



FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
Universidad de CHILE
Cálculo en varias variables - Verano 2007
Profesor: Marcelo Leseigneur
Auxiliar: Julio Deride

Control 1

P1. a. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y $E = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Sea

$$d(a_p, a_q) = \begin{cases} \left| \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right| & \text{si } p \neq q \\ 0 & \text{si } p = q \end{cases}$$

- i. Pruebe que d es métrica.
 - ii. Estudie la completitud de (E, d) .
- b. Sea la sucesión de elementos de $M = \mathcal{C}[0, 1]$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{si } x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

Se consideran en M las siguientes distancias

$$d_1(f, g) = \max_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$$
$$d_2(f, g) = \left[\int_0^1 (f(x) - g(x))^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

- i. Probar que $\{f_n\}$ no tiene límite en (M, d_1) .
 - ii. Probar que $\{f_n\}$ tiene límite $f(x) = 0$ en (M, d_2) .
- P2.** a. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en $(0, 0)$.

- i. $f(x, y) = \left[\frac{y+x^2+x}{y-x} \right]$ si $(x, y) \neq (0, 0)$
- ii. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 \sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
- iii. $f(x, y) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

b. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{xy} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$$

Pruebe que el conjunto de puntos de discontinuidad es cerrado.

c. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{e^{x+y} - 1} & \text{si } x > -y \\ 2x & \text{si } x \leq -y \end{cases}$$

Estudie la continuidad de f en \mathbb{R}^2 .

P3. Sea $\|\cdot\|$ una norma en \mathbb{R}^n y consideremos la función definida por $\|x\|_P = \|Px\|$, donde P es una matriz invertible de $n \times n$.

a. Demuestre que $\|\cdot\|_P$ es una norma en \mathbb{R}^n .

b. Demuestre que $\|x\|_e = \left[\frac{x^2}{9} + 4y^2 \right]^{1/2}$ es una norma en \mathbb{R}^2 .

c. Dibuje los conjuntos $B(0, 1)$ y $B'(0, 1)$.

3 horas.

Pauta

P1. a. i. Veamos que cumple las propiedades de métrica:

■

$$\begin{aligned} d(a_p, a_q) = 0 & \iff p = q \\ & \iff a_p = a_q \end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned} d(a_p, a_q) &= \begin{cases} \left| \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right| & \text{si } p \neq q \\ 0 & \text{si } p = q \end{cases} \\ &= d(a_q, a_p) \end{aligned}$$

■ Si $p \neq q$, $q \neq r$ y $r \neq p$.

$$\begin{aligned} d(a_p, a_q) &= \left| \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right| \\ &= \left| \frac{1}{p} + \frac{1}{r} \right| + \left| \frac{1}{r} + \frac{1}{q} \right| \\ &\leq d(a_p, a_r) + d(a_r, a_q) \end{aligned}$$

Los otros casos son directos.

ii. Supongamos que (E, d) es un espacio completo. Consideremos $\{a_n\} \subseteq E$ como sucesión en E y veamos que es de Cauchy en (E, d) . En efecto,

$$\begin{aligned} \lim_{p, q \rightarrow \infty} d(a_p, a_q) &= \left| \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right| \\ &= 0 \end{aligned}$$

y por lo tanto es de Cauchy. Como E es completo, $a_n \longrightarrow a \in E$. Con lo cual, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0$, $\forall n \geq n_0$, $d(a_n, a) < \varepsilon$. Como $a \in E$, $\exists N \in \mathbb{N}$ $a = a_N$. Tomando $\varepsilon = \frac{1}{N}$, se tiene que $\exists n_0$ tal que $\forall n > \max\{N, n_0\}$

$$\begin{aligned} d(a_n, a) &= d(a_n, a_N) \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{N} \\ &> \frac{1}{N} \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción.

- b. Sea la sucesión de elementos de $M = \mathcal{C}[0, 1]$ Se consideran en M las siguientes distancias

$$d_1(f, g) = \max_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$$

$$d_2(f, g) = \left[\int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

- i. Sabemos que el límite puntual de $\{f_n\}$ es

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Con lo cual, sabemos que (M, d_1) es un espacio completo y si $\{f_n\}$ converge, su límite debe pertenecer a M . Pero $f \notin M$ y por lo tanto no tiene límite en (M, d_1) .

- ii. Tenemos que

$$\begin{aligned} d_2(f_n, 0)^2 &= \int_0^1 (f_n(x) - 0)^2 dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{n}} (1 - nx)^2 dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 0^2 dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{n}} 1 dx - 2 \int_0^{\frac{1}{n}} nx dx + \int_0^{\frac{1}{n}} n^2 x^2 dx \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + n^2 \frac{1}{3n^3} \\ &= \frac{1}{3n} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} d_2(f_n, 0) &= 0 \end{aligned}$$

Con lo cual se concluye.

- P2.** a. i En este caso, notemos que si tomamos el camino $y = mx$ se tiene que

$$\begin{aligned} f(x, mx) &= \frac{mx + x^2 + x}{mx - x} \\ &= \frac{m + x + 1}{m - 1} \end{aligned}$$

Concluimos que $\lim_{m \rightarrow 1} f(x, mx)$ no existe.

ii. Desarrollemos por álgebra de límites.

