $Qx^* = l x^*$ para algún l real.

ii) Considere ahora el mínimo de f, x^{**} sobre la parte de la esfera unitaria ortogonal a x^* de la parte i). Demuestre que existe un escalar m tal que $Qx^{**} = mx^{**}$ y $l < m$.

7.- Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} &\text{Min} \quad x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \\ &\text{s.a.} \quad x_1 x_2 x_3 \ldots . x_n = 1 \\ &\qquad\quad x_i > 0 \quad i = 1,\ldots,n \end{aligned}$$

a) Resuelva este problema. Justifique sus pasos.
b) Use el resultado de la parte a) para probar que:

Si $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ entonces:

$$(a_1 \ldots . a_n)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Interprete el resultado.

8.-
a) Determine los máximos, mínimos y puntos silla de la siguiente función:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2 y^2}$$

b) Determine la recta normal a la superficie de ecuación $3x + y^2 - z^2 = 0$ en el punto (3,0,3). ¿En qué otro punto la recta intersecta a la superficie?
c) Encuentre la aproximación lineal de $f(x, y) = (20 - x^2 - 7y^2)^{1/2}$ en torno a $(2,1)$ y úsela para aproximar el valor de $f(1.95;1.08)$

9.- Sea $F : R \to R$ una función de clase $C^2(R)$. Se define $f : R^2 \to R$ por:
$f(x, y) = F\left(\frac{y}{x}\right)$. Se pide:

i) Calcular Δf.

ii) Determine todas las funciones $F : R \to R$ tales que: $\Delta f = 0$, $F(0) = 0$, $F(1) = 1$.

10.- Sean $\boldsymbol{j},\boldsymbol{y} : R \to R$ dos funciones arbitrarias de Clase $C^2(R)$.

Se define $z(x,y) = x\boldsymbol{j}\left(\dfrac{y}{x}\right) + \boldsymbol{y}\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Calcular el valor de la siguiente expresión:

$$E = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

11.-

a) Encuentre las dimensiones de la caja rectangular de mayor volumen, inscrito en el elipsoide de ecuación $9x^2 + 36y^2 + 4z^2 = 36$ y cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados (ver figura)

b) Considere el problema de maximizar y minimizar la función:

$$f(x,y) = x^4 - y^2(1 + x^2)$$

sujeto a la restricción $x^2 + y^2 = 4$

i) Existe solución en cada caso?. Justifique
ii) Resuelva
iii) Visualizar geométricamente.

12.- Demuestre que en un triángulo de vértices A B y C, hay un punto P (interior) tal que la distancia $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ es mínima, donde P es la intersección de las medianas.

13.- Suponga que la función f satisface $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$ para todo t, donde n es un entero positivo y f es de clase $C^2(R^2)$

Verifique que la función satisface $$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf(x,y)$$

14.- Sean $f, g : R \to R$ funciones de clase $C^2(R)$.
Sea $F(x,y) = f(x + g(y))$.
Calcule $\nabla F(x,y)$ y probar que $$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

15.- Una empresa desea abastecer de un cierto producto, a dos ciudades A y B, distantes a 100 Km. entre sí. Para ello instalará una fábrica en algún punto entre ellas. Supongamos que P_A y P_B son los precios unitarios del producto en A y B, además q_A y q_B son las cantidades que se venden en A y B respectivamente, en un mes.

Es claro que, si más unidades se desean vender el precio debe ser menor, luego a medida que q_A crece, P_A decrece. (idem para q_B y P_B)

Un estudio econométrico permitió determinar la ecuación de demanda en ambas situaciones

$$P_A = 5000 - 2q_A \qquad P_B = 5250 - 3q_B$$

Además un estudio de costo permitió establecer que el costo de producir q unidades es:

$$C(q) = 2000q + q^2$$

Por último, si la fábrica se sitúa a $\boldsymbol{z}$ km. de A el costo de transporte de q_A unidades hacia A y q_B unidades hacia B es:

$$T(q_A, q_B, z) = 4zq_A + 5(100 - z)q_B$$

Determine q_A , q_B , P_A , P_B y z de modo de maximizar los beneficios de la empresa en un mes.