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \\
&= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos(\theta) \sin(r^2)}{r^2}, \quad \forall \theta \\
&= \lim_{r \rightarrow 0} r^2 \cos(\theta) \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sin(r^2)}{r^2}, \quad \forall \theta \\
&= 0
\end{aligned}$$

iii. Consideremos (x, y) tal que $x^2 + y^2 = (\frac{1}{2\pi n})^2$

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \left(\frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{2\pi n})^2}} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(2\pi n) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Con lo cual, se concluye que f no es continua en $(0, 0)$.

b. Sea D el conjunto de discontinuidades de f . Claramente, si $xy \neq 0$ f es continua por ser álgebra de funciones continuas. Con esto $D \subseteq \{(x, y) : xy = 0\}$. Veamos que estos conjuntos son iguales:

$$\begin{aligned}
\lim_{y \rightarrow 0} f(x_0, y) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x_0^3 - y^3}{x_0 y} \quad \text{no existe } \forall x_0 \neq 0 \\
\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y_0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - y_0^3}{x y_0} \quad \text{no existe } \forall y_0 \neq 0
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - y^3}{xy}$$

el cual no existe. En efecto, si existiese, dicho límite debería ser igual a los límites iterados, esto es

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - y^3}{xy} &= \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^3 - y^3}{xy} \\
&= \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - y^3}{xy}
\end{aligned}$$

los cuales no existen por lo hecho anteriormente.

Con esto, $D = \{(x, y) : xy = 0\}$. Veamos que es cerrado. Sea $(x_0, y_0) \in D^c$. Sea $\delta = \frac{1}{2} \min\{|x_0|, |y_0|\}$. Como $(x_0, y_0) \in D^c \Leftrightarrow x_0 y_0 \neq 0 \Leftrightarrow x_0 \neq 0 \wedge y_0 \neq 0$ y se tiene que $\delta > 0$ y además, $\mathbb{B}((x_0, y_0); \delta) \subset D^c$ con lo cual D^c es abierto y, por lo tanto, D es cerrado.

c. Se tiene

$$\begin{aligned}
 \lim_{x+y \rightarrow 0} f(x, y) &= \lim_{x+y \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{e^{x+y} - 1} \\
 &= \lim_{x+y \rightarrow 0} \frac{(x+y)(x-y)}{e^{x+y} - 1} \\
 &= \lim_{x+y \rightarrow 0} \frac{(x-y)}{\frac{e^{x+y}-1}{x+y}} \\
 &= \lim_{x+y \rightarrow 0} (x-y) \lim_{x+y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{e^{x+y}-1}{x+y}} \\
 &= \lim_{y \rightarrow -x} (x-y) \lim_{x+y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{e^{x+y}-1}{x+y}} \\
 &= 2x
 \end{aligned}$$

con lo cual f es continua en \mathbb{R}^2 .

P3. Sea $\|\cdot\|$ una norma en \mathbb{R}^n y consideremos la función definida por $\|x\|_P = \|Px\|$, donde P es una matriz invertible de $n \times n$.

a. Veamos que $\|\cdot\|_P$ es norma:

■

$$\begin{aligned}
 \|x\|_P = 0 &\iff \|Px\| = 0 \\
 &\iff Px = 0 \\
 &\iff x = 0
 \end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}
 \|\lambda x\|_P &= \|P\lambda x\| \\
 &= \|\lambda Px\| \\
 &= \lambda \|Px\| \\
 &= \lambda \|x\|_P
 \end{aligned}$$

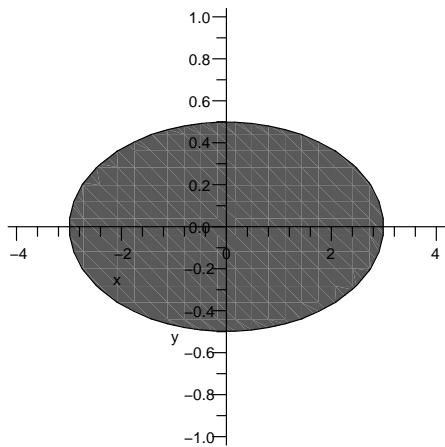


Figura 1: Bola Abierta

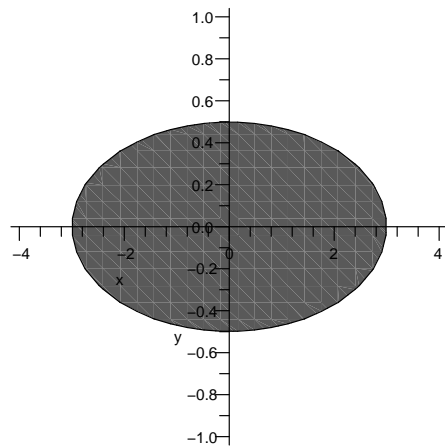


Figura 2: Bola Cerrada

■

$$\begin{aligned}
 \|x + y\|_P &= \|P(x + y)\| \\
 &= \|Px + Py\| \\
 &\leq \|Px\| + \|Py\| \\
 &= \|x\|_P + \|y\|_P
 \end{aligned}$$

Con lo cual se concluye.

b. Para ello, basta notar que

$$\begin{aligned}
 \|x\|_e &= \left[\frac{x^2}{9} + 4y^2 \right]^{1/2} \\
 &= \left\| \left(\frac{x}{3}, 2y \right) \right\|_2 \\
 &= \left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_2
 \end{aligned}$$

con lo cual, llamando $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, notando que P es invertible, se concluye por la parte (a).

c. Los conjuntos vienen dados por 1 y 2

(la diferencia está en la inclusión de la frontera por parte de la bola cerrada)