16.- Sean l, w, h la longitud, ancho y alto de una caja, que varían con el tiempo. En cierto instante las dimensiones son $l = 1mt.$ y $w = h = 2mt.$ Por otro lado l y w crecen a una tasa de 2m/s, mientras h decrece a una tasa de 3m/s. Se pide determinar, en dicho instante, las tasas de variación de:

i) El volumen.
ii) La superficie
iii) La longitud de la diagonal

17.- Determine si existen máximos y mínimos de la siguiente función en el dominio que se indica:

$$g(x, y) = \frac{x(1 - x^2 - y^2)^{1/2}}{y}$$ sobre $D \subset R^2$, definido por:

$(x, y) \in R^2$ tal que $x^2 + y^2 \leq 1$, $y > 0$ y $(x, y) \neq (0,0)$

18.- En una fábrica, la producción Q es función del capital invertido C y de la cantidad de trabajo T. Si el precio del trabajo es p, el del capital q y la compañía solamente puede gastar A pesos. ¿Cuál es la cantidad de capital y de trabajo que maximiza la producción? Aplicar su resultado anterior al modelo de Cobb-Douglas, para el cual la función de producción es $Q(C,T) = \boldsymbol{b}C^{a}T^{1-a}$, con $\boldsymbol{b} > 0$ y $0 < \boldsymbol{a} < 1$.

19.- Una empresa minera posee m yacimientos. El mineral extraído de cada uno de ellos tiene n posibles puertos de embarque.
Se sabe que el costo de transportar una tonelada desde el yacimiento $i(1 \leq i \leq m)$ al puerto $j(1 \leq j \leq n)$ es $c_{i,j}$.
El yacimiento i produce mensualmente a lo más s_i toneladas. Esta empresa debe embarcar mensualmente por el puerto j la cantidad de a lo menos F_j toneladas. Todo lo producido se embarca.
Formule el problema de optimización que permita calcular las cantidades de minerales a transportar desde cada yacimiento a los distintos puertos de tal manera de minimizar el costo de transporte en el mes.

20.- Resuelva gráficamente el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 2x_1 - x_1^2 + x_2 \\ & \\ \text{s.a.} & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & 3x_1 - 2x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

21.- Encuentre la mínima distancia en R^2 entre las dos figuras de ecuación:

$$x^2 + 2y^2 = 1 \qquad\qquad x + y = 4$$

Ilustre gráficamente y compruebe sus resultados.

22.- Sea $f : \Omega \subseteq R^2 \to R^2$ una función de clase $C^2(\Omega)$, definida por:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$$

Sean además los conjuntos:

$A = \{(x,y) \in \Omega / u(x,y) = c_1\}$ (curva de nivel de u).
$B = \{(x,y) \in \Omega / v(x,y) = c_2\}$ (curva de nivel de v).
Probar que si $(x_0, y_0) \in A \cap B$ es tal que $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$ y $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, y si además:
$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ sobre Ω., entonces las curvas de nivel de u y v son ortogonales en (x_0, y_o).

23.- Sea $f : R^2 \to R$ de clase $C^2(R^2)$. Considere la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \qquad (1)$$

Nos proponemos determinar todas las soluciones de la ecuación (1), mediante el procedimiento siguiente:

a) Sea $f : R^2 \to R^2$ un cambio de variable definido por $\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u = x + vt \\ w = x - vt \end{pmatrix}$

Muestre que la función $g : R^2 \to R$ definida por $g(u,w) = (f \circ f^{-1})(u,w)$ está bien definida y que es de clase $C^2(R^2)$. (1 punto)

b) Usando el hecho que $f(x,t) = (g \circ f)(x,t)$ demuestre que la ecuación (1) se transforma en:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial w}(u,w) = 0 \quad (2) \qquad \forall (u,w) \in R^2$$

(2,5 puntos)

c) Determine la solución general de la ecuación (2) y deduzca una expresión general para $f(x,t)$ (solución de la ecuación 1). Encuentre una solución particular para f que no sea la función nula, ni un polinomio. (2,5 puntos)

24.- Sean $\begin{array}{l} f : R^n \to R \\ .....y \to f(y) \end{array}$ una aplicación dos veces diferenciable y $\begin{array}{l} T : R^n \to R^n \\ .....x \to T(x) = Tx \end{array}$ una aplicación lineal.

Se define $F(x) = f \circ T(x)$

a) Demuestre que:

$$\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_k \partial x_j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 f(Tx)}{\partial y_l \partial y_i} T_{lk} T_{ij}$$

En que $T = (T_{lk})_{l,k=1}^{n}$ es la matriz representante de T respecto a la base canónica.

b) Si T es una transformación ortonormal, es decir, $T^{-1} = T^t$, demuestre que :

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_j^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f(Tx)}{\partial y_i^2}$$

c) Si T es una transformación de Lorentz, es decir, $T^{-1} = ST^t S$ donde:

$$S = (S_{kj})_{k,j=1}^{n} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ . & 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & 0 & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & 0 & . \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{n.columnas} n\ filas$$

Demuestre que:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} S_{kj}\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_k \partial x_j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} S_{il}\frac{\partial^2 f(Tx)}{\partial y_i \partial y_l}$$

Puede serle útil (no lo demuestre):

a) Si T es una transformación de Lorentz, entonces T^{-1} es una transformación de Lorentz.

b) $S^2 = I$ (matriz Identidad)

25.- Encontrar las dimensiones del paralelepípedo de base rectangular (con aristas paralelas a los ejes coordenados) de máximo volumen que puede ser contenido en un elipsoide de revolución macizo de ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad\qquad a>b$$

26.- Construya una aproximación polinomial de segundo orden en torno a (0,0) para la función $j : R^2 \to R$ definida por:

$$j(x,y)=\frac{1}{(3+x^2+y^2)^{1/2}}$$

27.- Para las siguientes funciones:

$$f(x,y)=\frac{(1-x^2-y^2)^{1/2}}{x^2+y^2} \quad \text{sobre } D=\{(x,y)\in R^2 / x^2+y^2 \leq 1, (x,y)\neq(0,0)\}$$

y

$$g(x,y)=\frac{x(1-x^2-y^2)^{1/2}}{y} \quad \text{sobre } D=\{(x,y)\in R^2 / x^2+y^2 \leq 1, y \succ 0, (x,y)\neq(0,0)\}$$

i) Determine si existen máximos y/o mínimos de estas funciones en los dominios que se indican. (5 ptos)

ii) Determine si los dominios son convexos, cerrados, abiertos y/o acotados.

28.- Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$2x\frac{\partial f}{\partial y}+x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=2x^2 y$$

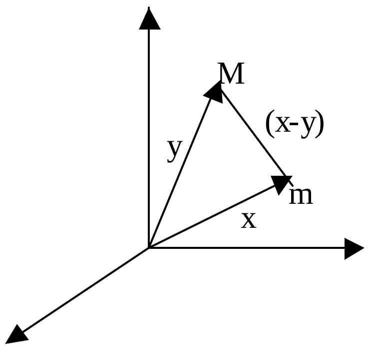
con las condiciones de borde:

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)=\cos y$ $\qquad\qquad$ $f(x,0)=2x$

29.- Una de las primeras y quizás más ampliamente conocida de las leyes de Newton es la famosa Ley de Gravitación Universal.

La ley dice que si tenemos 2 partículas, una de masa m en x y otra de masa M en y, la fuerza que actúa sobre la partícula en x es:

$$F = -g \frac{mM}{\| x - y \|_2^3}(x - y) \qquad \text{con } \gamma : \text{Constante de Gravitación Universal}$$



Si *x(t)* es la posición en el espacio de una partícula de masa m que se mueve bajo la acción de la fuerza gravitatoria, debida a una masa M fija en el origen .

Pruebe que la Energía

$$E(t) = \frac{m}{2}\| x'(t) \|^2 - g \frac{mM}{\| x(t) \|}$$

es conservada, es decir, $E'(t) = 0$

Indicación: - Use la segunda Ley de Newton $F = mx''$

- $\| x \|_2 = \sqrt{< x, x >}$

30.- Considere una empresa que tiene por insumos capital *(K)* y trabajo *(L)*. Suponga que la empresa tiene una función de producción *Q = f(K , L)* y que el precio de la unidad de trabajo y capital es *w* y *r* respectivamente.

i) Formule el problema de minimizar el costo de producción y encuentre la expresión general que lo resuelve.

ii) Resuelva este problema para el caso en que:

$$Q = f(K, L) = 2K^{1/2}L^{1/2} \qquad r = 2 \qquad w = 8 \quad \text{y se desea producir 8 unidades.}$$

31.- Sean $f : R^2 \to R$ y $g : R \to R$ funciones de clase C^2 .Se define $F(x) = f(x, g(x))$.

a) Calcule $F`(x)$ y $F``(x)$.

b) Si f verifica la ecuación de Laplace $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, es convexa y si g es un polinomio mónico de primer grado, calcule $F``(x)$. aplicando la fórmula obtenida en a).

32.- Determine la naturaleza de los puntos críticos para las siguientes funciones:

a) $f(x, y) = x^2 y^3 (6 - x - y)$ b) $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

c) $f(x, y) = x^2 - (y-1)^2$ d) $f(x, y) = x^2 + (y-1)^2$

e) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$ f) $f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y} \quad (x > 0, y > 0)$